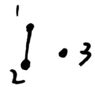
①

1. Produits polyédraux

$\ast$ CONSTRUCTION : • K c.s. sur $[m]$ $\{1,2,\dots,m\}$. ex: 

• (X,A) paire d'espace top avec $A \subsetneq X$

Pour $I \subset [m]$, on définit

$$(X,A)^I = \{ (x_1,\dots,x_m) \in \prod_{i=1}^m X : x_i \in A \text{ pour } i \notin I \}$$

ex: $\{1,2\} \subset [3]$:

$$(X,A)^{\{1,2\}} = X \times X \times A .$$

On définit alors le $CAT(K)$-diagramme

$$\mathcal{D}_K(X,A) : CAT(K) \to Top$$
$$I \mapsto (X,A)^I$$

qui envoie $I \underset{\text{face}}{\subset} J$ vers $(X,A)^I \underset{\text{top}}{\subset} (X,A)^J$

le produit polyédral de (X,A) correspondant à K

$$(X,A)^K = \operatorname{colim} \mathcal{D}_K(X,A) = \operatorname{colim}_{I \in K} (X,A)^I = \text{"} \bigcup_{I\in K} (X,A)^I \text{"}$$

on peut regarder uniquement les facettes.

Rq: (1) se généralise pour $(\mathcal{X},\mathcal{A}) = \{(X_i,A_i)\}_{i\in[m]}$ paire d'espace choisi dépend du point.

Notation : (1) $A = pt \rightsquigarrow (\mathcal{X}, pt)^K$

(2) convention $(X,A)^{\emptyset_0} = pt$.

Prop-def: Catégorie monoïdale des cx simpliciaux.

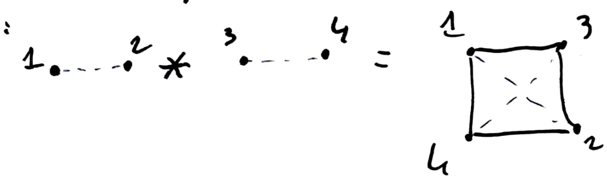
• objets: c.s. K sur V : collection de ss ensembles $I \subset V$ tq
(i) $\emptyset \in K$
(ii) si $I \in K$ alors $J \subsetneq I$ app. à K.

• morphismes: $f : K_1 \to K_2$ provenant de $f : V_1 \to V_2$ tel que $\forall I \in K_1$, $f(I) \in K_2$

• monoïde: K_1 sur V_1 et K_2 sur V_2

$$K_1 * K_2 = \{ \sigma_1 \sqcup \sigma_2 \subset V_1 \sqcup V_2 : \sigma_1 \in K_1, \sigma_2 \in K_2 \}$$

neutre: $K = \{\emptyset\}$ sur $\emptyset$ noté $\emptyset_0$

ex: 

(2)

Proposition:

- $L \hookrightarrow K \Rightarrow (X,A)^L \hookrightarrow (X,A)^K$
- $(X,A)^{K_1 * K_2} = (X,A)^{K_1} \times (X,A)^{K_2}$
- Le foncteur $(\mathrm{SimCom}, *, \emptyset_0)$

$$\longrightarrow (\mathrm{Top}, \times, pt)$$

est monoïdal, strict.

preuve: K_1 sur V_1, K_2 sur V_2.

$$(X,A)^{K_1 * K_2} = \bigcup_{I \in K_1 * K_2} (X,A)^I$$

$$= \bigcup_{\substack{(I_1, I_2) \in K_1 \times K_2 \\ I_1 \in K_1 \\ I_2 \in K_2}} (X,A)^{I_1 \sqcup I_2}$$

$$= \bigcup_{\substack{I_1 \in K_1 \\ I_2 \in K_2}} \underbrace{(X,A)^{I_1}}_{V_1} \times \underbrace{(X,A)^{I_2}}_{V_2}$$

$$= \left(\bigcup_{I_1 \in K_1} (X,A)^{I_1}\right) \times \left(\bigcup_{I_2 \in K_2} (X,A)^{I_2}\right)$$

$$= (X,A)^{K_1} \times (X,A)^{K_2}$$

$\square$

Strict car id envoyé sur id.

