Nom : CHAU
Prénom : Stéphane
Horaire du groupe de TD :

Licence de Sciences Économiques
Mathématiques L1
Année 2007-2008

CONTRÔLE CONTINU 1

Exercice 1. On considère la fonction à variable réelle $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x+7}$.

(1) Donner le domaine de définition de f.

Le domaine de définition de f est donné par $Df = \mathbb{R} - \{-7\}$.

(2) Montrer que 4 est la seule valeur non atteinte par f.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Si y est atteint par f alors l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une solution. Or :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{4x}{x+7} \\ &\iff y(x+7) = 4x \\ &\iff xy + 7y = 4x \\ &\iff x(y-4) = -7y \\ &\iff x = \frac{-7y}{y-4} \end{aligned}$$

(3) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

La fonction f est injective car tout élément y dans $\mathbb{R}$ (qui l'ensemble d'arrivée) admet soit zéro antécédent (si $y = 4$) soit un antécédent (si $y \neq 4$). En revanche f n'est pas surjective car, par exemple, $y = 4$ n'a pas d'antécédent. Enfin, f n'est pas bijective car elle n'est même pas surjective.

(4) On considère à présent la fonction $\overline{f} : \mathbb{R} - \{-7\} \to \mathbb{R} - \{4\}$ définie par $x \mapsto \overline{f}(x) = \dfrac{4x}{x+7}$. On admet que $\overline{f}$ est bien définie et bijective (on ne demande pas de le démontrer). Donner la fonction réciproque $\overline{f}^{-1}$ de $\overline{f}$ (sans oublier les ensembles de définition et d'arrivée).

La question 2 permet immédiatement de donner explicitement la fonction réciproque $\overline{f}^{-1}$ de $\overline{f}$. On a $\overline{f}^{-1} : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{-7\}$ et cette fonction est définie par $y \mapsto \overline{f}^{-1}(y) = \dfrac{-7y}{y-4}$.