Fiche de Travaux Dirigés 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

1. Montrer que les fonctions $t \longmapsto 0$ et $t \longmapsto (t-a)^3$, où a est un réel, sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Y-a-t-il unicité du problème de Cauchy ? Expliquer.

Exercice 2. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = e^{-y}t$ vérifiant les différentes conditions initiales suivantes :

1. $y(0) = y_0$, pour $y_0 \in \mathbb{R}$.

2. $y(2) = 0$.

On précisera les intervalles de définition de ces solutions maximales.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E), $y' = y^2 \cos t$.

1. Que peut-on dire d'une solution de (E) définie sur un intervalle I qui s'annule en un point ?

2. Déterminer les solutions maximales de (E) vérifiant les différentes conditions initiales suivantes et tracer leurs graphes dans un même repère. On précisera les intervalles de définition de ces solutions maximales. On pourra dessiner d'autres solutions.

   (a) $y(0) = \frac{1}{2}$.
   (b) $y(0) = 2$.
   (c) $y(0) = 0$.

Exercice 4. *Equation logistique*
L'équation différentielle $x'(t) = ax(t)$ peut être considérée comme un modèle simplifié de croissance d'une population lorsque $a > 0$. La quantité $x(t)$ mesure alors la population d'une espèce au temps t. Dans cette équation on fait l'hypothèse que le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de la population. Mais dans un environnement donné, des circonstances empêchent une espèce de croître sans limite. L'équation différentielle logistique

$$(E) \qquad x'(t) = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{N}\right)$$

est un modèle qui prends en compte cette restriction. On considère ici que le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de la population uniquement lorsque la taille de la population est petite. Le nombre N représente une sorte de taille de population idéale. Lorsque la population dépasse cette limite, son taux de croissance devient négatif.

1. En posant $y(t) = \alpha \cdot x(\beta t)$ où α et β sont des réels à déterminer, montrer que l'étude de (E) se ramène à l'étude de l'équation différentielle
$$(E') \qquad y' = y(1-y) \ .$$
2. Déterminer les solutions maximales constantes de (E'). Dire pourquoi les autres solutions maximales ne prennent jamais la valeur de ces constantes.
3. Déterminer la solution maximale de (E') vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0$. On discutera en fonction de la valeur de y_0.
On pourra écrire $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y}$.

Exercice 5. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle
$$x' = x + \cos t \ .$$
Admet-elle une solution périodique ?
Indication : pour rechercher une primitive de $t \longmapsto \cos t \cdot \exp(at)$, avec a réel, on peut utiliser la relation $\cos t \cdot \exp(at) = \Re\,(exp((a+i)t))$.

Exercice 6. Déterminer la solution sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle
$$y' - \tan t \cdot y = t$$
vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 7. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right) y = 1$.

Exercice 8. *Une équation de Bernoulli*
On considère l'équation différentielle
$$y' = 2ty + ty^2 \ . \tag{E}$$
1. Montrer que toute solution de (E) sur un intervalle I, qui n'est pas identiquement nulle, ne s'annule pas sur I.
2. Montrer qu'une fonction y qui ne s'annule pas sur un intervalle I est solution de (E) sur I si et seulement si $z = \frac{1}{y}$ est solution sur I d'une équation linéaire (E').
3. Résoudre (E').
4. En déduire les solutions maximales de (E) vérifiant les conditions initiales suivantes: $y(0) = -1$, $y(0) = 1$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et une constante $k > 0$. On considère l'équation différentielle
$$y' - ky = f(t) \ . \tag{E}$$
1. Ecrire la solution générale de (E) à l'aide d'une intégrale.

2. Supposons f périodique de période $\omega > 0$.

   (a) Montrer que si y est une solution de (E), $t \longmapsto y(t+\omega)$ est aussi une solution de (E). En déduire qu'une solution y de (E) est périodique de période ω si et seulement si $y(\omega) = y(0)$. *(On pourra penser au théorème de Cauchy–Lipschitz).*

   (b) En déduire que (E) admet une unique solution périodique de période ω.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle d'inconnue $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ suivante :

$$X' = A(t)X \qquad \text{avec} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}. \tag{S}$$

1. Montrer que les fonctions $X_1(t) = e^{t^2}\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$ et $X_2(t) = e^{t^2}\left(\begin{smallmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{smallmatrix}\right)$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (S).

2. Montrer que $\{X_1, X_2\}$ est une base de l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 11. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe un réel λ et une matrice inversible P tels que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système différentiel $Y' = TY$.

3. En déduire les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$.

4. En déduire les solutions réelles du système différentiel

$$X' = AX + B(t) \quad \text{avec} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

1. Résoudre les systèmes différentiels $Y' = AY$ pour les différentes matrices A. On donnera l'expression des solutions réelles.

$$(H_1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (H_2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2. A l'aide de la question précédente et de la méthode de la variation de la constante, résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x + 2y + e^{-t} \\ y' &=& 2x + y + 1 \end{array} \right. \qquad\qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x - y \\ y' &=& 5x - y + \cos 2t \end{array} \right.$$

Exercice 13. *Exponentielle de matrice*
On considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\exp(tA_1)$ pour t réel.
   On utilisera la réduction de A_1 effectuée dans l'exercice 12.

2. Calculer $\exp(tA_2)$ pour t réel.
   On utilisera la réduction de A_2 effectuée dans l'exercice 11 et on écrira $T = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente.

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

$$y'' + 3y' + 2y = te^{-t} \ . \tag{E$_1$}$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $(at^2 + bt + c) \cdot e^{-t}$.

$$y'' - 2y' + 2y = \cos t \ . \tag{E$_2$}$$

On cherchera une solution particulière sous la forme $\alpha \cos t + \beta \sin t$.

Exercice 15. *Méthode de réduction de l'ordre*
On veut résoudre l'équation différentielle

$$(1 + t)y'' - 2y' + (1 - t)y = 0 \tag{H}$$

sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.

1. Chercher une solution particulière de (H) sous la forme $y_1(x) = e^{at}$ où a est réel.

2. Chercher une solution de (H) linéairement indépendante de y_1 sous la forme $y = y_1 v$.
   On montrera que v' est solution d'une équation du 1er ordre.

3. Donner toutes les solutions de (H) sur les intervalles considérés.

Exercice 16. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2 y'' + xy' + y = 0$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ à l'aide du changement de variable $x = e^t$.
   Indication : *On montrera que $x \longmapsto y(x)$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $t \longmapsto z(t) = y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.*

2. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale : $(y(1), y'(1)) = (0, 1)$.