Licence Économie-Gestion | Mathématiques L1
Université de Nice Sophia-Antipolis | Décembre 2004

CONTRÔLE CONTINU

DURÉE : 1 HEURE

VOTRE NUMÉRO D'ÉTUDIANT :

NOM :

PRÉNOM :

DATE DE NAISSANCE :

GROUPE :

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Pour chacune des questions de ce contrôle, vous devez jutifier votre réponse. Vous devez répondre sur la présente feuille et à chaque fois dans l'espace prévu. Cela suppose un travail préalable au brouillon. Ne reportez sur cette feuille que les points essentiels de raisonnement. Aucune page supplémentaire ne sera acceptée ni corrigée. Évitez les ratures.

EXERCICE 1.

On considère la fonction $\left\{\begin{array}{l} f: \quad \mathbb{R}-\{-3\} \rightarrow \mathbb{R}-\{2\} \\ \\ \qquad x \mapsto f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}. \end{array}\right.$

(1) Montrer que la fonction f est bijective.

Correction : Soit $y \in \mathbb{R}-\{2\}$, on cherche à résoudre l'équation, en x,

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+3}=y. \qquad (\xi)$$

Pour $x \neq -3$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+3}=y & \Longleftrightarrow 2x+1=y(x+3) \\ & \Longleftrightarrow x(2-y)=3y-1 \\ & \Longleftrightarrow \boxed{x=\frac{3y-1}{2-y}}. \end{aligned}$$

On en conclut que pour tout $y \in \mathbb{R}-\{2\}$, l'équation (ξ) admet une unique solution. (Si on note $\mathcal{S}_y$ l'ensemble des solutions de (ξ) pour y fixé, on a $\mathcal{S}_y=\left\{\dfrac{3y-1}{2-y}\right\}$).
La fonction f est donc bijective.

(2) Déterminer la fonction réciproque f^{-1}.

Correction : Le calcul précédent donne la fonction réciproque f^{-1}. On a

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} f^{-1}: \quad \mathbb{R}-\{2\} \rightarrow \mathbb{R}-\{-3\} \\ \\ \qquad y \mapsto f^{-1}(y)=\dfrac{3y-1}{2-y}. \end{array}\right.}$$

EXERCICE 2.

Soit O le point de coordonnées $(0,\, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. Posons $A = \mathbb{R}^2 - \{O\}$.

(1) L'ensemble A est-il ouvert ?

Correction : Soit $X \in A$. On a que $X \neq O$. Posons $\epsilon = ||X||$ (norme de X). La boule $B(X,\, \epsilon)$ de centre X et de rayon est ϵ correspond à l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ qui sont à une distance strictement inférieure à $||X||$ de X. Donc O n'appartient pas à cette boule. On a $B(X,\, \epsilon) \subset A$, ce qui montre que $\underline{A \text{ est un ensemble ouvert de } \mathbb{R}^2}$. (D'autres rédactions sont possibles).

(2) L'ensemble A est-il borné ?

Correction : Un ensemble C est borné s'il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout $X \in C$, $||X|| \leq M$. Ici, nous allons montrer que A vérifie le contraire à savoir :

$$\forall M > 0, \quad \exists X \in A, \quad ||X|| > M.$$

Soit $M > 0$, considérons le point $X = (M+1,\, 0)$ de A. On a alors $||X|| = \sqrt{(M+1)^2 + 0^2} = M+1 > M$. On en conclut que $\underline{A \text{ n'est pas un ensemble borné}}$.

(3) Le point de I de coordonnées $(1,\, 1)$ est-il adhérent de A ? Le point O est-il adhérent de A ?

Correction : Le point $I = (1,\, 1)$ appartient à A, $\underline{\text{il est donc adhérent à } A}$.
Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} B(O,\, \epsilon) \cap A &= B(O,\, \epsilon) \cap \left(\mathbb{R}^2 - \{O\}\right) \\ &= B(O,\, \epsilon) - \{O\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Donc $\underline{\text{le point } O \text{ est adhérent à } A}$.

EXERCICE 3.

On considère la fonction $\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,\, y) \mapsto f(x,\, y) = x + y. \end{cases}$

(1) Donner le domaine de définition de f.

Correction : $\underline{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2}$.

(2) Expliquer en une phrase pourquoi la fonction f est continue.

Correction : $\underline{\text{La fonction } f \text{ est polynômiale, donc elle est continue sur } \mathbb{R}^2}$.

On pose $E = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, x^2 + 4y^2 = 1\}$.

(3) A quoi correspond l'ensemble E ? Représenter le graphiquement.

Correction : L'ensemble E est une <u>ellipse</u> de centre O, d'axes celui des abscisses et celui des ordonnées et passant par les points $(0,\, 1)$ et $(\frac{1}{2},\, 0)$.

(4) Montrer que E est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.

Correction :

• Considérons la fonction $g(x,\, y) = x^2 + 4y^2$ qui polynômiale donc <u>continue</u>. Soit le sous-ensemble <u>fermé</u> $F = \{1\}$ de $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble E est égal à l'ensemble $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^4 \in \{1\}\}$=$\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,\, y) \in F\}$=$g^{-1}(F)$. On sait que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. <u>On a donc que E est fermé</u>.

• Soit $X = (x, y)$ un point de E. De $x^2 + 4y^2 = 1$, on tire $x^2 = 1 - 4y^2 \leq 1$ et $y^2 = \dfrac{1}{4}(1 - x^2) \leq \dfrac{1}{4}$. D'où,

$$||X|| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc pour tout point X de E, on a $||X|| \leq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ce qui montre que <u>E est borné</u>.

(5) Donner le théorème (du cours) qui permet d'affirmer que la restriction $f_{|E}$ d'une fonction f à un sous-ensemble E de son domaine de définition admet un maximum et un minimum et qu'ils sont atteints.

Correction : La restriction $f_{|E}$ d'une fonction f <u>continue</u> sur un ensemble E <u>fermé et borné</u> admet un maximum et un minimum qui sont atteints.

(6) On note M ce maximum. Calculer M et déterminer en quel point de E la valeur M est-elle atteinte ?

Correction : Pour chercher le maximum de f sur E, il suffit de considérer les points $X = (x, y)$ de E à coordonnées positives. On va se ramener à un problème à une seule variable. Soit X un point de E, on a $x^2 + 4y^2 = 1$, d'où $x^2 = 1 - 4y^2$. Comme $x \geq 0$, on a $x = \sqrt{1 - 4y^2}$. L'image de X par la fonction f vaut donc $f(x, y) = \sqrt{1 - 4y^2} + y$.

Posons $\underline{g(y) = y + \sqrt{1 - 4y^2}}$ cette fonction de $[0, \dfrac{1}{2}]$ vers $\mathbb{R}$ que nous allons étudier.

La dérivée de la fonction g vaut $g'(y) = 1 - \dfrac{4y}{\sqrt{1 - 4y^2}}$. On a

$$\begin{aligned}
g'(y) \geq 0 \quad &\iff \quad 1 \geq \frac{4y}{\sqrt{1 - 4y^2}} \\
&\iff \quad \sqrt{1 - 4y^2} \geq 4y \\
&\iff \quad 1 - 4y^2 \geq 16y^2 \\
&\iff \quad 20y^2 \leq 1 \\
&\iff \quad y \leq \frac{\sqrt{5}}{10}.
\end{aligned}$$

On en conclut le tableau de variation suivant

x	0		$\frac{\sqrt{5}}{10}$		$\frac{1}{2}$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	

En conclusion, le maximum M vaut $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$ et est atteint au point de coordonnées $\boxed{\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{10}\right)}$.