Licence de Sciences Économiques
Université de Nice Sophia-Antipolis

Année 2007-2008
Mathématiques L1

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1.
Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{5}{x^5} - \dfrac{1}{x^7}$ **2**. $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+2}$ **3**. $x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

4. $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **5**. $x \mapsto \cos(\cos x)$ **6**. $x \mapsto \sin(\sqrt{3x+1})$

7. $x \mapsto e^{2x^2+1}$ **8**. $x \mapsto \ln \dfrac{1}{3x-1}$ **9**. $x \mapsto 3^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2.
Calculer la dérivée de $\ln\left(\sqrt{3 + \dfrac{2}{x}}\right)$.

<u>Conseil</u> : Vous pouvez poser la fonction $u(x) := \sqrt{3 + \dfrac{2}{x}}$, la dériver puis finir le calcul demandé.

Exercice 3.
On considère la fonction

$$\begin{cases} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 14x_2 - 1 \end{cases}$$

(1) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
(2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
(3) Déterminer les éventuels points critiques de la fonction f.

Exercice 4.

(1) On considère la fonction

$$\begin{cases} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & 3x_1^2 + \frac{2}{x_2} - x_1x_2 + 7 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
Pourquoi les dérivées partielles de f sont-elles définies sur tout le domaine de définition de f ?
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f. Que remarquez-vous entre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}$? Énoncer le théorème du cours qui correspond à ce résulat.

(2) Répondre aux mêmes questions avec les fonctions des exercices 4, 5, 6, 7 et 8 de la feuille de Travaux Dirigés 2.

Exercice 5.

(1) Pour les fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, leur domaine de dérivabilité et calculer leurs dérivées partielles.

1. $(x, y) \mapsto \ln(1+x) + 2\ln(1+y)$ **2**. $(x, y) \mapsto 10\, x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}$ **3**. $(x, y) \mapsto (3x+2y)^{\frac{1}{2}}$

4. $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ **5**. $(x, y) \mapsto \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ **6**. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{2}}$

(2) Pour les fonctions des exemples 2, 3, 4, 5 et 6 trouver le nombre α tel que $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f$. Vérifier que dans tous les cas, on a $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y)$, pour $\lambda>0$. À quel théorème du cours correspond ce résultat ?