CORRIGÉ

EXAMEN DU JEUDI 21 DÉCEMBRE 2017

✍

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Pour $n \geqslant 1$, on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{P}(n) := \mathbb{K}\{e_n^1, \ldots, e_n^n\}$ de dimension n engendré par les $e_n^1, \ldots, e_n^n$. On pose $\mathcal{P}(0) := 0$. On les munit de l'action naturelle à droite du groupe symétrique donnée par

$$\left(e_n^k\right)^\sigma := e_n^{\sigma^{-1}(k)} , \quad \text{pour} \quad \sigma \in \mathbb{S}_n .$$

On définit les produits de composition partiels par la formule

$$e_n^k \circ_i e_m^l := \begin{cases} e_{n+m-1}^{k+m-1} & \text{si} \quad i < k , \\ e_{n+m-1}^{k+l-1} & \text{si} \quad i = k , \\ e_{n+m-1}^{k} & \text{si} \quad i > k . \end{cases}$$

(1) Vérifiez l'axiome séquentiel et un des deux axiomes d'équivariance pour la structure d'opérade (symétrique) de $\mathcal{P} := \left(\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \circ_i, e_1^1\right)$.

Pour $i \leqslant j \leqslant i+m-1$, on calcule d'abord $(e_n^k \circ_i e_m^l) \circ_j e_p^o$ qui, en fonction des cas, vaut :

pour $k < i$: $e_{n+m+p-2}^{k}$,

pour $k > i$: $e_{n+m+p-2}^{k+m+p-2}$,

pour $k = i$:

- pour $j < k+l-1$: $e_{n+m+p-2}^{k+l+p-2}$,
- pour $j = k+l-1$: $e_{n+m+p-2}^{k+l+o-2}$,
- pour $j > k+l-1$: $e_{n+m+p-2}^{k+l-1}$.

On fait de même avec $e_n^k \circ_i (e_m^l \circ_{j-i+1} e_p^o)$ qui, en fonction des cas, vaut :

pour $k < i$: $e_{n+m+p-2}^{k}$,

pour $k > i$: $e_{n+m+p-2}^{k+m+p-2}$,

pour $k = i$:

- pour $j-k+1 < l$: $e_{n+m+p-2}^{k+l+p-2}$,
- pour $j-k+1 = l$: $e_{n+m+p-2}^{k+l+o-2}$,
- pour $j-k+1 > l$: $e_{n+m+p-2}^{k+l-1}$.

L'axiome séquentiel est donc vérifié.

Soit $\sigma \in \mathbb{S}_m$. On calcule d'abord $e_n^k \circ_i \left(e_m^l\right)^\sigma := e_n^k \circ_i e_m^{\sigma^{-1}(l)}$ qui, en fonction des cas, vaut :

pour $k < i$: e^k_{n+m-1} ,

pour $k = i$: $e^{k+\sigma^{-1}(l)-1}_{n+m-1}$,

pour $k > i$: e^{k+m-1}_{n+m-1} .

On considère la permutation $\widetilde{\sigma} \in \mathbb{S}_{n+m-1}$ définie par :

pour $x < i$: $\widetilde{\sigma}(x) = x$,

pour $i \leqslant x \leqslant i+m-1$: $\widetilde{\sigma}(x) = \sigma(x-i+1)+i-1$,

pour $x > i+m-1$: $\widetilde{\sigma}(x) = x$.

On calcule ensuite $\left(e^k_n \circ_i e^l_m\right)^{\widetilde{\sigma}}$ qui, en fonction des cas, vaut :

pour $k < i$: $\left(e^k_{n+m-1}\right)^{\widetilde{\sigma}} = e^{\widetilde{\sigma}^{-1}(k)}_{n+m-1} = e^k_{n+m-1}$,

pour $k = i$: $\left(e^{k+l-1}_{n+m-1}\right)^{\widetilde{\sigma}} = e^{\widetilde{\sigma}^{-1}(k+l-1)}_{n+m-1} = e^{\sigma^{-1}(l)+k-1}_{n+m-1}$,

pour $k > i$: $\left(e^{k+m-1}_{n+m-1}\right)^{\widetilde{\sigma}} = e^{\widetilde{\sigma}^{-1}(k+m-1)}_{n+m-1} = e^{k+m-1}_{n+m-1}$.

