EXERCICE À RÉDIGER 4

✍

Exercice 1 (Laplacien en coordonnées polaires). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. L'*opérateur laplacien* est l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(1) Montrer que la fonction «coordonnées polaires»

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\rho, \theta) & \mapsto & (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

À θ fixé, les deux fonctions $\rho \cos \theta$ et $\rho \sin \theta$ à variable ρ sont de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire dérivables à dérivées continues. De la même manière, à ρ fixé, les deux fonctions $\rho \cos \theta$ et $\rho \sin \theta$ à variable θ sont de classe $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire dérivables à dérivées continues. La fonction Φ admet donc des dérivées partielles, qui sont de plus continues ; elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$.

---

(2) Calculer la matrice jacobienne de la composée $f \circ \Phi$.

La fonction f est de classe $\mathscr{D}^2$ donc elle est différentiable. Comme la fonction Φ est elle aussi différentiable, c'est encore le cas de la composée $f \circ \Phi$. On sait que la matrice jacobienne de la composée $f \circ \Phi$ est égale au produit des matrices jacobiennes de f et de Φ respectivement. On commence par calculer la matrice jacobienne de Φ :

$$\mathrm{J}_{(\rho,\theta)}\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} .$$

En utilisant la matrice jacobienne de f

$$\mathrm{J}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} ,$$

on obtient au final

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{(\rho,\theta)}(f \circ \Phi) = \mathrm{J}_{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f \, \mathrm{J}_{(\rho,\theta)}\Phi &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) & -\rho \sin \theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \rho \cos \theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Remarque : Si on écrit $(f \circ \Phi)(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ alors on voit que

$$\frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) .$$

---

(3) Calculer le laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire calculer $(\Delta f) \circ \Phi$ en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $f \circ \Phi$.

On commence par remarquer que la fonction Φ est de la classe $\mathscr{C}^2$ par les mêmes arguments qu'à la question (1). Les dérivées partielles d'ordre 2 de $f \circ \Phi$ existent donc et sont égales à

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\rho^2}(\rho,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial\rho}\right)(\rho,\theta) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right)(\rho,\theta)\\ &= (\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + (\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\rho\partial\theta}(\rho,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial\theta}\right)(\rho,\theta) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right)(\rho,\theta)\\ &= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - \rho\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - \rho(\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) +\\ &\quad \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho(\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ &= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ &\quad \rho\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\theta^2}(\rho,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial\theta}\right)(\rho,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right)(\rho,\theta)\\ &= -\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho^2(\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + -\rho^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ &\quad -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - \rho^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho^2(\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ &= -\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - \rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) - 2\rho^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ &\quad + \rho^2(\sin\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \rho^2(\cos\theta)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\ .\end{aligned}$$

(Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$, on sait que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ et comme la fonction $f\circ\Phi$ est de classe $\mathscr{C}^2$, on sait que $\frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\rho\partial\theta} = \frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\theta\partial\rho}$ par le lemme de Schwarz.) Le laplacien en polaire est donc égal à

$$\begin{aligned}\big((\Delta f)\circ\Phi\big)(\rho,\theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\\ &= \boxed{\frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\rho^2}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(f\circ\Phi)}{\partial\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(f\circ\Phi)}{\partial\theta^2}(\rho,\theta)}\ .\end{aligned}$$

Bonus : Pour aller plus loin, on pourrait s'amuser à calculer le laplacien

$$\Delta f \coloneqq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

d'une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ en *coordonnées sphériques*

$$\begin{array}{rccc}\Psi : & \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ & (\rho,\theta,\varphi) & \mapsto & \big(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\ .\end{array}$$