Licence de Sciences Économiques, mathématiques L1, févier 2005

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 : Montrer que l'application :

$$h : \mathbf{R} - \{-\frac{2}{5}\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{1\} \quad , \quad x \longmapsto h(x) = \frac{5x+1}{5x+2}$$

est bijective. Déterminer la fonction réciproque h^{-1}.

Exercice 2 : (deux petites questions indépendantes)

1) Pourquoi $\mathbf{R} - \{0\}$ est-il un ouvert de $\mathbf{R}$?

2) Soit une application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Que signifie la phrase : " f admet en un point (a,b) de $\mathbf{R}^2$ un maximum local " ?

Exercice 3 : On considère la fonction :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 4 \quad .$$

1) Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux.

2) Soit $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, déterminer : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \quad .$

3) Soit $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, déterminer :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \quad .$$

4) Montrer que : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,-1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,-1) = 0$. Calculer $f(0,-1)$.

5) Soit $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, calculer : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2))^2$.

6) Montrer que f admet en $(0,-1)$ un extremum local. Est-ce un maximum local ou un minimum local ?

7) Trouver les points critiques de f (c'est-à-dire les points où les dérivées partielles d'ordre un s'annulent).

Exercice 4 : On considère la fonction :

$$g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto g(x_1,x_2) = \frac{4x_2 + x_1}{x_2 + 4x_1} \quad .$$

1) Donner le domaine de définition de le fonction g que l'on notera $\mathcal{D}_g$. Donner une représentation graphique de $\mathcal{D}_g$, on hachurera par exemple la partie de plan qui est dans $\mathcal{D}_g$.

2) Justifier que $\mathcal{D}_g$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Montrer que sur $\mathcal{D}_g$, l'application g admet des dérivées partielles (d'ordre un) que l'on déterminera.

3) Existe-t-il des points (x_1,x_2) de $\mathcal{D}_g$ tels que :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) - 2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = 1 \quad ?$$

4) Représenter graphiquement le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad ; \quad x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = 1\} \quad .$$

5) En se ramenant par exemple à déterminer le maximum d'une fonction numérique d'une variable, déterminer le maximum de la fonction g sur l'ensemble A.

Exercice 5 : On considère la fonction :

$$h : (\mathbf{R}^+ - \{0\}) \times (\mathbf{R}^+ - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto h(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \quad .$$

1) Montrer que h est homogène et préciser son degré d'homogénéité.

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre un de h.

3) Vérifier l'identité d'Euler.