II. Exemples.

1) moment-angle cplx.

$$(X,A) = (D^2, S^1), \quad \mathcal{Z}_K = (D^2, S^1)^K$$

Ex:

(1) $K = \Delta^{m-1}$ $(\{1 \dots m\})$. $\mathcal{Z}_K = \bigcup_{I \text{ face maxi}} (D^2, S^1)^I$

$= {}^{\Delta^{m-1}}(D^2)^m$

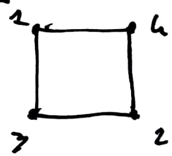
$\cong D^m$ polydisque.

(2) $K = \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}$

$$\mathcal{Z}_K = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2) = \partial (D^2 \times D^2) \cong S^3$$

décomp standard d'une 3-sphère par l'union de 2 tores solides.

(3) $K = \partial \Delta^{m-1}$

(4) $K =$  $= \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet} * \underset{3}{\bullet} \quad \underset{4}{\bullet}$

$$\mathcal{Z}_K = \mathcal{Z}_{\partial \Delta^1} \times \mathcal{Z}_{\partial \Delta^1} \cong S^3 \times S^3$$

③

2) Real moment-angle

$$\mathcal{R}_K = \left([-1,1], \{-1,1\}\right)^K$$

Ex: $K = \partial\Delta^{m-1}$

$$\mathcal{R}_K = \{-1,1\} \times [-1,1] \times \dots \times [-1,1] \cup$$

$$\cup [-1,1] \cup \dots [-1,1] \times \{-1,1\}$$

= 

$= \partial([-1,1]^m) \cong S^{m-1}$

3) Davis-Januszkiewicz spaces.

$$DJ_K = (\mathbb{C}P^\infty, pt)^K$$

4) Arrangement d'Hyperplan

Sep. coordonné :

$$L_I = \{(z_1 \dots z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$$

pour $I = \{i_1 \dots i_k\} \subseteq [m]$

$$\mathcal{A}(K) = \{L_I : I \notin K\}$$

son complément.

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin K} L_I$$

proposition:

$$U(K) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^K$$

proof: exercice.

III. Lien entre les couples.

1) $\mathcal{Z}_K$ & $U(K)$

Thm 4.7.5: $\mathcal{Z}_K$ est un sous-espace $\mathbb{T}^m$ invariant de $U(K)$ et il existe une rétraction $\mathbb{T}^m$-équiv.

$$\mathcal{Z}_K \hookrightarrow U(K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_K$$

Exo..

$$R_K \hookrightarrow U_{\mathbb{R}}(K) \xrightarrow{\simeq} R_K.$$

2) $\mathcal{Z}_K$ et $(\mathbb{C}P^\infty, pt)^K$

Thm 4.3.2:

$$i : (\mathbb{C}P^\infty, pt)^K \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty, pt)^m$$

se factorise en $p \circ h$ avec l'équi. homot.

$$h : (\mathbb{C}P^\infty, pt)^K \xrightarrow{\simeq} ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K$$

④ et la fibration

$$p : ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K \longrightarrow BT^m = (\mathbb{C}P^\infty, pt)^m$$

avec fibre $\mathcal{Z}_K$.

En particulier, $\mathcal{Z}_K$ est la fibre homotopique de l'incl. canon. i.

---

3) Lien $\mathcal{Z}_\bullet$ et $\mathcal{R}_\bullet$ DEMANDER

a. (multiwedge simpliciale.

K s.c. on V

$$MNF(K) = \{\sigma \subset V : \sigma \notin K, \forall \tau \subsetneq \sigma, \tau \in K\}.$$

Exemples : (1) $MNF(\partial\Delta^{m-1}) = \{\{1, \dots, m\}\}$

(2) $MNF(\square) = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$.

(3) $MNF(\text{pentagone}) = \{13, 14, 24, 25, 35\}$.

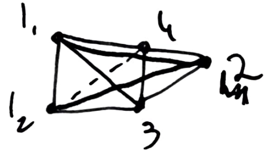
Définition : $Wed_v(K)$. s.c. on $V \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2\}$

tel que :

$$MNF(Wed_v(K)) = \{\sigma \in MNF(K) : \sigma \not\ni v\} \cup \{\sigma \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2\} : \sigma \in MNF(K), \sigma \ni v\}$$

Exemple : (1) $Wed_1(\partial\Delta^{m-1}) = \partial\Delta^m$

(2) $Wed_1(\square) =$



Définition : multiwedges, on répète.

$$K(J) \quad \text{pour} \quad J \in (\mathbb{N}^*)^m$$

Définition : Dédoublement $D(K) = K(\{2, \dots, 2\})$ sommets V et V'

b. liens.

