MASTER 2 : OPÉRADES ET ALGÈBRE HOMOTOPIQUE 2017-2018

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE BIS

Exercice 1 (Fonctorialité). Soient $\mathscr{C} := (C, d_C, \Delta)$ une cogèbre coassociative différentielle graduée et $\mathscr{A} := (A, d_A, \mu)$ une algèbre associative différentielle graduée. Soient $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ et $\alpha' : \mathscr{C}' \to \mathscr{A}'$ deux morphismes tordants. Soient $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ et $g : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ deux morphismes de cogèbres coassociatives différentielles graduées et d'algèbres associatives différentielles graduées respectivement.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circledast"] & \mathscr{A} \arrow[d, "g"] \\ \mathscr{C}' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathscr{A}' \end{tikzcd}$$

(1) Montrer que $g \circ \alpha \in \mathrm{Tw}(\mathscr{C}, \mathscr{A}')$ et que $\alpha' \circ f \in \mathrm{Tw}(\mathscr{C}, \mathscr{A}')$.

(2) Montrer que la notion de morphisme tordant définit un foncteur

$$\mathsf{dga\ coalg}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{dga\ alg} \to \mathsf{Ens} \quad .$$

(3) Lorsque le diagramme $\circledast$ commute, on dit que *les deux morphismes f et g sont compatibles avec les morphismes tordants α et α'*. Montrer que, dans ce cas, $f \otimes g$ est un morphisme de complexes de chaînes

$$f \otimes g \;\;:\;\; \mathscr{C} \otimes_\alpha \mathscr{A} \to \mathscr{C}' \otimes_\alpha \mathscr{A}' \ .$$

Exercice 2 (Cogèbre conilpotente).
Donner un exemple de cogèbre coassociative qui n'est pas conilpotente.

Exercice 3 (Suspension vs désuspension).
On considère le module gradué $V := \mathbb{K}s$ de dimension 1 concentré en degré 1, c'est-à-dire $|s| = 1$. On le munit d'un produit binaire $\mu : V^{\otimes 2} \to V$ défini par $\mu(s, s) := s$.

(1) Est-ce que (V, μ) est une algèbre associative graduée ?

(2) On considère maintenant le dual linéaire $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ de V, qui est un module gradué de dimension 1 concentré en degré -1 et engendré par l'application $s^{-1} : s \mapsto 1$.
Décrire la transposée $\Delta := {}^t\mu$, c'est-à-dire calculer $\Delta(s^{-1})$.

Exercice 4 (Dualité algèbre-cogèbre).
Soient V et W deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et on considère leurs espaces duaux $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ et $W^* := \mathrm{Hom}(W, \mathbb{K})$ respectivement.

(1) Donner un critère pour que l'application linéaire

$$\begin{aligned}\varphi \ : \ V^* \otimes W^* &\to (V \otimes W)^* \\ f \otimes g &\mapsto \big(v \otimes w \mapsto f(v) \otimes g(w)\big)\end{aligned}$$

soit un isomorphisme.

(2) Montrer que le dual linéaire (C^*, μ) d'une cogèbre coassociative (C, Δ) est un algèbre associative, où

$$\mu : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\varphi} (C \otimes C)^* \xrightarrow{{}^t\Delta} C^* \ .$$

(3) Montrer que le dual linéaire (A^*, Δ) d'une algèbre associative de dimension finie (A, μ) est une cogèbre coassociative, où

$$\Delta : A^* \xrightarrow{{}^t\mu} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\varphi^{-1}} A^* \otimes A^* \ .$$

(4) Les cogèbres obtenues ainsi sont-elles conilpotentes ?

(5) Donner un exemple d'algèbre associative pour laquelle la construction de la question (3) ne fournit pas une cogèbre coassociative.

✍

Exercice 5 (Dérivation et codérivation de carré nul). Soit V un module gradué.

(1) Décrire les dérivations $d : \bar{\mathrm{T}}(V) \to \bar{\mathrm{T}}(V)$ de carré nul, c'est-à-dire $d^2 = 0$, en terme d'applications $V \to V^{\otimes n}$, pour $n \geqslant 1$.

(2) Décrire les codérivations $d : \bar{\mathrm{T}}^c(V) \to \bar{\mathrm{T}}^c(V)$ de carré nul, c'est-à-dire $d^2 = 0$, en terme d'applications $V^{\otimes n} \to V$, pour $n \geqslant 1$.

