EXAMEN PARTIEL

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée (hors question de cours) ne recevra aucun point. L'utilisation de tout appareil électronique (calculatrice, téléphone) est interdit.

Exercice 1 (Questions de cours).

(1) Donner une description de l'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble A d'un espace vectoriel normé (E, N) utilisant la notion de suite. (On ne demande pas de démonstration, juste l'énoncé.)

(2) Soit $f : (E, \mathrm{N}_E) \to (F, \mathrm{N}_F)$ une application continue entre espaces vectoriels normés et soit $K \subset E$ un ensemble compact de E. Montrer que l'image $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ de K par f est un ensemble compact de F.

✍

Exercice 2 (Topologie). Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soient A et B des sous-ensembles de E. On note

$$A + B \coloneqq \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\} .$$

(1) Si A est ouvert (et B quelconque), montrer que $A + B$ est ouvert.

(2) Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé.

✍

Exercice 3 (Continuité). On considère l'application$f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) \coloneqq \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} , \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) , \quad \text{et par} \quad f(0, 0) \coloneqq 0 .$$

(1) L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$?

(2) L'application f est-elle continue en $(0, 0)$?

✍

Exercice 4 (Normes). On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on considère

$$\mathrm{N}_1(P) \coloneqq \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_2(P) \coloneqq \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| .$$

On admettra que N_1 est une norme.

(1) Montrer que N_2 est une norme.

(2) Est-ce que les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes ?

On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\Delta(P(X)) \coloneqq P(X) - P(1 - X)$.

(3) L'application Δ est-elle continue pour la norme N_1 ?

(4) L'application Δ est-elle continue pour la norme N_2 ?

✍

Exercice 5 (Distance). Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour tout $x \in E$, on définit la *distance* de x à F par

$$\mathrm{d}(x, F) \coloneqq \inf_{y \in F} \mathrm{N}(x - y) .$$

Montrer que pour tout $x \in E$, cette distance de x à F est atteinte, c'est-à-dire

$$\exists y \in F,\ \mathrm{d}(x, F) = \mathrm{N}(x - y) .$$