---

(2) Quelle est l'opérade non-symétrique obtenue à partir de $\mathcal{P}$ après oubli de l'action des groupes symétriques ?

L'opérade non-symétrique obtenue à partir de $\mathcal{P}$ après oubli de l'action des groupes symétriques est l'opérade Dias qui code les algèbres diassociatives.

---

(3) On note par e_n l'élément de base d'arité n de l'opérade Com qui code les algèbres commutatives. Montrer que l'application $\mathcal{P} \to \mathrm{Com}$ définie par $e^i_n \mapsto e_n$ est un morphisme d'opérades.

On note f cette application. Elle préserve les produits de composition partiels :

$$\begin{tikzcd} e^k_n \otimes e^l_m \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\circ_i"] & e_n \otimes e_m \arrow[d, "\circ_i"] \\ e^x_{n+m-1} \arrow[r, "f"] & e_{n+m-1} \end{tikzcd} .$$

Et elle préserve les actions des groupes symétriques :

$$\begin{tikzcd} e^k_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, ".\sigma"] & e_n \arrow[d, ".\sigma"] \\ e^{\sigma^{-1}(k)}_n \arrow[r, "f"] & e_n \end{tikzcd} .$$

On rappelle que l'opérade (symétrique) Ass est définie par les représentations régulières des groupes symétriques $\mathrm{Ass}(n) := \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ munies des produits de composition partiel $\sigma \circ_i \tau$ définis par

pour $1 \leqslant n \leqslant i-1$:

$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \begin{cases} \sigma(n) & \text{si } \sigma(n) < \sigma(i) , \\ \sigma(n)+l-1 & \text{si } \sigma(n) > \sigma(i) , \end{cases}$$

pour $i \leqslant n \leqslant i+l-1$:

$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \tau(n-i+1)+\sigma(i)-1 ,$$

pour $i+l \leqslant n \leqslant k+l-1$:

$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \begin{cases} \sigma(n-l+1) & \text{si } \sigma(n-l+1) < \sigma(i) , \\ \sigma(n-l+1)+l-1 & \text{si } \sigma(n-l+1) > \sigma(i) , \end{cases}$$

pour $\sigma \in \mathbb{S}_k$ et $\tau \in \mathbb{S}_l$.

(4) Montrer que l'application $\mathrm{Ass} \to \mathcal{P}$ définie par $\sigma \mapsto e^{\sigma^{-1}(1)}_n$ est un morphisme d'opérades.

On note g cette application. Elle préserve les actions des groupes symétriques :

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r, "g"] \arrow[d, ".\tau"] & e_n^{\sigma^{-1}(1)} \arrow[d, ".\tau"] \\
\sigma\tau \arrow[r, "g"] & e_n^{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))}
\end{tikzcd} .$$

Pour montrer qu'elle préserve les produits de composition partiels, il suffit de vérifier que les deux quantités suivantes sont égales :

$$g(\sigma) \circ_i g(\tau) = e_n^{\sigma^{-1}(1)} \circ_i e_m^{\tau^{-1}(1)} \qquad \text{et} \qquad g(\sigma \circ_i \tau) = e_{n+m-1}^{(\sigma\circ_i\tau)^{-1}(1)} ,$$

pour $\sigma \in \mathbb{S}_n$ et $\tau \in \mathbb{S}_m$. On calcule ces deux valeurs dans les trois cas :

pour $i < \sigma^{-1}(1)$ **:** la première vaut $e_{n+m-1}^{\sigma^{-1}(1)+m-1}$ et la seconde vaut $e_{n+m-1}^{\sigma^{-1}(1)+m-1}$,

pour $i = \sigma^{-1}(1)$ **:** la première vaut $e_{n+m-1}^{\tau^{-1}(1)+i-1}$ et la seconde vaut $e_{n+m-1}^{\tau^{-1}(1)+i-1}$,

pour $i > \sigma^{-1}(1)$ **:** la première vaut $e_{n+m-1}^{\sigma^{-1}(1)}$ et la seconde vaut $e_{n+m-1}^{\sigma^{-1}(1)}$.

