FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 1

ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE

Exercice 1 (Algèbre d'endomorphisme). Soient (V, d_V) et (W, d_W) deux complexes de chaînes.

(1) Montrer que $\big(\mathrm{Hom}(V, W), \partial\big)$ est un complexe de chaînes où
$$\partial(f) := d_W \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_V \ .$$

(2) Montrer que $\mathrm{End}(V) := \big(\mathrm{Hom}(V, V), \partial, \circ\big)$ est une algèbre associative différentielle graduée.

✍

Exercice 2 (Algèbre associative et algèbre de Lie). Soit $\mathfrak{a} = (A, d, \star)$ une algèbre associative différentielle graduée.

(1) Montrer que $\mathfrak{g} := (A, d, [\ ,\ ])$, où
$$[x, y] := x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x \ ,$$
est une algèbre de Lie différentielle graduée.

(2) Soit (V, d) un complexe de chaînes et soit $\mu : V^{\otimes 2} \to V$ un morphisme de complexes de chaînes (dont on ne demande pas que cette opération vérifie une relation particulière ; il s'agit donc d'un *magma*). On rappelle d'une ***dérivation par rapport à*** μ est une application linéaire $\delta : V \to V$ qui vérifie
$$\delta \circ \mu = \mu \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) + \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \delta) \ .$$
(Attention les dérivations considérées ici ne sont pas nécessairement de degré -1 ; elles sont des sommes finies d'applications de degré homogène). On note $\mathrm{Der}(V, \mu)$ l'ensemble des dérivations de V par rapport à μ.

Montrer que $\big(\mathrm{Der}(V, \mu), \partial, [\ ,\ ]\big)$ est une sous-algèbre de Lie différentielle graduée de l'algèbre de Lie des endomorphismes $\big(\mathrm{Hom}(V, V), \partial, [\ ,\ ]\big)$.

✍

Exercice 3 (Élements de Maurer–Cartan et torsion). Soit $\mathfrak{a} = (A, d, \star)$ une algèbre associative différentielle graduée. On appelle ***élément de Maurer–Cartan de*** $\mathfrak{a}$ tout élément $\alpha \in A_{-1}$ vérifiant l'***équation de Maurer–Cartan*** :
$$d\alpha + \alpha \star \alpha = 0 \ .$$

(1) Montrer que $\mathfrak{a}^\alpha := (A, d_\alpha, \star)$, où
$$d_\alpha(x) := d(x) + \alpha \star x - (-1)^{|x|} x \star \alpha \ ,$$
est une algèbre associative différentielle graduée.

(2) Montrer que β est un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{a}^\alpha$ si et seulement si $\alpha + \beta$ est un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{a}$.

(3) Montrer que les algèbres associatives différentielles graduées suivantes sont égales $(\mathfrak{a}^{\alpha})^{\beta} = \mathfrak{a}^{\alpha+\beta}$.

✍

Exercice 4 (Espaces de modules de Maurer–Cartan). Soit $\mathfrak{g} = (A, d, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie différentielle graduée. On appelle ***élément de Maurer–Cartan de*** $\mathfrak{g}$ tout élément $\alpha \in A_{-1}$ vérifiant l'***équation de Maurer–Cartan*** :

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0 \ .$$

L'ensemble des éléments de Maurer–Cartan est noté $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$.

(1) Montrer que $\mathfrak{g}^{\alpha} := (A, d_{\alpha}, [\ ,\ ])$, où

$$d_{\alpha}(x) := d(x) + [\alpha, x] \ ,$$

est une algèbre de Lie différentielle graduée.

(2) On suppose que le corps de base est celui des réels $\mathbb{R}$ et que A_{-1} est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$ est une intersection de quadriques, c'est-à-dire une variété algébrique de A_{-1} définie par un système d'équations polynomiales de degré 2.

(3) Montrer que le tangent à cette variété en α est égal au noyau de la différentielle tordue :

$$\mathrm{T}_{\alpha}\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) = \ker d_{\alpha} \ .$$

✍

Exercice 5 (Algèbre pré-Lie). Dans cet exercice, afin de se faciliter la vie avec les signes, nous travaillerons sur le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit (V, d) un complexe de chaînes. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on considère les modules

$$A_n := \prod_{k \geqslant 1} \mathrm{Hom}(V^{\otimes k}, V)_{n+k-1}$$

équipés de la différentielle $\partial f = \partial(f_1, f_2, \cdots) = (\partial(f_1), \partial(f_2), \cdots)$. Soient $f_k \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes k}, V)$ et $gl \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes l}, V)$. On note la composition partielle à la i^{e} entrée, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, par

$$f_k \circ_i g_l := f_k(-, \cdots, -, \underbrace{g_l(-, \cdots, -)}_{i^{\mathrm{e}}\ \text{entrée}}, -, \cdots, -) \ .$$

(1) Montrer que la formule

$$f_k \star g_l := \sum_{i=1}^{k} f_k \circ_i g_l$$

définit, par bilinéarité, un morphisme de complexes de chaînes $\star : A^{\otimes 2} \to A$.