(3) Décrire les codérivations $d : \bar{\mathrm{T}}^c(sV) \to \bar{\mathrm{T}}^c(sV)$ de carré nul, c'est-à-dire $d^2 = 0$, en terme d'applications $V^{\otimes n} \to V$, pour $n \geqslant 1$. (Attention : nous n'avons volontairement *pas* écrit "en terme d'applications $(sV)^{\otimes n} \to sV$").

✍

Exercice 6 (Constructions bar et cobar). Soit (C, d_C, Δ) une cogèbre coassociative différentielle graduée. On considère l'unique dérivation d_1 de l'algèbre libre $\bar{\mathrm{T}}(s^{-1}C)$ qui étend

$$s^{-1}C \xrightarrow{d_{s^{-1}C}} s^{-1}C \rightarrowtail \bar{\mathrm{T}}(s^{-1}C) \ .$$

On considère l'unique dérivation d_2 de l'algèbre libre $\bar{\mathrm{T}}(s^{-1}C)$ qui étend

$$s^{-1}C \xrightarrow{\Delta} s^{-1}C \otimes C \xrightarrow{s^{-1}} s^{-1}C \otimes s^{-1}C \rightarrowtail \bar{\mathrm{T}}(s^{-1}C) \ .$$

(1) Montrer que la dérivation $d_1 - d_2$ est de carré nul : $(d_1 - d_2)^2 = 0$.

(2) Soit (A, d_A, μ) une algèbre associative différentielle graduée. On considère l'unique codérivation d_1 de la cogèbre conilpotente colibre $\bar{\mathrm{T}}^c(sA)$ qui étend

$$\bar{\mathrm{T}}^c(sA) \twoheadrightarrow sA \xrightarrow{d_{sA}} sA \ .$$

On considère l'unique codérivation d_2 de cogèbre conilpotente colibre $\bar{\mathrm{T}}^c(sA)$ qui étend

$$\bar{\mathrm{T}}^c(sA) \twoheadrightarrow (sA)^{\otimes 2} \xrightarrow{s^{-1}} sA \otimes A \xrightarrow{\mu} sA \ .$$

Montrer que la codérivation $d_1 + d_2$ est de carré nul : $(d_1 + d_2)^2 = 0$.

(3) On rappelle que l'on définit la *construction bar* d'une algèbre associative différentielle graduée (A, d_A, μ) par la cogèbre coassociative conilpotente différentielle graduée

$$\mathrm{B}A := \big(\bar{\mathrm{T}}^c(sA), d_1 + d_2, \Delta_{\mathrm{deconc}}\big) \ .$$

(4) Si on note les élements de la construction bar par $[a_1|\cdots|a_n] := sa_1 \otimes \cdots \otimes sa_n$, calculer $(d_1 + d_2)([a_1|\cdots|a_n])$.

(5) Démontrer la bijection suivante :

$$\mathrm{Tw}(C, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{dga\ conil\ coalg}}(C, \mathrm{B}A)\ .$$

Exercice 7 (Morphismes tordants universels). Soient $\mathscr{C} := (C, d_C, \Delta)$ une cogèbre coassociative différentielle graduée et $\mathscr{A} := (A, d_A, \mu)$ une algèbre associative différentielle graduée.

(1) Décrire le morphisme tordant universel $\iota : \mathscr{C} \to \Omega\mathscr{C}$ ainsi que l'unité d'adjonction $\upsilon : \mathscr{C} \to \mathrm{B}\Omega\mathscr{C}$.

(2) Décrire le morphisme tordant universel $\pi : \mathrm{B}\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ ainsi que la counité d'adjonction $\epsilon : \Omega\mathrm{B}\mathscr{A} \to A$.

(3) Montrer que tout morphisme tordant $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ se factorise de manière de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega\mathscr{C} \arrow[dr, dotted, "g_\alpha"] & \\
\mathscr{C} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dotted, "f_\alpha"'] & & \mathscr{A} \\
 & \mathrm{B}\mathscr{A} \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd},$$

où f_α est un morphisme de cogèbres différentielles graduées et où g_α est un morphisme d'algèbres différentielles graduées.

