FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

LE GROUPE LINÉAIRE SUR LES CORPS FINIS

Exercice 1 (Centre).

(1) Montrer qu'un endomorphisme qui préserve toutes les droites vectorielles est une homothétie.

(2) Montrer que le centre
$$\mathrm{Z(GL_n(\mathbb{K})) := \{M \in GL_n(\mathbb{K}) \mid PM = MP,\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K})\}}$$
de $GL_n(\mathbb{K})$ est réduit aux homothéties $x \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

(3) Démontrer que le centre $\mathrm{Z(SL_n(\mathbb{K}))}$ de $\mathrm{SL_n(\mathbb{K})}$ vérifie $\mathrm{Z(SL_n(\mathbb{K})) = Z(GL_n(\mathbb{K})) \cap SL_n(\mathbb{K})}$ et qu'il est isomorphe aux racines n^{e} de l'unité : $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda^n = 1\}$.

(4) Montrer que le cardinal de $\mathrm{PSL_n(\mathbb{F}_q)}$ est
$$\mathrm{|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}}{pgcd(n, q-1)}}\ .$$

Exercice 2 (Corps finis).

(1) Peut-on plonger le corps $\mathbb{F}_4$ à 4 éléments dans le corps $\mathbb{F}_8$ à 8 éléments ?

(2) Décrire le groupe additif $(\mathbb{F}_8, +)$.

(3) Décrire le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_8^*, \times)$.

(4) Écrire le corps $\mathbb{F}_8$ à 8 éléments comme un corps de rupture.

(5) Donner un isomorphisme entre
$$\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^3+X+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^3+X^2+1)}\ .$$

(6) Dans le modèle $\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^3+X+1)}$ de $\mathbb{F}_8$, on note x la classe de X. Calculer l'inverse de x^2.

Exercice 3 (Isomorphismes exceptionnels).

(1) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathbb{A}_5$.

Indication : le sous-groupe de cardinal 60 de $\mathbb{S}_5$ est $\mathbb{A}_5$.

(2) Montrer que $PGL_2(\mathbb{F}_5) \cong \mathbb{S}_5$.

Indication : le sous-groupe d'indice 6 de $\mathbb{S}_6$ est $\mathbb{S}_5$.

Exercice 4 (Combinatoire des espaces vectoriels sur un corps fini).

(1) Montrer que $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = |\mathbb{P}\left({\mathbb{F}_q}^{n+1}\right)| = 1 + q + \cdots + q^n$.

(2) Calculer le nombre de systèmes de n vecteurs linéairement indépendants de ${\mathbb{F}_q}^m$.

(3) Calculer le nombre d'applications surjectives de ${\mathbb{F}_q}^m$ dans ${\mathbb{F}_q}^n$.

✉ Bruno Vallette : vallette@math.univ-paris13.fr
☞ Page internet du cours : www.math.univ-paris13.fr/∼vallette/