Une algèbre *permutative* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\diamond \ : \ A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (z \diamond y) \ .$$

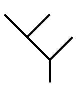
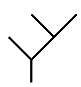
On note Perm l'opérade quadratique codant ce type d'algèbres.

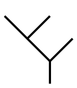
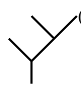
(5) Donner un morphisme non-trivial d'opérades $\mathrm{Perm} \to \mathcal{P}$.

On considère l'unique morphisme d'opérades $h : \mathcal{T}\left(\curlyvee, \curlyvee^{(12)}\right) \to \mathcal{P}$ caractérisé par

$$\curlyvee \mapsto e_2^1 \qquad \text{et} \qquad \curlyvee^{(12)} \mapsto e_2^2 ,$$

où on note opéradiquement l'opération $\diamond$ par $\curlyvee$. Pour montrer qu'il induit un morphisme d'opérades $\widetilde{h} : \mathrm{Perm} \to \mathcal{P}$, il suffit de montrer que les relations de l'opérade Perm sont envoyées sur 0 par h :

 $-$  $= \curlyvee \circ_1 \curlyvee - \curlyvee \circ_2 \curlyvee \mapsto e_2^1 \circ_1 e_2^1 - e_2^1 \circ_2 e_2^1 = e_3^1 - e_3^1 = 0$ et

 $-$  $^{(23)} = \curlyvee \circ_1 \curlyvee - \curlyvee \circ_2 \curlyvee^{(12)} \mapsto e_2^1 \circ_1 e_2^1 - e_2^1 \circ_2 e_2^2 = e_3^1 - e_3^1 = 0$.

---

(6) Décrire l'algèbre permutative libre $\mathrm{Perm}(V)$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.

On considère le module $\bigoplus_{n\geqslant 1} V \otimes S^{n-1}(V)$, où $S^k(V) := V^{\otimes k}/_{\mathbb{S}_k}$ est l'espace des polynômes symétriques homogènes de degré k. On note ses éléments sous la forme $x\overline{x_1 \cdots x_k}$. On le munit du produit bilinéaire $\diamond$ défini par

$$x\overline{x_1 \cdots x_k} \diamond y\overline{y_1 \cdots y_l} := x\overline{x_1 \ldots x_k y y_1 \ldots y_l} ,$$

dont on vérifie qu'il satisfait les relations d'une algèbre permutative :

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (z \diamond y) = x\overline{x_1 \ldots x_k y y_1 \ldots y_l z z_1 \cdots z_m} \ .$$

Il reste à montrer que cette algèbre permutative est libre sur le module V. Soit $\varphi : V \to (A, \diamond)$ une application vers une algèbre permutative. Supposons qu'il existe une extension $\widetilde{\varphi}$ de φ en morphisme d'algèbres permutatives :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & \bigoplus_{n\geqslant 1} V \otimes S^{n-1}(V) \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ & A \,. \end{tikzcd}$$

On montre que nécessairement

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(x\overline{x_1\cdots x_k}) &= \widetilde{\varphi}(x \diamond (x_1 \diamond (\cdots (x_{k-1} \diamond x_k)\cdots))) = \varphi(x) \diamond (\varphi(x_1) \diamond (\cdots (\varphi(x_{k-1}) \diamond \varphi(x_k))\cdots)) \\ &= \varphi(x)\diamond\varphi(x_1)\diamond\cdots\varphi(x_{k-1})\diamond\varphi(x_k) \,. \end{aligned}$$