(2) Montrer que $\big(A, \partial, [\ ,\ ]\big)$, où

$$[f, g] := x \star y + g \star f \ ,$$

est une algèbre de Lie différentielle graduée.

(3) Est-ce que le produit $\star$ est associatif ?

(4) Donner une relation de symétrie vérifiée par l'associateur

$$\mathrm{Assoc}(f, g, h) := (f \star g) \star h - f \star (g \star h) \ .$$

(5) Interpréter les éléments de Maurer–Cartan des formes respectives suivantes

   (a) $\alpha = (0, \mu_2, 0, \ldots)$,

   (b) $\alpha = (0, \mu_2, \mu_3, \ldots)$,

   (c) $\alpha = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$, en supposant $d = 0$ dans ce cas.

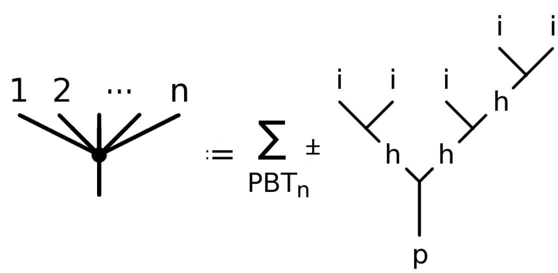
✍

Exercice ☢ 6 (Théorème de transfert homotopique). [1]
Dans cet exercice, on travaille à nouveau sur un corps de caractéristique 2, pour ne pas à avoir à gérer les signes. On considère la donnée d'un *retract homotopique*

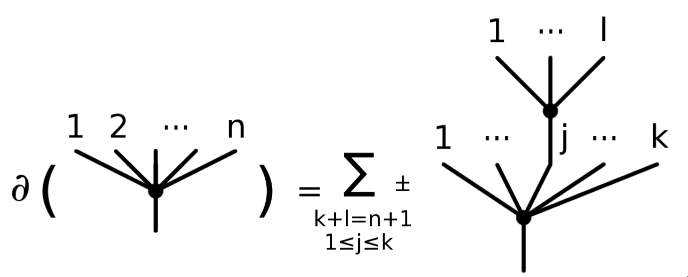
$$h \circlearrowright (V, d_V) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (W, d_W)$$
$$ip - \mathrm{id}_V = d_V h + h d_V \ ,$$

et d'une structure d'algèbre associative différentielle graduée $\mu : V^{\otimes 2} \to V$ sur V.

(1) Montrer que la formule donnée dans le cours comme somme sur les arbres binaires planaires pour les opérations transférées

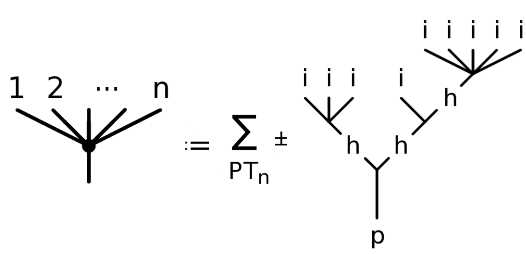
$\nu_n =$ 

fournit bien une A_∞-algèbre, c'est-à-dire qu'elles vérifient



.

(2) Supposons maintenant que l'on démarre avec une structure d'A_∞-algèbre sur V donnée par des opérations $(\mu_2, \mu_3, \ldots)$. Montrer que la formule analogue pour les opérations transférées ν_n donnée cette fois-ci par une somme sur les arbres planaires (pas nécessairement binaire)

$\nu_n =$ 

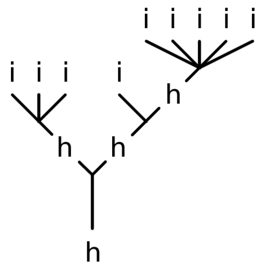
fournit encore une A_∞-algèbre.

