Licence de Sciences Économiques, Mathématiques L1, Janvier 2007.

Examen

Calculatrices et documents interdits. Il sera tenu compte du soin et de la rédaction dans l'évaluation des copies.

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par $\left\{ \begin{array}{ll} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+3}. \end{array} \right.$

(1) Quel est le domaine de définition de f ?

(2) Soit g la restriction de f suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} g: & \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ & x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+3}. \end{array} \right.$$

Montrer que g est bien définie, bijective et décrire complétement sa réciproque.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie par $\left\{ \begin{array}{ll} f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{3x_1^2 + x_2^2}{2x_1 + x_2}. \end{array} \right.$

(1) Déterminer le domaine de définition D_f de f et représenter le graphiquement.

(2) L'ensemble D_f est-il ouvert ? Est-il fermé ?

(3) Montrer que la fonction f est homogène en utilisant la définition. (Ne pas oublier de préciser son degré d'homogénéité).

(4) Citer le théorème (identité) d'Euler. Pourquoi peut-on l'appliquer à la fonction f ?

(5) Calculer les dérivées partielles d'ordre un de la fonctions f.

Exercice 3.

On considère l'ensemble $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \leq 0, \, y \geq 0, \, x - y + 2 \geq 0\}$.

(1) Représenter graphiquement l'ensemble A.

(2) Montrer que A est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.

On considère la fonction $\left\{ \begin{array}{llll} f & : & A & \to \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto x^2 + 2y^2 + 2xy + x + 1. \end{array} \right.$

(3) Montrer que la fonction f admet un maximum M et un minimum m sur A et qu'ils sont atteints.

Pour calculer m et M, on distingue deux cas. Posons F la frontière de l'ensemble A. L'ensemble F correspond donc au triangle de sommets $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 2)$. Soit I l'intérieur de l'ensemble A, c'est-à-dre $I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x < 0, \, y > 0, \, x - y + 2 > 0\}$. On a donc $A = F \cup I$. On admettra dans la suite que l'ensemble I est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(4) Justifier pourquoi la fonction f admet des dérivées partielles à tout ordre sur I.

(5) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

(6) Déterminer les éventuels points critiques de f sur I.

(7) Montrer que la fonction f admet un extremum local en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

(8) Montrer que la fonction f admet un minimum local en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Calculer $f\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

(9) Étudier la fonction
$$\begin{cases} g & : & [0;2] & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & 2y^2+1. \end{cases}$$

(10) Étudier la fonction
$$\begin{cases} h & : & [-2;0] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2+x+1. \end{cases}$$

(11) Étudier la fonction
$$\begin{cases} k & : & [-2;0] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 5x^2+13x+9. \end{cases}$$

(12) Étudier les valeurs prises par la fonction f sur F. (Utiliser les questions précédentes).

(13) Grâce aux questions précédentes, donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes.