Excellente copie : très bien rédigée !
→ précise et concise.

Sujet maison (Analyse 4)

Exercice 1 :

Soit $c \in]0,1[$ tq f est une contraction,
On suppose x et y sont deux points fixes de f
Alors on a
$$\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| \leq c\|x-y\|$$
ce qui implique $\|x-y\|=0$ donc $x=y$
d'où l'unicité d'un point fixe de f (s'il existe)

Soit $x_0 \in E$, comme E est stable par f on peut poser par récurrence $x_n = f(x_{n-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *
donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq c\|x_n - x_{n-1}\|$$

et donc on obtient par récurrence
$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq c^n \|x_1 - x_0\|.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| \leq \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{m-1} c^{i+n}$$
$$\leq c^{\cancel{m+1}\, n} \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ce qui prouve que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Comme E est complet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite x.
Comme E est fermé, $x \in E$ et on a $x_{n+1} = f(x_n)$
Comme f est contractante, elle est continue sur E, et donc par passage à la limite $(n \to \infty)$ on obtient $x = f(x)$
d'où l'existence d'un point fixe.

Exercice 2 :

1) soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

posons $N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}|$ si $A = (a_{i,j})$

et on pose $C = AB$ avec $C = (C_{i,j})$

On a $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ On a donc

$$n|C_{i,j}| \leq n \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|$$

$$\leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{N(A)}{n} \frac{N(B)}{n}$$

$$\leq N(A) N(B) \quad \leq k N(A) N(B)$$

avec $k = 1 > 0$.

à justifier

comme en dim finie on a toutes les normes sont equivalentes donc pour toute Norme N de $M_n(\mathbb{R})$

$\exists\, c > 0$ tq $N(AB) \leq c\, N(A) N(B)$

2) Montrons que $\|A\| = \sqrt{tr({}^tAA)}$ est une norme.

On a $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et ${}^tA = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

donc $a_{ij} = b_{j,i}$

On a $\sqrt{tr({}^tAA)} = 0 \Leftrightarrow tr({}^tAA) = 0$

$\Leftrightarrow tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) = 0 \qquad i,j \in [1, n^2]$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} \times b_{j,i}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 = 0$

donc $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = 0$ Ainsi $A = 0$.

- On a $\|\lambda A\| = \sqrt{tr({}^t(\lambda A)(\lambda A))} = \sqrt{\sum\sum \lambda a_{ij} \times \lambda b_{ji}}$

$= \sqrt{\sum\sum \lambda^2 a_{ij}^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum\sum a_{ij}^2}$

$= |\lambda| \sqrt{tr({}^t AA)}$

- $\|A+B\| = \sqrt{tr({}^t(A+B)(A+B))} \leq \sqrt{tr({}^tAA)} + \sqrt{tr({}^tBB)}$

$\iff tr({}^t(A+B)(A+B)) \leq tr({}^tAA) + tr({}^tBB) + 2\sqrt{tr({}^tAA)}\sqrt{tr({}^tBB)}$

$\iff \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij})^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 + 2\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2}$

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 + 2\sum a_{ij} b_{ij} \leq \sum a_{ij}^2 + \sum b_{ij}^2 + 2\sqrt{\sum a_{ij}^2}\sqrt{\sum b_{ij}^2}$

$\sum a_{ij} b_{ij} \leq \sqrt{\sum a_{ij}^2}\sqrt{\sum b_{ij}^2}$ Par inégalité de Cauchy Swartz

donc $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

3) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

Alors on a $\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^2$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle L_i, C_j \rangle^2$$

avec L_i est la i-ème ligne de A
et C_j est la j-ème colonne de B

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

On a $\langle {}^tL_i, C_j \rangle^2 \leq \|L_i\|^2 \|C_j\|^2$

Ainsi

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} b_{lj}^2 \right)$$

$$\leq \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j,l=1}^{n} b_{lj}^2 \right)$$

$$\leq \|A\|^2 . \|B\|^2$$

En appliquant la racine, et comme elle est croissante donc on obtient

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

4) On a l'application trace est linéaire

soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ alors

$|Tr(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{i,i}|$ $\left(\cancel{\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)} \right) \leq \sum_{i=1}^{n} N_\infty(A)$

$= n \, N_\infty(A)$

ceci montre que tr est continue (~~et que $\|tr\| \leq n$~~)

5)

soit deux suites A_n et B_n

avec $A_n \xrightarrow[+\infty]{} A$ et $B_n \xrightarrow[+\infty]{} B$

Montrons que $\lim A_n B_n = AB$

On a $A_n B_n - AB = A_n B_n - A_n B + A_n B - AB$

Comme A_n est bornée car (convergente)

donc $\|A_n B_n - AB\| \leq M \, \|B_n - B\| + \|B\| \, \|A_n - A\|$

On a $B_n - B \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $A_n - A \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc $\|A_n B_n - A\| \leq B\|$

donc $\lim A_n B_n = AB$

soit l'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) \longrightarrow AB$$

On a $\lim f(A_n, B_n) = f(\lim A_n, \lim B_n)$

$$= f(A, B)$$

$$= AB$$

donc f est continue.

6) On a $M_n(\mathbb{R})$ est de dim finie, toutes les normes sont donc équivalentes.
Considérons la norme N_∞. si $A = (a_{ij})$
alors $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$

On a $\forall (i,j) \in [1,n]^2$ l'application f_{ij} $A \to a_{ij}$ est linéaire
et $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $|f_{ij}(A)| \leq \|A\|_\infty$
elle est donc continue en $O_{M_n(\mathbb{R})}$
Donc $\forall (i,j) \in [1, n^2]$ l'application f_{ij} est continue sur $M_n(\mathbb{R})$
en plus, l'application $A \to \det(A)$ est une fonction polynômiale des coefficients de la matrice, donc composée de fonctions continues

laquelle?

$\to$ L'application $A \to \det A$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$

7) On a l'application $A \to \det A$ est continue.
En outre, $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$
donc l'ensemble des matrices inversibles de A est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par cette application,
Il s'ensuit que cet ensemble est un ouvert de E

8) soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$
On a l'inverse d'une matrice A inversible est définie par $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}(A))$
la comatrice de A est une matrice dont les éléments sont des déterminants de matrices extraites de A, donc des fonctions polynômiales des coefficients de A.
Ainsi, l'application $A \to \text{com}(A)$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$
De plus les applications $A \to {}^tA$ et $A \to \det A$ sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$

pourquoi est-elle continue?

Donc l'application $A \to \frac{1}{\det A}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$
$\to$ L'application $A \to A^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$