

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1. On appelle à chaque fois f la fonction définie par la formule de la question.

- (1) La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -\frac{25}{x^6} + \frac{7}{x^8} = -25x^{-6} + 7x^{-8}.$$

- (2) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

- (3) La fonction f est définie sur \mathbb{R}^+ et dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2 + \sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^2}.$$

- (4) La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} ($x^2 - 3x + 5 > 0$ et $\Delta = -11 < 0$).

$$f'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}}.$$

- (5) La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = (\sin x) \times \sin(\cos x).$$

- (6) La fonction f est définie sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$, $3x+1 \geq 0$, et dérivable sur $]-\frac{1}{3}; +\infty[$, $3x+1 > 0$.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \cos(\sqrt{3x+1}).$$

- (7) La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = 4xe^{2x^2+1}.$$

- (8) La fonction f est définie et dérivable sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$, $3x - 1 > 0$.

$$f'(x) = -\frac{3}{3x-1}.$$

- (9) La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \ln 3 \times 3^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 2. On peut soit utiliser la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée. Attention, ici la fonction f est la composée de trois fonctions. On peut aussi remarquer que

$$\ln\left(\sqrt{3 + \frac{2}{x}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(3 + \frac{2}{x}\right).$$

Cela simplifie grandement le calcul de la dérivée qui est alors $f'(x) = -\frac{1}{3x^2 + 2x}$.

Exercice 3. La fonction f est polynomiale. Elle est donc définie et admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 .

On a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 10x_1 - 2x_2$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 6x_2 - 2x_1 + 14$. Les points critiques sont donc les solutions du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 10x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 6x_2 - 2x_1 + 14 = 0. \end{cases}$$

On trouve une seule solution $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

Les dérivées d'ordre 2 sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= 10, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) &= -2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) &= -2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= 6. \end{aligned}$$

Exercice 4.

(1) $D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$.

La fonction f est une fonction rationnelle. Elle admet donc des dérivées partielles de tout ordre (et continues) sur tout son domaine de définition.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 6x_1 - x_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= -\frac{2}{x_1^2} - x_1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= 6, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= \frac{4}{x_1^3}, \end{aligned}$$

Comme la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues, on peut appliquer le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = -1.$$

Exercice 5. On appelle à chaque fois f la fonction définie par la formule de la question.

- (1) La fonction f est définie et admet des dérivées partielles sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1, y > -1\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{y+1}.$$

- (2) La fonction f est définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x, \lambda y) = 10(\lambda x)^{\frac{1}{2}} + 2(\lambda y)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}(10x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}) = \lambda^{\frac{1}{2}}f(x, y)$. La fonction f est donc homogène de degré $\frac{1}{2}$.

[Autre Méthode] Comme la fonction f admet des dérivées partielles continues, on peut appliquer le théorème d'Euler :

Comme $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \times (10x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}f(x, y)$ (identité d'Euler), alors la fonction f est homogène de degré $\frac{1}{2}$.

- (3) La fonction f est définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y \geq 0\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{2}(3x + 2y)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (3x + 2y)^{-\frac{1}{2}}.$$

La fonction f est homogène de degré $\frac{1}{2}$.

- (4) La fonction f est définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0, y \geq 0) \text{ ou } (x \leq 0, y \leq 0)\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0, y > 0) \text{ ou } (x < 0, y < 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

La fonction f est homogène de degré 1.

- (5) La fonction f est définie sur \mathbb{R}^2 car $2x^2 + 3y^2 \geq 0$ et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}.$$

La fonction f est homogène de degré 1.

- (6) La fonction f est définie sur $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ et admet des dérivées partielles sur $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \boxed{\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}x_3^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \boxed{\frac{1}{4}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{-\frac{3}{4}}x_3^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \boxed{\frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}x_3^{-\frac{1}{2}}}.$$

La fonction f est homogène de degré 1.