FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 1

LE GROUPE LINÉAIRE

Exercice 1 (Equation dipohantienne)**.**

(1) Déterminer toutes les paires d'entiers vérifiant l'équation $141x + 333y = 2$.

(2) Déterminer toutes les paires d'entiers vérifiant l'équation $141x + 333y = 3$.

———— ✍ ————

Exercice ☢ 2 (Factoriel vs Principal)**.** [1]

(1) Montrer qu'un anneau principal est factoriel.

(2) Montrer qu'un anneau factoriel qui satisfait la propriété du théorème de Bézout est principal.

———— ✍ ————

Exercice 3 (Théorème de Bézout)**.**
Soit une extension de corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Monter que le pgcd ne dépend pas du corps où on le considère, c'est-à-dire

$$\mathrm{pgcd}_{\mathbb{L}[X]}(P, Q) = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{K}[X]}(P, Q) \ .$$

———— ✍ ————

Exercice 4 (Anneau de polynômes)**.**
Soit A un anneau. Montrer que l'anneau $A[X]$ des polynômes à coefficients dans A est principal si et seulement si A est un corps.

———— ✍ ————

Exercice ☢ 5 (Anneau des entiers de Gauss)**.**

(1) Montrer que l'ensemble

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-anneau du corps des complexes.
On l'appelle *l'anneau des entier de Gauss.*

(2) Déterminer les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

(3) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss est euclidien pour le carré de la norme des nombres complexes.

On considère l'ensemble des nombres entiers qui sont somme de deux carrés :

$$\Sigma := \{n \in \mathbb{N} \mid n = a^2 + b^2,\ a, b \in \mathbb{N}\} \ .$$

(4) Montrer que l'ensemble Σ est stable par multiplication.

1. Les exercices radioactifs ☢ présentent un challenge plus élevé.

(5) Démontrer l'équivalence
$$p \in \Sigma \Longleftrightarrow p \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{Z}[i]\ .$$

(6) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère sa décomposition en facteurs premiers
$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}\ .$$
Montrer que n est somme de deux carrés si et seulement si la p-valuation $\nu_p(n)$ de n est paire pour $p \equiv 3 \bmod 4$.

(7) Conclure que les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont, aux inversible près, les entiers premiers $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \equiv 3 \bmod 4$ et les entiers de Gauss $a + ib$ dont la norme $a^2 + b^2$ est un nombre premier.

(8) Factoriser dans $\mathbb{Z}[i]$, l'entier de Gauss $7 + 21i$.

——— ✍ ———

Exercice 6 (Matrices de permutations).

(1) Les matrices de permutations sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{C}$?

(2) Les matrices de permutations sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

——— ✍ ———

Exercice 7 (Transposée et similitude).
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Montrer que la matrice M est semblable à sa matrice transposée ${}^tM$.

——— ✍ ———

Exercice ☘ 8 (Facteurs invariants).
Soit $n \geq 2$ et soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ définie par $m_{ij} := i + j - 1$, c'est-à-dire
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & & n+1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}\ .$$

(1) Montrer que M est de rang 2.

(2) Calculer les facteurs invariants de la matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

——— ✍ ———

Exercice 9 (Caractérisation de similitude en basse dimension).

(1) Soit $n = 2$ ou $n = 3$. Montrer que deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont le même polynôme minimal et le même polynôme caractéristique.

(2) Que pensez-vous du cas $n \geq 4$?

——— ✍ ———

Exercice 10 (Indépendance du corps de base).
Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension de corps.

(1) Montrer que deux matrices carrées $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$.

(2) Le rang d'une matrice est-il dépend du corps sur lequel on se place ?

——— ✍ ———

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr` .
☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/∼vallette/` .