---

1. Les exercices radioactifs ☢ présentent un challenge plus élevé.

(3) Montrer que la formule donnée par la somme sur les arbres (binaires) planaires pour l'extension du morphisme de complexes de chaînes i :

$$i_n := \sum_{\mathrm{PT}_n} \pm$$



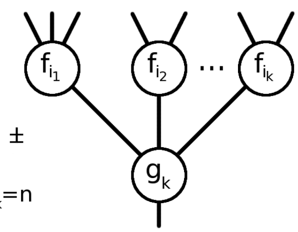
$$: \ W^{\otimes n} \to V \ ,$$

pour $n \geqslant 2$, fournit bien un ∞-morphisme, c'est-à-dire que les composantes supérieures vérifient

$$\partial(i_n) = \sum_{p+q+r=n} i_{p+1+r} \circ_{p+1} \nu_q - \sum_{j_1+\cdots+j_k=n} \mu_k \circ (i_{j_1} \otimes \cdots i_{j_k}) \ .$$

(4) Montrer que les A_∞-algèbres munies des ∞-morphismes forment une catégorie pour la composition suivante

$$(g_\circ f)_n := \sum_{\substack{k\geq 1 \\ i_1+\cdots+i_k=n}} \pm$$



.

(5) Décrire les morphismes inversibles de cette catégorie.

Exercice 7 (Multicomplexes). On considère un complexe de chaînes (V, d_V) équipé d'un opérateur linéaire $\Delta : V \to V$ de carré nul Δ^2, de degré $|\Delta| = 1$ et qui anti-commute avec la différentielle $\Delta d_V + d_V \Delta = 0$. Une telle structure algébrique est appelée un *complexe mixte*.
Soit un retract homotopique

$$h \circlearrowright (V, d_V) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (W, d_W)$$

$$ip - \mathrm{id}_V = d_V h + h d_V \ .$$

(1) Démontrer un énoncé pour le théorème de transfert homotopique pour les complexes mixtes : formule pour les homotopies supérieures de l'opérateur transféré, relations vérifiées par ces dernières (notion de complexe mixte à homotopie près, aussi appelée *multicomplexe*), formule pour les homotopies supérieures du morphisme i, relations vérifiées par ces dernières (notion d'∞-morphisme).

(2) Trouver une manière simple d'encoder la notion de multicomplexe et ses ∞-morphismes.

Exercice 8 (Théorème de transfert homotopique). Dans cet exercice, on travaille encore une fois sur un corps de caractéristique 2, pour ne pas à avoir à gérer les signes.

(1) Démontrer un énoncé pour le théorème de transfert homotopique pour les algèbres de Lie différentielles graduées : formule pour les homotopies supérieures de l'opération transférée, relations vérifiées par ces dernières (notion d'algèbre de Lie à homotopie près), formule pour les homotopies supérieures du morphisme i, relations vérifiées par ces dernières (notion d'∞-morphisme).

(2) Démontrer un énoncé pour le théorème de transfert homotopique pour les algèbres commutatives différentielles graduées.

Exercice 9 (Contraction et retract par déformation).
On appelle *contraction* d'un complexe de chaînes (V, d_V) une application linéaire $h : V \to V$ de degré 1 vérifiant $h^2 = 0$ et $hdh = h$. Montrer qu'un telle donnée est équivalente à la donnée d'un retract par déformation

$$\begin{tikzcd} (V, d_V) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{id}_V - pi = d_V h + h d_V, \quad pi = \mathrm{id}_H \ .$$

satisfaisant les conditions supplémentaires

$$h^2 = 0, \quad hi = 0, \quad ph = 0 \ .$$

Exercice 10 (Produits de Massey).
Dans cet exercice, on suppose que l'on travaille sur un corps $\mathbb{K}$. Soit (V, d) un complexe de chaînes et soit $H := H(V, \mathrm{d})$ le module gradué fait de ses groupes d'homologie.

(1) Montrer que l'on peut écrire $(H, 0)$ comme un retract par déformation du complexe de chaînes (V, d), à savoir qu'il existe deux morphismes de complexe de chaînes i, p et une homotopie h

$$\begin{tikzcd} (V, \mathrm{d}) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, 0) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

tels que

$$ip - \mathrm{id}_V = \mathrm{d}h + h\mathrm{d} \quad \text{et} \quad pi = \mathrm{id}_H \ .$$

(2) Soit $\mu : V^{\otimes 2} \to V$ un produit binaire qui fait de (V, d, μ) une algèbre associative différentielle graduée. On note ν le produit associatif induit sur H. On définit le ***produit de Massey triple*** $< -, -, - >$ sur H de la manière suivante. Soient $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ trois classes d'homologie représentée respectivement par x, y, z dans V. Supposons que $\nu(\bar{x}, \bar{y}) = 0 = \nu(\bar{y}, \bar{z})$. Il existe donc deux chaînes a et b telles que

$$(-1)^{|x|}\mu(x, y) = \mathrm{d}a \quad \text{et} \quad (-1)^{|y|}\mu(y, z) = \mathrm{d}b \ .$$

On considère alors

$$< \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} > := \overline{(-1)^{|x|}\mu(x, b) + (-1)^{|a|}\mu(a, z)} \ .$$

Montrer le produit de Massey triple est bien défini dans le quotient $\dfrac{H}{\nu(\bar{x}, H) + \nu(H, \bar{z})}$.

