EXAMEN

JEUDI 21 DÉCEMBRE 2017

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

Les notes de cours sont autorisées. Tout le reste, incluant les téléphones portables, est interdit.

✍

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Pour $n \geqslant 1$, on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{P}(n) := \mathbb{K}\{e_n^1, \ldots, e_n^n\}$ de dimension n engendré par les $e_n^1, \ldots, e_n^n$. On pose $\mathcal{P}(0) := 0$. On les munit de l'action naturelle à droite du groupe symétrique donnée par

$$\left(e_n^k\right)^\sigma := e_n^{\sigma^{-1}(k)}\ , \quad \text{pour} \quad \sigma \in \mathbb{S}_n\ .$$

On définit les produits de composition partiels par la formule

$$e_n^k \circ_i e_m^l := \begin{cases} e_{n+m-1}^{k+m-1} & \text{si} \quad i < k\ , \\ e_{n+m-1}^{k+l-1} & \text{si} \quad i = k\ , \\ e_{n+m-1}^{k} & \text{si} \quad i > k\ . \end{cases}$$

(1) Vérifiez l'axiome séquentiel et un des deux axiomes d'équivariance pour la structure d'opérade (symétrique) de $\mathcal{P} := \left(\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \circ_i, e_1^1\right)$.

(2) Quelle est l'opérade non-symétrique obtenue à partir de $\mathcal{P}$ après oubli de l'action des groupes symétriques ?

(3) On note par e_n l'élément de base d'arité n de l'opérade Com qui code les algèbres commutatives. Montrer que l'application $\mathcal{P} \to \mathrm{Com}$ définie par $e_n^i \mapsto e_n$ est un morphisme d'opérades.

On rappelle que l'opérade (symétrique) Ass est définie par les représentations régulières des groupes symétriques $\mathrm{Ass}(n) := \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ munies des produits de composition partiel $\sigma \circ_i \tau$ définis par

pour $1 \leqslant n \leqslant i-1$:

$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \begin{cases} \sigma(n) & \text{si } \ \sigma(n) < \sigma(i)\ , \\ \sigma(n) + l - 1 & \text{si } \ \sigma(n) > \sigma(i)\ , \end{cases}$$

pour $i \leqslant n \leqslant i+l-1$:

$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \tau(n-i+1) + \sigma(i) - 1\ ,$$

pour $i+l \leqslant n \leqslant k+l-1$:

$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \begin{cases} \sigma(n-l+1) & \text{si } \ \sigma(n-l+1) < \sigma(i)\ , \\ \sigma(n-l+1) + l - 1 & \text{si } \ \sigma(n-l+1) > \sigma(i)\ , \end{cases}$$

pour $\sigma \in \mathbb{S}_k$ et $\tau \in \mathbb{S}_l$.

(4) Montrer que l'application $\mathrm{Ass} \to \mathcal{P}$ définie par $\sigma \mapsto e_n^{\sigma^{-1}(1)}$ est un morphisme d'opérades.

Une algèbre *permutative* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\diamond\ :\ A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (z \diamond y)\ .$$

On note Perm l'opérade quadratique codant ce type d'algèbres.

(5) Donner un morphisme non-trivial d'opérades $\mathrm{Perm} \to \mathcal{P}$.

(6) Décrire l'algèbre permutative libre $\mathrm{Perm}(V)$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.

(7) Donner un isomorphisme d'opérades $\mathrm{Perm} \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}$.

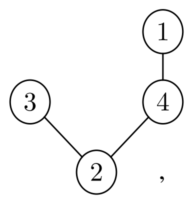
(8) Retrouver les résultats des questions (3) et (4) directement avec la présentation quadratique de Perm.

On rappelle qu'une algèbre pré-Lie est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\star\ :\ A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant

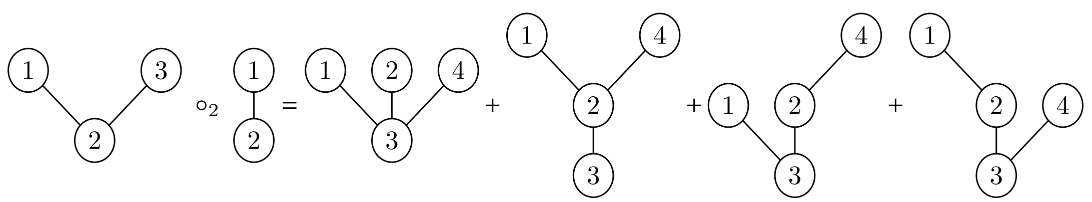
$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (x \star z) \star y - x \star (z \star y)\ .$$

(9) Calculer l'opérade duale de Koszul de l'opérade Perm et montrer qu'il s'agit de l'opérade PreLie qui code les algèbres pré-Lie.

On rappelle que l'opérade PreLie admet pour base les arbres enracinés à n sommets de la forme



où le sommet le plus en bas est la racine. La composition opéradique partielle $t \circ_i s$ est donnée par l'insertion de l'arbre s à la place du i^{e} sommet de l'arbre t. Les sous-arbres se trouvant attachés au-dessus du i^{e} sommet de t sont recollés de toutes les manières possible sur les sommets de l'arbre s :



(10) Décrire la partie d'arité 3 du complexe de Koszul $(\mathrm{PreLie}^{¡} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)$.

(11) Montrer que le complexe de chaînes $(\mathrm{PreLie}^{¡} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)$ est acyclique.

On admettra pour l'instant que les opérades Perm et PreLie sont de Koszul.

(12) Décrire la notion d'algèbre pré-Lie à homotopie sur un corps de caractéristique 2, c'est-à-dire à signe près.

Question Bonus. Montrer que les opérades Perm et PreLie sont de Koszul.