Nom : CHAU
Prénom : Stéphane
Horaire du groupe de TD :

Licence de Sciences Économiques
Mathématiques L1
Année 2007-2008

CONTRÔLE CONTINU 2

Exercice 1. On considère la fonction à deux variables réelles $f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 9)$.

(1) Donner le domaine de définition D_f de f et le représenter graphiquement à main levée. (N'oubliez pas de préciser si vous hachurez le domaine solution ou le domaine à exclure...)

La fonction f est définie sur $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 9 > 0\}$. Ce domaine de définition est représenté sur la figure 1, il s'agit de tout le plan privé du domaine rouge (qui représente le disque fermé de centre O et de rayon 3)

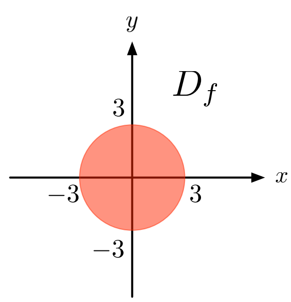

Fig. 1. Domaine de définition de f

(2) Le domaine D_f est-il ouvert ? Fermé ? Borné ? (Dans tous les cas, justifiez votre réponse)

La frontière de $Fr(D_f)$ de f est le cercle de centre O et de rayon 3. Le domaine D_f est ouvert car tous les points de $Fr(D_f)$ sont en dehors de D_f. Une autre manière de justifier que D_f est ouvert est qu'il peut s'écrire $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, h(x, y) > 0\}$ avec $h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 9$ qui est continue car polynomiale.
D_f n'est pas fermé car, par exemple, le point $(0, 3)$ est dans $Fr(D_f)$ mais n'est pas dans D_f.
Enfin, D_f n'est pas borné car on ne peut pas l'inclure dans un disque de rayon fixé.

(3) On admet à présent que f admet des dérivées partielles à tout ordre sur son domaine de définition D_f. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

Soit $(x, y) \in D_f$. Vu que les dérivées partielles de f existent sur D_f, on peut les calculer. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 9}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2 - 9) - 4x^2}{(x^2 + y^2 - 9)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 18}{(x^2 + y^2 - 9)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2 - 9) - 4y^2}{(x^2 + y^2 - 9)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 - 18}{(x^2 + y^2 - 9)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2 - 9)^2}$$

(4) On considère à présent la fonction $g : (x, y) \mapsto \exp(f(x, y)) + 9$ définie sur D_f. Montrer que g est une fonction homogène de degré 2.

Soit $(x, y) \in D_f$. Vu la définition de g, on a $g(x, y) = x^2 + y^2$.
Soit $\lambda > 0$, alors on a : $g(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = \lambda^2 g(x, y)$.
Donc g est homogène de degré 2.