Fiche de Travaux Dirigés 1

NORMES, BOULES, OUVERTS, FERMÉS, CONTINUITÉ, DÉRIVÉES PARTIELLES

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des normes ?

- $N_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $N_1(x) := x^2$.
- $N_2 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^+$ définie par $N_2(x_1, x_2) := |2x_1 - x_2| + |x_2|$.
- $N_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $N_3(x, y, z) := \max(|x - y + z|, |x - z|)$.

Exercice 2. On considère les trois normes usuelles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\|(x_1, x_2)\|_1 := |x_1| + |x_2| \ , \quad \|(x_1, x_2)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ , \quad \|(x_1, x_2)\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|).$$

1. Dessiner la boule unité fermée, c'est-à-dire la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, pour chacune des trois normes. Puis dessiner les boules fermées de centre $(3, -1)$ et de rayon 1.
2. Montrer les inégalités suivantes :
$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2)\|_\infty &\leq \|(x_1, x_2)\|_1 \leq 2\,\|(x_1, x_2)\|_\infty \ , \\ \|(x_1, x_2)\|_\infty &\leq \|(x_1, x_2)\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|(x_1, x_2)\|_\infty \ , \\ \|(x_1, x_2)\|_2 &\leq \|(x_1, x_2)\|_1 \leq \sqrt{2}\,\|(x_1, x_2)\|_2 \ . \end{aligned}$$
Ces trois normes sont dites *équivalentes*.
3. Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$ on a
$$B_\infty(a, r) \subset B_2(a, \sqrt{2}r) \subset B_\infty(a, \sqrt{2}r) \ .$$
4. On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par
$$A := \left\{ \frac{\|(x_1, x_2)\|_1}{\|(x_1, x_2)\|_\infty} \, , \, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}.$$
La partie A admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure ? Si oui, les déterminer. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 3. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x_1, x_2) := |x_1 + x_2| + |x_1|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ équivalente aux normes usuelles. Dessiner la boule unité pour cette norme.

Exercice 4. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x_1, x_2) := |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|$ est une norme équivalente aux normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme N. Montrer que les boules (ouvertes ou fermées) sont des parties convexes de $\mathbb{R}^d$. On peut commencer par

traiter le cas de la boule unité.
Rappel : *Une partie C d'un espace vectoriel E est dite convexe si pour tout (x,y) dans $C \times C$ et tout t dans $[0,1]$ on a $x + t(y-x) \in C$.*

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) := f(x) + g(y)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme infinie et $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle.

1. Montrer que si f est continue en a et g est continue en b alors h est continue au point (a,b).
2. On suppose h continue au point (a,b). f est-elle continue en a ? g est-elle continue en b ?
   On pourra traiter ces questions de plusieurs façons : utilisation de la définition avec (ε, η), critère séquentiel, fonctions continues de référence et opérations sur les fonctions continues.

Exercice 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) := \dfrac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \cdot x$ si $x \neq 0$ et $f(0) := 0$.

1. Montrer que f est continue en 0, ceci quelque soit la norme dont on munit $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $S_\infty := \{x \in \mathbb{R}^2 \,,\, \|x\|_\infty = 1\}$ et $S_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,,\, \|x\|_2 = 1\}$. Montrer que $f(S_\infty) = S_2$.

Exercice 8. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,x_2) := \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ si $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) := \alpha$, où α est un paramètre réel. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'une des normes usuelles et $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle.

1. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de la continuité de φ en $(0,0)$?
2. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de la continuité de φ en $(0,0)$?

Exercice 9. Soit n un entier naturel. Etudier la continuité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) := \frac{x^n y}{x^2 + |y|} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad g(0,0) := 0.$$

On pourra étudier les cas $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 10. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) := \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) := 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11. Étudier la continuité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y,z) := \frac{xy}{|x| + |y| + |z|} \quad \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \text{et} \quad g(0,0,0) := 0\ .$$

Exercice 12. Considérons la fonction $h(x, y) := \dfrac{e^{xy} - 1}{x}$ pour (x, y) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Déterminer une fonction $\bar{h}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier vérifiant pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\bar{h}(x, y) = h(x, y)$.

Exercice 13. Dire pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, si elle est ouverte, si elle est fermée, et quelle est son adhérence et son intérieur.

$$]0, 2], \quad [-1, +\infty[, \quad]-2, 1[, \quad]-\infty, 7[\cup]8, 9[, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[, \quad \left\{\frac{1}{n}\,,\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \;.$$

Exercice 14. Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et pour chacune d'elles, dire si elle est ouverte, si elle est fermée, et déterminer son adhérence et son intérieur.

- $\diamond$ $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 y = 1\}$,
- $\diamond$ $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$,
- $\diamond$ $A_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\}$,
- $\diamond$ $A_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \geq 0 \text{ et } x > 0\}$,
- $\diamond$ $A_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 1\}$,
- $\diamond$ $A_6 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y > 0\}$.

Exercice 15. La partie $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0\,,\, y > 0 \text{ et } z \leq 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle ouverte ? Est-elle fermée ?

Exercice 16. Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe $\mathrm{G} := \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > -1\}$. On définit la fonction g sur D par $g(0, 0) := 0$ et $g(x, y) := \dfrac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour (x, y) dans $D \setminus \{(0, 0)\}$.

1. Dessiner D et montrer que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction g est-elle continue sur D ?

Exercice 18. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) := \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) := 0$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
2. Ces dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 19. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculer ses dérivées partielles aux points où elles existent.

Exercice 20. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) := \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) := 0$. Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 21. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes là où elles sont définies :

$f_1(x,y) := x^3+y^3-2xy, \quad f_2(x,y) := \arctan \dfrac{x}{y}, \quad f_3(x,y) := x^2 e^{-\frac{x}{y}}, \quad f_4(x,y) := \ln(x+\ln y).$

Exercice 22. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $h(x,y) := f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Calculer les dérivées partielles de h à l'aide de la fonction dérivée f'.

Exercice 23. Écrire les matrices jacobiennes des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) := (x^2-z^2, \sin x \sin y), \\ g &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) := (xy, x^2+y, \ln(1+x^2)). \end{aligned}$$

Exercice 24. Écrire les matrices jacobiennes des applications f, g et $g \circ f$:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = (y^2x, x^2yz), \\ g &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(x,y) = (x+y, x-y). \end{aligned}$$

Même question avec

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x,y) = (x \sin y, x-y, ye^x), \\ g &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(x,y,z) = (x+y+z, xy-z^2). \end{aligned}$$

Exercice 25. Soient $f(x,y) := \sin(x^2-y^2)$ et $g(x,y) := (x+y, x-y)$. Calculer la matrice jacobienne de la composée $f \circ g$ au point (x,y) de deux façons différentes :

- ⋄ En calculant d'abord $f \circ g$.
- ⋄ En utilisant les matrices jacobiennes de f et g.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) := f(x-y, y-z, z-x)$. Montrer que l'on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

Exercice 27. On considère une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^1.

1. Dériver la fonction $x \longmapsto u(x) := f(x,-x)$.
2. Calculer les dérivées partielles de $(x,y) \longmapsto g(x,y) := f(y,x)$ en fonction de celles de f.
   Si l'on suppose alors que l'on a pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$, quelle relation vérifient les dérivées partielles de f ?