Exercice 8 (Théorème fondamental des morphismes tordants).
On travaille dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules différentiels gradués *muni d'un poids compatible.* C'est-à-dire que chaque complexe de chaînes $(V_\bullet, d)$ est somme directe de sous-complexes de chaînes indicés par ce poids, $V_\bullet := \oplus_{n\in\mathbb{N}} V_\bullet^{(n)}$; dit autrement la différentielle d préserve ce poids, $d : V_k^{(n)} \to V_{k-1}^{(n)}$. On considère alors des algèbres associatives différentielles graduées munies d'un poids compatible : on demande en outre que leur produit préserve ce poids. De même, on considère aussi des cogèbres coassociatives différentielles graduées munies d'un poids compatible : on demande que leur coproduit préserve ce poids. On dit qu'un poids d'une algèbre ou d'une cogèbre est *connexe* si le complexe de chaînes sous-jacent se décompose sous la forme suivante :

$$V_\bullet = \mathbb{K}1 \oplus V_\bullet^{(1)} \oplus V_\bullet^{(2)} \oplus \cdots\ .$$

(1) Montrer que la construction bar d'une algèbre associative différentielle graduée à poids connexe peut être munie d'un poids connexe. Dualement, montrer que la construction cobar d'une cogèbre coassociative différentielle graduée à poids connexe peut être munie d'un poids connexe.

(2) On admettra le lemme fondamental suivant.

Lemme (de comparaison). *Soient $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux cogèbres coassociatives différentielles graduées coaugmentées et $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ deux algèbres associatives différentielles graduées augmentées, toutes les quatres à poids connexe. Soient $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ et $\alpha' : \mathscr{C}' \to \mathscr{A}'$ deux morphismes tordants qui respectent le poids et qui s'annulent sur* 1. *Soient $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ et $g : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ deux morphismes de cogèbres et d'algèbres qui respectent le poids et qui sont compatibles avec les morphismes tordants.*

Si deux des morphismes parmi f, g et $f \otimes g$ (ou $g \otimes f$) sont des quasi-isomorphismes, alors le troisième l'est aussi.

Avec les mêmes hypothèses que le lemme, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) le produit tensoriel tordu à droite $\mathscr{C} \otimes_\alpha \mathscr{A}$ est acyclique,

(b) le produit tensoriel tordu à gauche $\mathscr{A} \otimes_\alpha \mathscr{C}$ est acyclique,

(c) le morphisme de cogèbres différentielles graduées $f_\alpha : \mathscr{C} \to \mathrm{B}\mathscr{A}$ est un quasi-isomorphisme,

(d) le morphisme d'algèbres différentielles graduées $g_\alpha : \Omega\mathscr{C} \to \mathscr{A}$ est un quasi-isomorphisme.

✍

Exercice ☢ 9 (Itération de la construction bar). Soit V un $\mathbb{K}$-module et on considère l'unique morphisme de cogèbres coassociatives

$$\sqcup\!\sqcup : \mathrm{T}^c(V) \otimes \mathrm{T}^c(V) \to \mathrm{T}^c(V)\,,$$

dont la projection sur V est nulle sauf pour $(V \otimes \mathbb{K}) \oplus (\mathbb{K} \otimes V)$ où

$$\sqcup\!\sqcup(v, 1) := v \quad \text{et} \quad \sqcup\!\sqcup\,(1, v) := v\ .$$

(1) Montrer que le produit $\sqcup\!\sqcup$ est associatif, commutatif et unitaire.

(2) Décrire les valeurs prises par ce produit sur des éléments.

(3) Montrer que si $\mathscr{A} = (A, d, \mu, \varepsilon)$ est une algèbre associative *commutative* augmentée différentielle graduée, alors sa bar construction $(\mathrm{B}A, d_1 + d_2, \sqcup\!\sqcup)$ est encore une algèbre associative commutative augmentée différentielle graduée.

(4) Décrire alors la construction bar double $\mathrm{BB}\mathscr{A}$.

✍

Exercice ☢ 10 (Algèbre symétrique et cogèbre extérieure). Soit V un $\mathbb{K}$-module libre de dimension finie. On considère l'algèbre symétrique $S(V)$ sur V, qui n'est rien d'autre que l'algèbre commutative libre sur V ou encore l'algèbre des polynômes sur V. La cogèbre coassociative graduée définie par duale linéaire de l'algèbre extérieure sur la suspension de V :

$$\Lambda^c(sV) := \big(\Lambda(s^{-1}V^*)\big)^*$$

(1) Décrire la cogèbre $\Lambda^c(sV)$.

(2) Montrer que l'application linéaire

$$\kappa\ :\ \Lambda^c(sV) \twoheadrightarrow sV \xrightarrow{s^{-1}} V \rightarrowtail S(V)$$

est un morphisme tordant.

(3) Montrer que le produit tensoriel tordu associé $\Lambda^c(sV) \otimes_\kappa S(V)$ est acyclique.

✍

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr` .
☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/~vallette/` .