Nom : CHAU
Prénom : Stéphane
Horaire du groupe de TD :

Licence de Sciences Économiques
Mathématiques L1
Année 2007-2008

CONTRÔLE CONTINU 2

Exercice 1. On considère la fonction à deux variables réelles $f : (x, y) \mapsto \ln(x^3) - y^2 + 3x + 2y - 1$.

(1) Donner le domaine de définition D_f de f et le représenter graphiquement. (N'oubliez pas de préciser si vous hachurez le domaine solution ou le domaine à exclure...)

La fonction f est définie sur $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$. Ce domaine est représenté par la partie rouge sur la figure 1

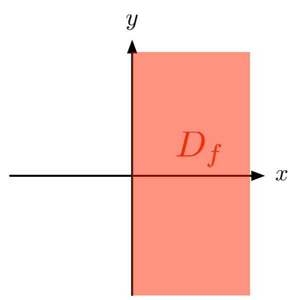

Fig. 1. Domaine de définition de f

(2) Le domaine D_f est-il ouvert ? Fermé ? Borné ? (Dans tous les cas, justifiez votre réponse)

La frontière $Fr(D_f)$ de D_f est la droite verticale d'équation $x = 0$. Le domaine D_f est ouvert car c'est un demi-plan ouvert. Une autre méthode pour le justifier est de dire que tous les points de $Fr(D_f)$ sont en dehors de D_f. Et encore une autre justification serait qu'on peut écrire $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, h(x, y) > 0\}$ avec $h : (x, y) \mapsto x$ qui est une fonction continue car polynomiale.

D_f n'est pas fermé car, par exemple, le point $(0, 0)$ est dans $Fr(D_f)$ mais n'est pas dans D_f

Enfin, D_f n'est pas borné car on ne peut pas l'inclure dans un disque de rayon fixé.

(3) On admet que les dérivées partielles de f existent sur D_f. Calculer le(s) point(s) critique(s) de f.

Soit $(x, y) \in D_f$. Vu que les dérivées partielles de f existent sur D_f. On peut calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{3x^2}{x^3} + 3 = \dfrac{3}{x} + 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + 2$.

Le point (x, y) est un point critique de f si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ i.e. si

et seulement si : $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+3=0 \\ -2y+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3+3x}{x}=0 \\ -2y+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3+3x=0 \\ -2y+2=0 \end{cases}$ (car $x \neq 0$)
Le système donne alors $x=-1$ et $y=1$. Cependant $(-1,1) \notin D_f$ donc ce n'est pas un point critique de f. En fait f n'a aucun point critique (cette remarque donne lieu à 1 point de bonus).

(4) On considère à présent la fonction $g : (x,y) \mapsto f(x,y) - \ln(x^3) + y^2 + 1$ définie sur D_f. Montrer que g est une fonction homogène de degré 1.

Soit $(x,y) \in D_f$. Vu la définition de g, on a alors $g(x,y) = 3x + 2y$.
Soit $\lambda > 0$, alors on a :

$$g(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda x + 2\lambda y = \lambda(3x+2y) = \lambda^1 g(x,y).$$

Donc g est homogène de degré 1.