EXERCICE À RÉDIGER 1

✍

Exercice 1 (Espace de Banach des applications bornées). Soit X un ensemble. On considère l'ensemble des applications bornées de X vers $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{B}(X, \mathbb{R}) \coloneqq \{f : X \to \mathbb{R} \mid \exists M > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leqslant M\} \ .$$

Il est muni d'une structure d'espace vectoriel par la somme et la multiplication à l'arrivée dans $\mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x) \qquad \& \qquad (\lambda.f)(x) \coloneqq \lambda f(x) \ .$$

(1) Montrer que $\|f\| \coloneqq \sup_{x\in X} |f(x)|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathrm{B}(X, \mathbb{R})$.

L'application $\| - \| : \mathrm{B}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ est bien à valeur réelle positive.

(a) On a l'équivalence suivante

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| = 0 \iff \forall x \in X,\ f(x) = 0 \iff f = 0 \ .$$

(b) Pour tout $f \in \mathrm{B}(X, \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda.f\| = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in X} \big(|\lambda||f(x)|\big) = |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| \ .$$

(c) Pour tout $f, g \in \mathrm{B}(X, \mathbb{R})$, on a

$$\|f+g\| = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x\in X} \big(|f(x)| + |g(x)|\big) \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\| + \|g\| \ .$$

---

(2) Montrer que $(\mathrm{B}(X, \mathbb{R}), \|f\|)$ est un espace de Banach.

Il s'agit de montrer que toute suite de Cauchy est convergente. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications bornées de X vers $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\star) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geqslant N, \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon \ .$$

La méthode est classique, c'est pourquoi j'ai choisi cet exercice type : on commence par construire la limite potentielle, on montre ensuite qu'elle vit bien dans l'espace considéré et on conclut en montrant que la suite tend vers cette limite.

Par définition de la norme $\| - \|$ considérée, les suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, pour tout $x \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geqslant N, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ .$$

Comme l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, | - |)$ est complet, chacune de ces suites converge vers une limite notée $f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in X,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \ .$$

On a donc là une application f de X vers $\mathbb{R}$ dont il nous faut montrer qu'elle est bornée. Commençons par appliquer la définition $(\star)$ de suite de Cauchy à $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geqslant N, \quad \|f_n - f_m\| < 1 \ .$$

Grâce au corollaire de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|f_n\| - \|f_N\| < 1 \ ,$$

pour tout $n \geqslant N$, c'est-à-dire

$$\forall x \in X, \quad |f_n(x)| < 1 + \|f_N\| \ .$$

En fixant x et en passant à la limite sur n, on en conclut, par continuité de la fonction "valeur absolue", que

$$\forall x \in X, \quad |f(x)| \leqslant 1 + \|f_N\|$$

et donc que l'application f est bornée.

Il ne reste plus qu'à montrer que la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers cette application f. On n'a pas vraiment le choix, on utilise la définition de la convergence d'une suite : soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $x \in X$. Pour cela, on invoque la définition ($\star$) de suite de Cauchy pour $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \geqslant N, \quad \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

On a donc $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $x \in X$ et pour tout $n, m \geqslant N$. Dans cette inégalité, à n fixé et à x fixé, on fait tendre m vers $+\infty$: par continuité de la valeur absolue, cela donne

$$\forall n \geqslant N, \ \forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

et le tour est joué !

Bonus : Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{B}(X, \mathbb{R})$?

L'ensemble des applications bornées ("de Dirac', dites aussi 'fonctions indicatrices") suivantes

$$\left\{ \delta_x : X \to \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{lcl} y \mapsto 0 & , & \text{pour } y \neq x \\ y \mapsto 1 & , & \text{pour } y = x \end{array} \right. \right\}_{x \in X}$$

en forme une famille libre ; c'est une base si et seulement si X est fini. Donc la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{B}(X, \mathbb{R})$ est égale au cardinal de l'ensemble X. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension infinie lorsque X est infinie : *voilà donc un premier exemple d'espace vectoriel normé de dimension infinie !*