Réciproquement, une telle formule est bien définie dans l'algèbre permutative A, car symétrique en $\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_k)$: on montre, par une récurrence facile que dans toute algèbre permutative, on a

$$a\diamond a_1\diamond\cdots\diamond a_k = a\diamond a_{\sigma(1)}\diamond\cdots\diamond a_{\sigma(k)} \,,$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathbb{S}_k$. Il reste à montrer que si on définit l'application $\widetilde{\varphi}$ ainsi, alors c'est un morphisme d'algèbres permutatives :

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(x\overline{x_1\cdots x_k} \diamond y\overline{y_1\cdots y_l}) &= \widetilde{\varphi}(x\overline{x_1\cdots x_k y y_1\cdots y_l}) = \varphi(x)\diamond\varphi(x_1)\diamond\cdots\varphi(x_k)\diamond\varphi(y)\diamond\varphi(y_1)\diamond\cdots\diamond\varphi(y_l) \\ &= \widetilde{\varphi}(x\overline{x_1\cdots x_k})\diamond\widetilde{\varphi}(y\overline{y_1\cdots y_l}) \,. \end{aligned}$$

---

(7) **Donner un isomorphisme d'opérades $\mathrm{Perm} \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}$.**

On montre que le morphisme d'opérades $\widetilde{h} : \mathrm{Perm} \to \mathcal{P}$ de la question (5) est un isomorphisme. Le morphisme $h : \mathcal{T}\left(\curlyvee, \curlyvee^{(12)}\right) \to \mathcal{P}$ est surjectif :

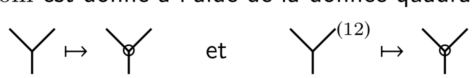
$$\begin{aligned} e_n^k &= \underbrace{e_2^1 \circ_1 (e_2^1 \circ_1 \cdots (e_2^1}_{n-k \text{ fois } e_2^1} \circ_1 (e_2^2 \circ_1 \underbrace{e_2^1(\circ_1 \cdots (e_2^1 \circ_1 e_2^1}_{k-2 \text{ fois } e_2^1})\cdots) \\ &= h\left(\underbrace{\curlyvee \circ_1 (\curlyvee \circ_1 \cdots (\curlyvee}_{n-k \text{ fois } \curlyvee} \circ_1 (\curlyvee^{(12)} \circ_1 \underbrace{\curlyvee(\circ_1 \cdots (\curlyvee \circ_1 \curlyvee}_{k-2 \text{ fois } \curlyvee})\cdots) \right) . \end{aligned}$$

Donc le morphisme $\widetilde{h}$ est surjectif. Or, le calcul de l'algèbre permutation libre effectué à la question précédente montre que $\dim \mathrm{Perm}(n) = n = \dim \mathcal{P}(n)$, ce qui conclut la question.

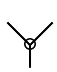
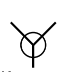
---

(8) **Retrouver les résultats des questions (3) et (4) directement avec la présentation quadratique de Perm.**

Le morphisme $f : \mathrm{Perm} \to \mathrm{Com}$ est donné à l'aide de la donnée quadratique par



et le morphisme $g : \mathrm{Ass} \to \mathrm{Perm}$ est donné à l'aide de la donnée quadratique par

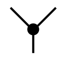
où  et  note respectivement les générateurs des opérades Com et Ass. On vérifie que les relations de l'opérade de gauche sont envoyées sur 0. XXXXXX

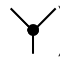
On rappelle qu'une algèbre pré-Lie est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une opération binaire $\star : A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant

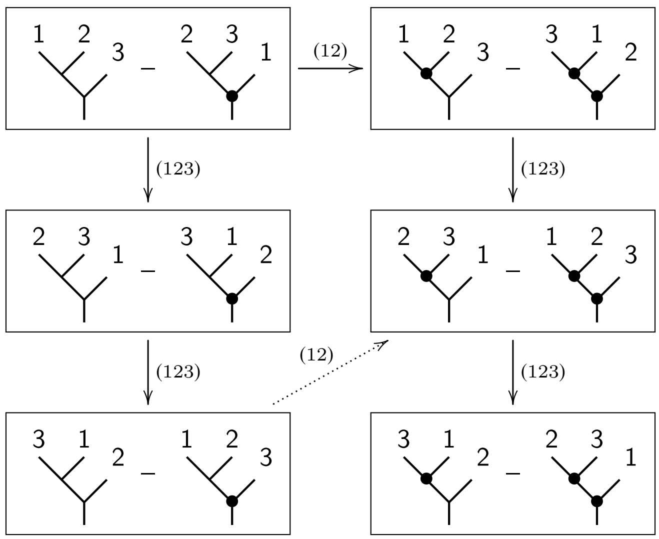
$$(x \star y) \star z - x \star (y \star z) = (x \star z) \star y - x \star (z \star y)\ .$$

(9) Calculer l'opérade duale de Koszul de l'opérade Perm et montrer qu'il s'agit de l'opérade PreLie qui code les algèbres pré-Lie.

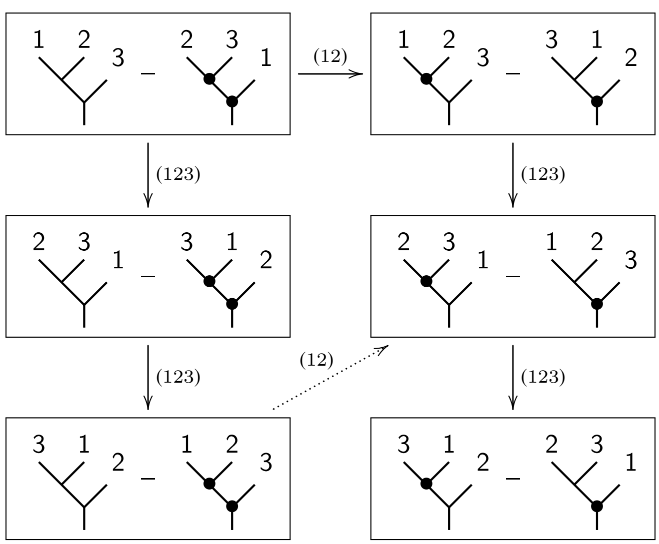
L'opérade binaire quadratique Perm est engendrée linéairement par deux opérations que l'on note respectivement par

 et  $:= \Big($  $\Big)^{(12)}$.

Le $\mathbb{K}[\mathbb{S}_3]$-module des relations $\mathrm{R}_{\mathrm{Perm}}$ dans $\mathcal{T}\Big($ ,  $\Big)(3)$ est engendré sur $\mathbb{K}$ par

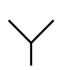
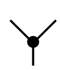


et

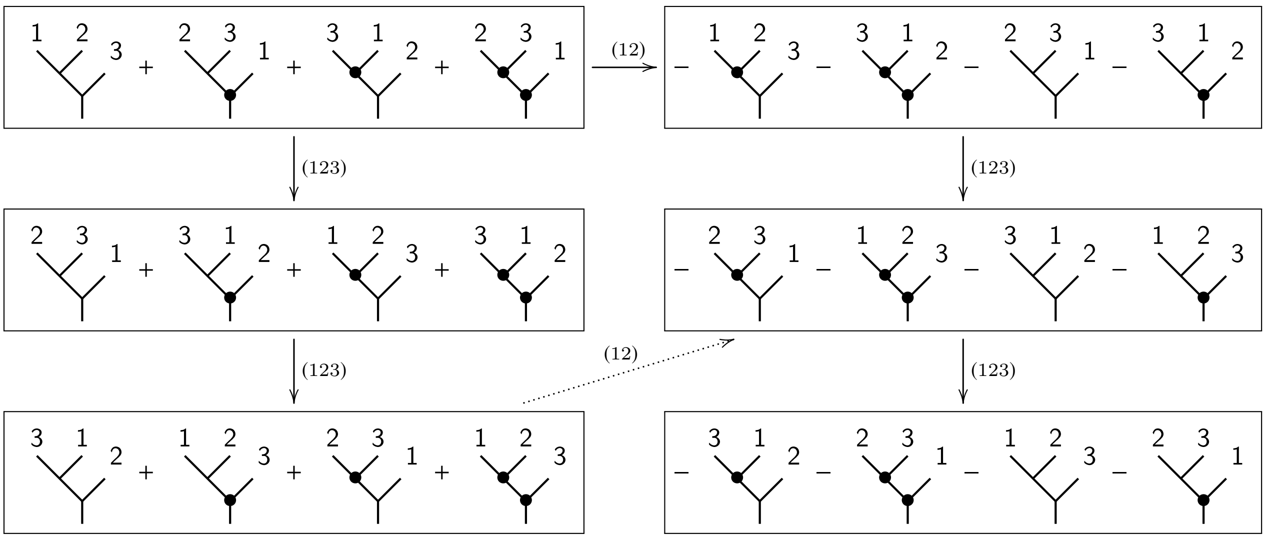


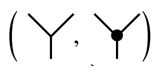
Il admet donc pour base les six premiers éléments et les trois éléments qui forment la première colonne du bas ; il est donc de dimension $\dim \mathrm{R}_{\mathrm{Perm}} = 9$.

On considère l'opérade binaire quadratique $\mathcal{PL}$ engendrée linéairement par deux opérations que l'on note respectivement par

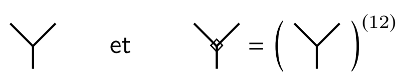
 et  $= -\Big($  $\Big)^{(12)}$,

avec pour relations le $\mathbb{S}_3$-module $\mathrm{R}_{\mathcal{PL}}$ engendré linéairement par



Il admet donc pour base les trois éléments qui forment la première colonne ; il est donc de dimension $\dim \mathrm{R}_{\mathcal{PL}} = 3$.
On vérifie les 9*3=27 calculs qui montrent que $\mathrm{R}_{\mathcal{PL}} = \mathrm{R}_{\mathrm{Perm}}^{\perp}$ pour le produit scalaire défini sur $\mathcal{T}$  (3). (Nous n'avons pas écrit $*$ sur les générateurs de l'opérade $\mathcal{PL}$ pour alléger les notations.)

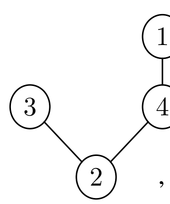
Au final, l'opérade binaire quadratique PreLie est engendrée linéairement par deux opérations que l'on note respectivement par



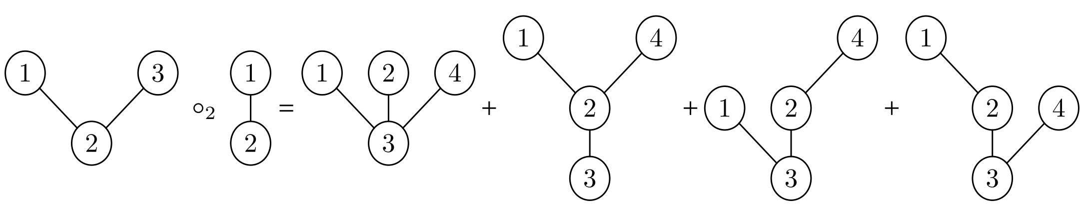
Le morphisme d'opérades binaires quadratiques $\mathrm{PreLie} \to \mathcal{PL}$ défini par

est un isomorphisme ce qui montre que $\mathrm{Perm}^! \cong \mathrm{PreLie}$.

On rappelle que l'opérade PreLie admet pour base les arbres enracinés à n sommets de la forme



où le sommet le plus en bas est la racine. La composition opéradique partielle $t \circ_i s$ est donnée par l'insertion de l'arbre s à la place du i^{e} sommet de l'arbre t. Les sous-arbres se trouvant attachés au-dessus du i^{e} sommet de t sont recollés de toutes les manières possible sur les sommets de l'arbre s :

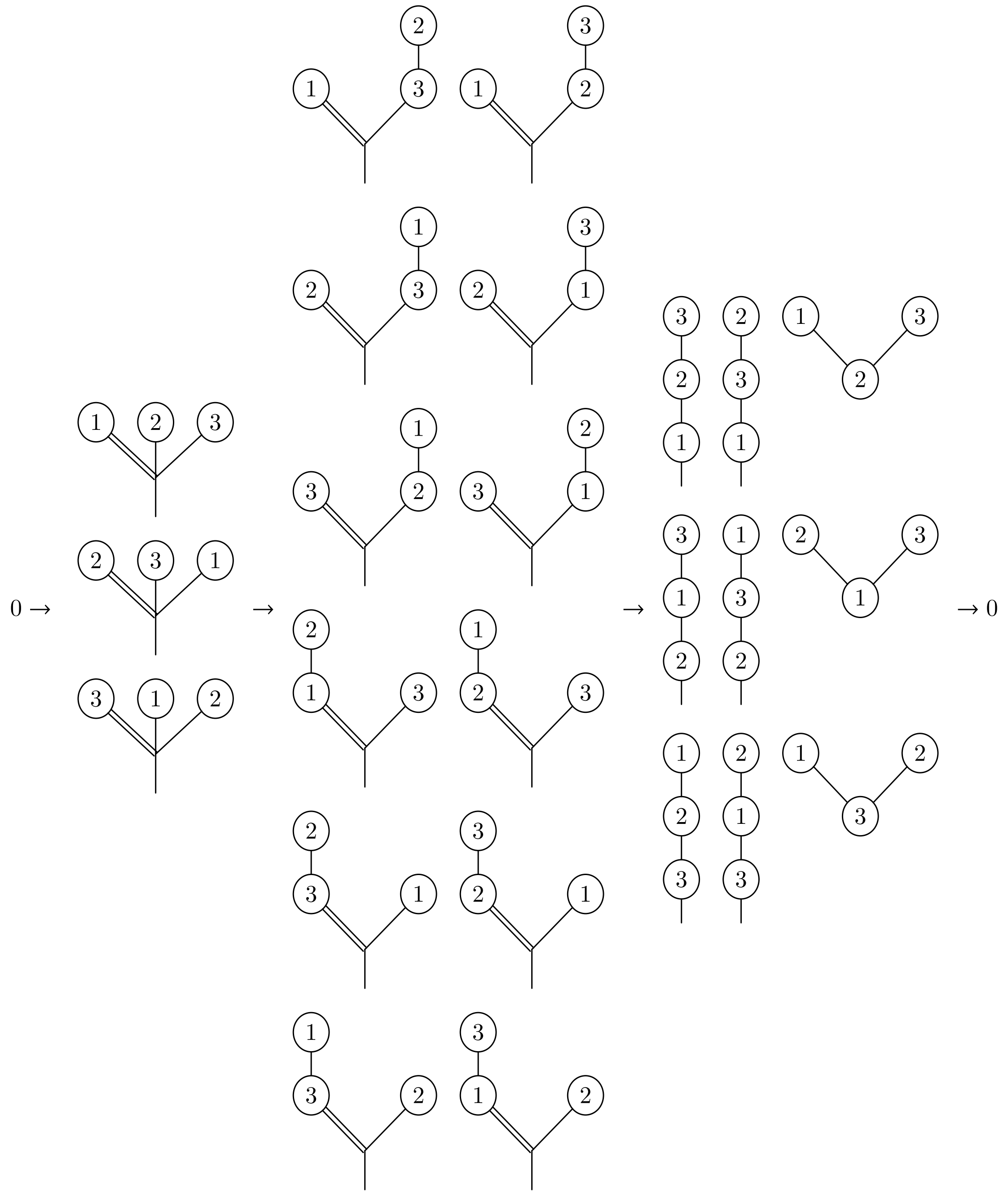


(10) **Décrire la partie d'arité 3 du complexe de Koszul** $(\mathrm{PreLie}^{¡} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)$.

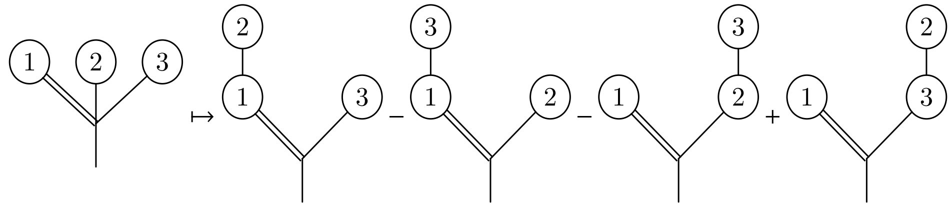
La partie d'arité 3 du complexe de Koszul est donnée par

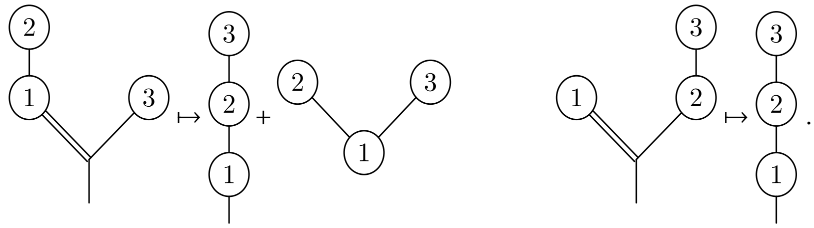
$$(\mathrm{PreLie}^{¡} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3) \cong ((\mathrm{End}^c_{\mathbb{K}s^{-1}} \otimes_H \mathrm{Perm}) \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3) \ ,$$

c'est-à-dire par les "arbres" à deux niveaux où le sommet du premier niveau est indicé par une corolle avec une feuillée particulièrement décorée, représentée la plus à gauche, et où le second niveau est formé d'arbres enracinés provenant de la base de PreLie. Ce complexe de chaînes est concentré en degrés homologiques 2, 1 et 0 et a la forme suivante



La différentielle est donnée par





---

(11) **Montrer que le complexe de chaînes $(\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)$ est acyclique.**

En utilisant les notations suivantes

$$0 \to (\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)_2 \xrightarrow{d_2} (\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)_1 \xrightarrow{d_1} (\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)_2 \to 0\ ,$$

et les formules données à la question précédent, on voit rapidement que d_2 est injective et que d_1 est surjective. Comme les dimensions respectives sont égales à

$$\dim(\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)_2 = 3\,, \quad \dim(\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)_1 = 12\,, \quad \dim(\mathrm{PreLie}^{\text{!`}} \circ_\kappa \mathrm{PreLie})(3)_2 = 9\,,$$

on conclut l'acyclicité de ce complexe de chaînes.

On admettra pour l'instant que les opérades Perm et PreLie sont de Koszul.

(12) **Décrire la notion d'algèbre pré-Lie à homotopie sur un corps de caractéristique 2, c'est-à-dire à signe près.**

Une algèbre pré-Lie à homotopie près est un complexe de chaînes (A, d) muni d'opérations $\mu_n\ : A^{\otimes n} \to A$ de degré $|\mu_n| = n-2$, pour tout $n \geqslant 2$ vérifiant la symétrie suivante

$$\mu_n^\sigma = \mu_n\ , \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n \text{ tel que } \sigma(1) = 1$$

et les relations

$$\partial\,(\mu_n) = \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ \sigma\in \mathrm{Sh}_{k+1,l}\,|\,\sigma(1)=1}} \left(\pm\big(\mu_{l+1} \circ_1 \mu_{k+1}\big)^\sigma + \pm\big(\mu_{l+2} \circ_2 \mu_k\big)^\sigma\right)\ .$$

Question Bonus. **Montrer que les opérades Perm et PreLie sont de Koszul.**

On renvoit à l'article de Frédéric Chapoton et Muriel Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math.Res.Notices(2001), no.8, 395–408.