Corollaire 4.8.14 :

$$\mathcal{L}\mathcal{Z}_K \cong \mathcal{R}_{D(K)}$$

preuve : idée

$$(D^2, S^1) \cong (D^1 \times D^1, D^1 \times S^0 \cup S^0 \times D^1)$$

facettes qui contenaient v vont contenir les 2.

faces max qui contenaient pas v vont contenir un des 2.

(5)

IV. Prop. homot.

Prop 4.3.5

(a) K CS samts [m] alors $\mathcal{Z}_K$ est 2-connexe :

$$\pi_1(\mathcal{Z}_K) = \pi_2(\mathcal{Z}_K) = 0$$

et

$$\pi_i(\mathcal{Z}_K) = \pi_i((\mathbb{C}P^\infty, pt)^K) \quad i \geq 3$$

(b) si K q-neighborly alors $\pi_i \mathcal{Z}_K = 0$ pour $i < 2q+1$. De plus, $\pi_{2q+1}(K)$ est un groupe libre abélien de rang égal au nombre de MNF de taille $q+1$ de K.

Théorème 4.7.7

$$U(sk^i \Delta^{m-1}) \simeq \bigvee_{k=i+2}^{m} \left(S^{i+k+1}\right)^{\vee \binom{m}{k}\binom{k-1}{i+1}}$$

complément à tous les plans de coord de codim $i+1$ dans $\mathbb{C}^m$.

V. décomp. cellulaire.

$\mathbb{D}$:
- $1 \in \mathbb{D}$
- $T = \partial\mathbb{D} \setminus 1$
- $D = \mathring{\mathbb{D}}$

$\mathbb{D}^m$ décomp cellulaire param par $J, I \subset [m]$ avec $J \cap I = \emptyset$

cellules :

$$\underset{\substack{\uparrow\ \ \ \ \uparrow\\ T\ \ \ D}}{x(J, I)} \quad \underset{\substack{\uparrow\\ 1}}{[m] \setminus (I \cup J)}$$

$$= \left\{ (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{D}^m : \begin{array}{l} x_i \in D \text{ si } i \in I \\ x_i \in T \text{ si } i \in J \\ x_i = 1 \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

or,

$$\mathcal{Z}_K \hookrightarrow \mathbb{D}^m$$

donc $x(J, I) \subset \mathcal{Z}_K$ si $I \in K$.

⑥ $C^\bullet(\mathcal{Z}_K)$ ensemble des cochains φ de $\mathcal{Z}_K$. bigrad.:

• bideg $x(JI)^* = (-|J|, 2|I| + 2|J|)$

donc

• bideg $1^* = (0,0)$

• bideg $T^* = (-1, 2)$

• bideg $D^* = (0, 2)$

diff:

$$\partial T^* = D^*$$

Donc.

$$C^\bullet(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{q=0}^{m} C^{\bullet, 2q}(\mathcal{Z}_K)$$

nbre de Betti

$$b^{-p,2q}(\mathcal{Z}_K) = rk(H^{-p,2q}(\mathcal{Z}_K))$$

$1 \leq p, q \leq m$

$$b^k(\mathcal{Z}_K) = \sum_{-p+2q=k} b^{-p+2q}(\mathcal{Z}_K)$$

Next talk: prop 4.4.2 its functorial.

$K \mapsto \mathcal{Z}_K$.

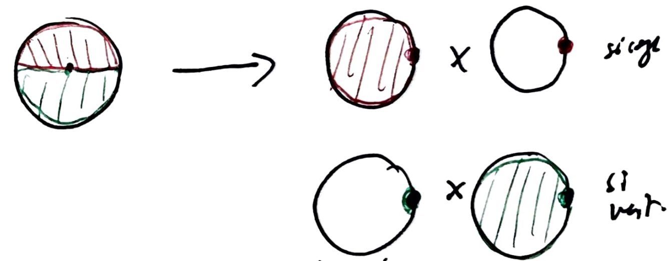
cochain simpliciale $\mapsto$ cochain cellulaire.

VI. Approx cellulaire de la diag.

$$\Delta : \mathcal{Z}_K \to \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K.$$

pour.

$$\tilde{\Delta} : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \times \mathbb{D}$$



est une approx. cellulaire de la diag.