EXERCICE À RÉDIGER 2

✍

Exercice 1 (Intérieur d'un ensemble). Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

(1) Soit A un sous-ensemble de E. Montrer que l'intérieur de A est égal à

$$\mathring{A} = \{x \in A \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\} \ .$$

On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ **:** Soit

$$x \in \mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O \ .$$

Il existe donc un sous-ensemble ouvert O de A qui contient x, i.e. $x \in O \subset A$. Pour définition de "ouvert", il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon r soit contenue dans O :

$$B(x,r) \subset O \ .$$

Ceci donne au final

$$x \in B(x,r) \subset O \subset A \ .$$

$\boxed{\supset}$ **:** Dans l'autre sens, soit $x \in A$ tel qu'il existe $r > 0$ vérifiant $B(x,r) \subset A$. Comme la boule ouverte $B(x,r)$ est ouverte, par proposition du cours, elle fait partie des sous-ensembles ouverts inclus dans A, d'où

$$B(x,r) \subset \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O = \mathring{A} \ .$$

Ceci implique en particulier que x appartient à l'intérieur $\mathring{A}$ de A .

---

(2) On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}$

$$F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}}\right] \ .$$

Montrer que

$$\mathring{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}}\right[\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\frac{1}{2^{2n+2}} < x < \frac{1}{2^{2n+1}}$, on voit que

$$\mathrm{B}(x,r) \subset \left[\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$$

pour

$$r = \min\left(x - \frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}} - x\right) > 0 \ .$$

La caractérisation établie à la question précédente montre donc que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+1}}\right[\subset \mathring{F} \ .$$

Il reste à montrer que les éléments de F la forme $\frac{1}{2^k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas dans l'intérieur de F ; on le rédige complètement pour ceux de la forme $\frac{1}{2^{2n+1}}$, les autres se traitant avec les mêmes arguments. Pour cela, on utilise à nouveau la caractérisation établie à la question précédente et on va montrer que

$$\forall r > 0,\ \exists x \in B\left(\frac{1}{2^{2n+1}}, r\right) \cap \mathbb{R}\backslash F\ .$$

En effet, il suffit de considérer par exemple

$$x = \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2}\min\left(r, \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right)\ .$$

(La seule manière de comprendre les valeurs choisies ici et le raisonnement proposé est de faire un dessin ; et comme je veux que vous compreniez bien, je ne le ferai pas !)

---

(3) Que vaut $\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}}$?

On prétend que

$$\boxed{\overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}} = \varnothing}\ .$$

Pour cela, on utilise encore la caractérisation établie à la première question : on va montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0,\ B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing\ .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il est la limite d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels

$$y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\ .$$

Soit $r > 0$, on applique la convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à "$\varepsilon = r$", cela donne

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |y_n - x| < r\ .$$

On a donc que $y_N \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$.

✍