(3) Comparer le produit de Massey triple et l'opération transférée $\nu_3 : H^{\otimes 3} \to H$.

(4) On considère maintenant le complémentaire $X := S^3 \backslash B$ des anneaux borroméens dans la

sphère réelle de dimension 3. Montrer que chaque anneau détermine un 1-cocycle dans la cohomologie singulière de X tel que le produit cup ν de chaque pair est nul.

(5) Montrer que leur produit de Massey triple n'est pas nul et donc que cet entrelacs n'est pas trivial.

———— ✍ ————

Exercice 11 (Élements de Maurer–Cartan et torsion des A_∞-algèbres). Chose étonnante, dans cet exercice, on travaille sur un corps de caractéristique 2. Soit $\mathfrak{a} = (A, d = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$ une A_∞-algèbre. Soit $\alpha \in A_{-1}$ un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{a}$:

$$d(\alpha) + \sum_{n\geq 2} \mu_n(\alpha, \ldots, \alpha) = 0 \ .$$

On supposera dans la suite que toute les séries qui apparaissent sont convergentes. (Un moyen de justifier cette hypothèse est de travailler avec une filtration complète de A et d'exiger que les opérations μ_n la préserve.)

(1) Montrer que les opérations

$$\mu_n^\alpha = \sum_{r_0,\ldots,r_n\geq 0} \mu_{n+r_0+\cdots+r_n}\big(\alpha^{r_0}, -, \alpha^{r_1}, -, \ldots, -, \alpha^{r_{n-1}}, -, \alpha^{r_n}\big) \ ,$$

pour $n \geqslant 1$, forment une A_∞-algèbre $\mathfrak{a}^\alpha := (A, \mu_1^\alpha, \mu_2^\alpha, \mu_3^\alpha, \ldots)$.

(2) Montrer que β est un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{a}^\alpha$ si et seulement si $\alpha+\beta$ est un élément de Maurer–Cartan de $\mathfrak{a}$.

(3) Montrer que les A_∞-algèbres suivantes sont égales $(\mathfrak{a}^\alpha)^\beta = \mathfrak{a}^{\alpha+\beta}$.

———— ✍ ————

Exercice 12 (Algèbre de convolution). On considère le module gradué $C := \mathbb{K}\,\varepsilon_1 \oplus \mathbb{K}\,\varepsilon_2 \oplus \cdots$, où $|\varepsilon_n| := 2n$, muni de la différentielle nulle $d = 0$ et du coproduit coassociatif

$$\Delta(\varepsilon_n) := \sum_{k+l=n} \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l \ .$$

(1) Décrire l'algèbre de convolution $\mathrm{Hom}\big(C, \mathrm{End}(V)\big)$ depuis la cogèbre C vers l'algèbre des endomorphismes.

(2) Interpréter les éléments de Maurer–Cartan de cette algèbre de convolution.

———— ✍ ————

Exercice ☢ 13 (Produit tensoriel tordu). Soient A une algèbre différentielle graduée et C une cogèbre différentielle graduée. Soit $\alpha : C \to A$ un morphisme tordant.

(1) Montrer que l'application

$$\tau \ : \ C\otimes A \to A \otimes C, \quad c\otimes a \mapsto (-1)^{|c||a|} a\otimes c$$

définit un morphisme de complexes de chaînes de $(C\otimes A, d_{C\otimes A})$ vers $(A\otimes C, d_{A\otimes C})$.

(2) Est-ce qu'elle définit un morphisme de complexes de chaînes entre les produits tensoriels tordus $C\otimes_\alpha A$ et $A\otimes_\alpha C$?

———— ✍ ————

Exercice 14 (Morphisme de Koszul). On considère le module gradué $C := \mathbb{K}\,\varepsilon_0 \oplus \mathbb{K}\,\varepsilon_1 \oplus \mathbb{K}\,\varepsilon_2 \oplus \cdots$, où $|\varepsilon_n| := n$, muni de la différentielle nulle $d = 0$ et du coproduit coassociatif

$$\Delta(\varepsilon_n) := \sum_{k+l=n} \varepsilon_k \otimes \varepsilon_l \ .$$

On considère l'*algèbre des nombres duaux* $A := \mathbb{K}[x]/(x^2)$, où $|x| = 0$.

(1) Montrer que $\kappa(\varepsilon_1) := x$ et $\kappa(\varepsilon_n) := 0$, pour $n \neq 1$, définit un morphisme tordant de C vers A.

(2) Décrire le produit tensoriel tordu $C\otimes_\alpha A$ et calculer ses groupes d'homologie.

———— ✍ ————

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr` .
☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/~vallette/` .