Licence de Sciences Économiques, Mathématiques L 1 - U 3, Janvier 2006

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 : Soit f l'application :

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \quad , \quad x \longmapsto f(x) = \frac{4-2x}{x+1} \quad .$$

1) Montrer que f est bijective. Déterminer complètement la fonction réciproque f^{-1}.
2) Soit h l'application :

$$\mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto h(x) = \frac{8+x}{x+2} \ .$$

Préciser $h(f(x))$ pour tout $x \neq -1$. Puis, déterminer la composée $h \circ f$.

Exercice 2 : On considère la fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto h(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{x_1+x_2} \ .$$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction h et le représenter graphiquement.
On restreindra dans la suite la fonction h à son domaine de définition.
2) Donner la définition d'une fonction homogène. Montrer de cette manière que h est une fonction homogène et préciser son degré d'homogénéité.
3) Montrer que $\mathcal{D}_h$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4) Pourquoi le fonction h admet-elle des dérivées partielles sur tout son domaine de définition ?
3) Calculer les dérivées partielles d'ordre un de h.
4) Écrire le théorème d'Euler. Expliquer pourquoi on peut l'appliquer à la fonction h. En déduire l'identité d'Euler que vérifie h. Finalement, retrouver cette identité par un calcul direct.
5) Représenter l'ensemble des $(x_1,x_2) \in \mathcal{D}_h$ tels que $h(x_1,x_2) = 1$?

Exercice 3 : On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 + 10x_2 \ .$$

1) Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.
2) Trouver les points critiques de f (c'est-à-dire les points où les dérivées partielles d'ordre un s'annulent).
3) Peut on affirmer que la fonction f admet un extremum local atteint au point (2,1)?
4) Trouver les points (x_1,x_2) vérifiant le système d'équation:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

5) On suppose que la restriction de f au sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ d'équation $x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{3}{2}$ admet un maximum local. En quels points (x_1,x_2) de $\mathbf{R}^2$ ce maximum local est-il atteint et pourquoi?

Exercice 4 : On considère l'application:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad (x_1,x_2) \longmapsto \frac{\ln x_1}{2} + \frac{\ln x_2}{3} \ .$$

1) Soit U le domaine de définition de f. Déterminer U et le représenter graphiquement. Démontrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) On considère l'application: $h : U \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$:

$$(x_1,x_2,\lambda) \longmapsto \frac{\ln x_1}{2} + \frac{\ln x_2}{3} + \lambda(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} - 1) \quad .$$

Montrer que h a un seul point critique.
3) Soit $H = \{(x_1,x_2) \in U \ ; \ \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 1\}$. Représenter H.
4) On suppose que f a en restriction à H un maximum local atteint en un point (a_1,a_2). Quel est le lien entre les points critiques de h et le point (a_1,a_2)? En déduire le point (a_1,a_2).
4) On considére $K = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 \geq 1 \ , \ x_2 \geq 1$ et $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 1\}$. Justifier que K est fermé. Représenter K et expliquer sur le dessin pourquoi K est borné.
5) Justifier que la restriction de f à K admet un minimum atteint en un point (b_1,b_2) de K. Pourquoi avons-nous nécessairement $b_1 = 1$ ou $b_2 = 1$?