EXERCICE À RÉDIGER 5

Exercice 1 (Équation différentielle à variables séparées). On considère l'équation différentielle

$$(\star) \qquad y' = y^2 \cos t\ .$$

(1) Que peut-on dire d'une solution qui s'annule en un point ?

On commence par remarquer que l'application $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{F}(t, y) := y^2 \cos t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, car c'est un produit d'applications $\big((t, y) \mapsto y^2$ et $(t, y) \mapsto \cos t\big)$ de classe $\mathscr{C}^1$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz à l'équation différentielle ($\star$). On note ensuite que la fonction constante égale à 0 est solution de l'équation différentielle ($\star$).

Si une solution φ s'annule en un temps t_0, c'est-à-dire $\varphi(t_0) = 0$, alors, par unicité (Théorème de Cauchy–Lipschitz) du problème de Cauchy avec la condition initiale $(t_0, 0)$, la solution φ est égale à la solution constante égale à 0.

---

(2) Déterminer les solutions maximales (en précisant leurs intervalles de définition) du problème de Cauchy associé à ($\star$) pour les conditions initiales suivantes

(a) $y(0) = \frac{1}{2}$

(b) $y(0) = 2$

(c) $y(0) = 0$

ANALYSE. Supposons qu'on ait une solution φ de l'équation différentielle ($\star$), c'est-à-dire

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \cos t\ .$$

Aux valeurs t où $\varphi(t)$ ne s'annule pas, on a

$$-\frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2} = \left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)' = -\cos t\ .$$

Ceci implique que

$$\frac{1}{\varphi(t)} = -\sin t + a \qquad \text{et donc que} \qquad \boxed{\varphi(t) = \frac{1}{-\sin t + a}}\ .$$

SYNTHÈSE. On considère la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{-\sin t + a}\ ;$$

sa dérivée vaut

$$\varphi'(t) = \frac{\cos t}{(-\sin t + a)^2}$$

et on a

$$\big(\varphi(t)\big)^2 \cos t = \frac{\cos t}{(-\sin t + a)^2}\ .$$

Donc la fonction φ vérifie l'équation différentielle ($\star$).

(a) La condition initiale $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ est équivalente à $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $a = 2$. La fonction

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{2 - \sin t}\ , \quad \text{définie sur } \mathbb{R}\ ,}$$

est donc la solution maximale du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle ($\star$) avec condition initiale $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

(b) La condition initiale $\varphi(0) = 2$ est équivalente à $\frac{1}{a} = 2$, c'est-à-dire à $a = \frac{1}{2}$. La fonction

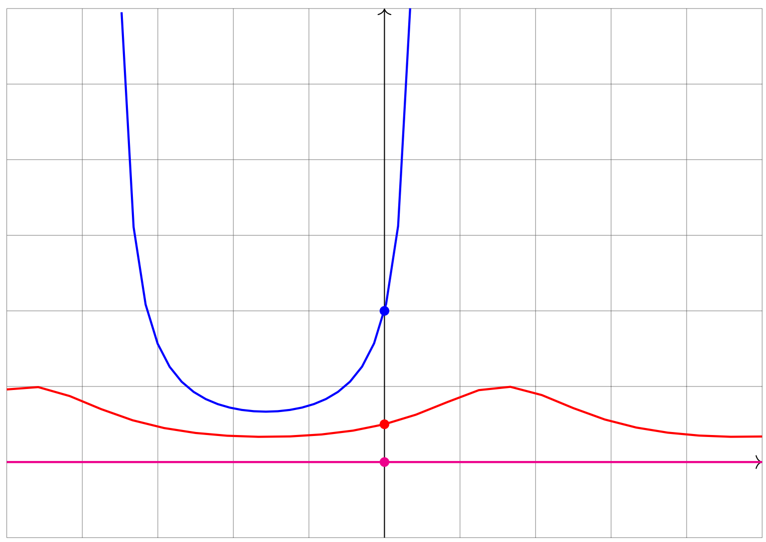
$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \sin t}\,, \quad \text{définie sur } \left]-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[\,,}$$

est donc la solution maximale du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle ($\star$) avec condition initiale $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. (Comme elle tend vers $+\infty$ en $-\frac{4\pi}{3}$ et en $\frac{\pi}{3}$, il est impossible d'avoir une solution définie sur un intervalle strictement plus grand et qui coincide avec φ sur $]-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$.)

(c) La condition initiale $\varphi(0) = 0$ implique que $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, par la question (1).

---

(3) Tracer leurs graphes dans un même repère.



(a) $y(0) = \frac{1}{2}$ (b) $y(0) = 2$ (c) $y(0) = 0$

✍

BONUS. Quand on a le temps, ou avec un ordinateur, on peut s'amuser à tracer les graphes de «toutes» les solutions.