SUJET MAISON : CORRIGÉ

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

✍

Exercice 1 (Théorème du point fixe). Soit (E, N) un espace vectoriel normé complet et soit $f : E \to E$ une contraction, c'est-à-dire une application telle que

$$\exists C \in]0,1[\ , \ \forall (x,y) \in E^2\ , \qquad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leqslant C\mathrm{d}(x,y)\ .$$

Montrer que l'application f admet un unique point fixe, c'est-à-dire une unique solution $x \in E$ à l'équation

$$f(x) = x\ .$$

INDICATION : On pourra considérer la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ des itérations de la fonction f.

Soit $x_0 \in E$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_{n+1} := x_n$, pour $n \geqslant 0$; dit autrement, on a

$$x_n = f^n(x_0) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}})(x_0)\ .$$

Nous allons montrer que cette suite est de Cauchy ; pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(x_n, x_0) = \mathrm{d}(f^n(x_0), x_0) &\leqslant \mathrm{d}\left(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)\right) + \mathrm{d}\left(f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0)\right) + \cdots + \mathrm{d}(f(x_0), x_0) \\ &\leqslant \left(C^{n-1} + C^{n-2} + \cdots + C + 1\right) \mathrm{d}(x_1, x_0) \leqslant \frac{1}{1-C}\mathrm{d}(x_1, x_0)\ .\end{aligned}$$

On peut maintenant majorer $\mathrm{d}(x_n, x_m)$, pour $n \geqslant m$:

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) = \mathrm{d}(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leqslant C^m \mathrm{d}\left(f^{n-m}(x_0), x_0\right) \leqslant C^m \frac{1}{1-C}\mathrm{d}(x_1, x_0)\ .$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, comme la suite $\left(C^m \frac{1}{1-C}\mathrm{d}(x_1, x_0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant N$, on a

$$C^m \frac{1}{1-C}\mathrm{d}(x_1, x_0) < \varepsilon\ .$$

Donc, pour tout $n, m \geqslant N$, on a $\mathrm{d}(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme l'espace vectoriel normé (E, N) est complet, cette suite converge vers une limite $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Comme l'application f est lipschitzienne, elle est continue et la caractérisation de cette propriété avec les suites donne :

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = x\ ,$$

c'est-à-dire que x est un point fixe de l'application f.

Il reste à montrer l'unicité d'un tel point fixe. Soient x et y deux points fixes, i.e. $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Comme l'application f est une contraction, on a

$$\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leqslant C\mathrm{d}(x,y)\ .$$

Ceci implique que $\mathrm{d}(x,y) = 0$ et donc que $x = y$.

✍

Exercice 2 (L'espace vectoriel normé des matrices). On considère l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients réels.

(1) **Montrer que, pour toute norme N de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que**

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\ , \quad \mathrm{N}(AB) \leqslant c\mathrm{N}(A)\mathrm{N}(B)\ .$$

Il suffit de le montrer pour une norme et d'utiliser l'équivalence des normes en dimension finie. On considère la norme "infinie" $\|A\|_\infty \coloneqq \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$ qui vérifie

$$\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty\ .$$

Comme l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes, donc il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\ , \quad \alpha\mathrm{N}(A) \leqslant \|A\|_\infty \leqslant \beta\mathrm{N}(A)\ .$$

Ceci donne au final :

$$\mathrm{N}(AB) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|AB\|_\infty \leqslant \frac{n}{\alpha}\|A\|_\infty\|B\|_\infty \leqslant \frac{n\beta^2}{\alpha}\mathrm{N}(A)\mathrm{N}(B)\ .$$

On considère l'application $\|-\| : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\|A\| \coloneqq \sqrt{\mathrm{tr}\left({}^tAA\right)}$.

(2) **Montrer que l'application $\|-\|$ définit une norme.**

On commence par remarquer que

$$\|A\|^2 = \mathrm{tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2\ .$$

Cette norme est donc égale à la "norme 2" sur l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vu comme isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$.

---

(3) **Montrer que**

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\ , \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|\ .$$

On commence par rappeler que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ implique

$$\left(\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n\right)^2 \leqslant (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2)\ .$$

L'application de cette inégalité donne

$$\|AB\|^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{lj}^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} a_{ij}^2\, b_{kl}^2 = (\|A\|\|B\|)^2\ .$$

---

(4) **Montrer que l'application trace $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.**

L'application trace est un application linéaire depuis un espace vectoriel de dimension finie, elle est donc continue pour toute norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, par théorème du cours.

---

(5) **Montrer que l'application produit $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est continue quelque soit les norme considérées sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.**

Les deux espaces vectoriels $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont de dimension finie, on peut donc considérer n'importe quelle norme car ces dernières y sont équivalentes. On va utiliser ici la norme $\|-\|$ introduite dans l'énoncé. Soient $A^{(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} A$ et $B^{(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} B$ deux suites convergentes de matrices. Comme elles sont convergentes, elles sont bornées : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left\|A^{(m)}\right\| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad \left\|B^{(m)}\right\| \leqslant \beta\ .$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left\|AB - A^{(m)}B^{(m)}\right\| = \left\|\left(AB - AB^{(m)}\right) - \left(AB^{(m)} - A^{(m)}B^{(m)}\right)\right\| &\leqslant \left\|\left(AB - AB^{(m)}\right)\right\| + \left\|\left(AB^{(m)} - A^{(m)}B^{(m)}\right)\right\| \\ &= \left\|A\left(B - B^{(m)}\right)\right\| + \left\|\left(A - A^{(m)}\right)B^{(m)}\right\| \\ &\leqslant \|A\|\left\|B - B^{(m)}\right\| + \left\|A - A^{(m)}\right\|\left\|B^{(m)}\right\| \\ &\leqslant \alpha\left\|B - B^{(m)}\right\| + \beta\left\|A - A^{(m)}\right\|\ .\end{aligned}$$

Le membre de droite tendant vers 0 lorsque m tend vers l'infini, la norme $\|AB - A^{(m)}B^{(m)}\|$ tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Ceci montre que l'application «produit de matrices» est continue pour toute norme considérée.

---

(6) **Montrer que l'application determinant $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.**

Comme les deux espaces vectoriels $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ sont de dimension finie, on peut considérer n'importe quelle norme ; ici on va utiliser la norme «infinie» N_∞ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On commence par remarquer que chaque application «coordonnées» $M = \left(m_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto m_{ij}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ est linéaire et continue, car $|m_{ij}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(M)$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. On en déduit que l'application de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^{n^2}$ définie par $M \mapsto \left(m_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est continue. L'application «déterminant» est la composée de cette application par l'application polynomiale définie par

$$\left(m_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) m_{1,\sigma(1)} \ldots m_{n,\sigma(n)} \ .$$

Cette dernière étant continue, on en déduit la continuité de l'application «déterminant».

---

(7) **Montrer que le sous-ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille $n\times n$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.**

Le sous-ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}*$ par l'application continue determinant, i.e.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R}*) \ .$$

C'est donc un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

---

(8) **Montrer que l'application inverse $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est continue.**

On va utiliser la formule suivante donnant l'inverse d'une matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com} A \ ,$$

où $\mathrm{Com}A$ est la comatrice de A définie par

$$(\mathrm{Com}A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det\left(\overline{A}_{ij}\right) \ ,$$

avec $\overline{A}_{ij}$ la matrice extraite obtenue à partir de A en supprimant la i^{e} ligne et la j^{e} colonne. Les applications «transposée» et «matrice extraite» $A \mapsto \overline{A}_{ij}$, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sont linéaires et donc continues car l'espace vectoriel de départ $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. L'application «inverse» apparait donc comme la composée d'applications continues, elle est donc continue.

---

(9) **Montrer que pour toute matrice A vérifiant $\|A\| < 1$, la matrice $I - A$ est inversible.**

Si on essaie de trouver l'inverse de A à la main, on tombe surement sur le calcul suivant

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^n) = I - A^{n+1} \ ,$$

que l'on a envie de faire tendre vers $n \to +\infty$. On considère la suite

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k$$

dont on cherche à montrer qu'elle est convergente. Comme l'espace vectoriel normé $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices est de dimension finie, il est complet ; il suffit donc de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour cela, on calcule

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k \right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \left\|A^k\right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \leqslant \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|} \ ,$$

pour $n > m$. Comme $\|A\| < 1$, on a $\|A\|^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists N \in \mathbb{N} \ , \quad \forall m \geqslant N \ , \quad \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|} < \varepsilon \ .$$

On a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists N \in \mathbb{N} \ , \quad \forall n, m \geqslant N \ , \quad \|S_n - S_m\| < \varepsilon \ .$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc elle converge vers une limite notée $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Il reste à montrer que

$$(I - A)\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = I \ .$$

On commence par remarquer que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme l'application «produit de matrices» est continue par la question (5) et comme l'application $M \mapsto I - M$ est continue car 1-lipschtizienne, on a

$$(I - A)\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \lim_{n\to+\infty}(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^n) = \lim_{n\to+\infty}\left(I - A^{n+1}\right) = I - \lim_{n\to+\infty} A^{n+1} = I \ .$$

✍