FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

TOPOLOGIE DES ENDOMORPHISMES ET EXPONENTIELLE

Exercice 1 (Normes).

Montrer les formules suivantes sur les normes subordonnées.

$$|||M|||_1 = \sup_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|m_{i,j}|\right) \quad \text{et} \quad |||M|||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|m_{i,j}|\right) .$$

———— ✍ ————

Exercice 2 (Polynôme caractéristique).

(1) Soit $\mathbb{K}$ un corps de cardinal infini. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ donner une formule reliant χ_{AB} et χ_{BA}.

———— ✍ ————

Exercice ☢ 3 (Matrice à valeurs propres distinctes).

Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres distinctes est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Indication : On pourra considérer le discriminant de χ_A, c'est-à-dire le résultant de χ_A et de χ'_A.

———— ✍ ————

Exercice 4 (Connexité et projecteurs).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $r \in \{0, \dots, n\}$

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_r$ des projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r est connexe.

(2) Montrer que les composantes connexes de l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les $\mathcal{P}_r$, pour $r \in \{0, \dots, n\}$.

———— ✍ ————

Exercice 5 (Matrices réelles diagonalisables).

Est-ce que l'ensemble des matrices diagonalisables à coefficients réels est dense dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles ?

Indication : Considérer des matrices réelles d'un certain type.

———— ✍ ————

Exercice 6 (Exponentielle de matrices).

Calculer l'exponentielle de la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

———— ✍ ————

Exercice 7 (Limite et exponentielle).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tM} = 0 .$$

———— ✍ ————

Exercice 8 (Sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ un morphisme continu de groupes.

(1) Soit $\alpha > 0$. Vérifier que

$$\left(\int_0^\alpha f(s)\mathrm{d}s \right) f(t) = \int_t^{t+\alpha} f(s)\mathrm{d}s ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que si α est assez petit, la valeur moyenne de f sur $[0, \alpha]$, i.e.

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(s)\mathrm{d}s$$

est une matrice inversible.

(3) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$f'(t) = f'(0)f(t) ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) Conclure que

$$f(t) = e^{tf'(0)} ,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

———— ✍ ————

Exercice 9 (Déterminant, trace et exponentielle).

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det(e^A) = e^{tr\, A} .$$

———— ✍ ————

Exercice 10 (Exponentielle et polynôme).

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $e^A = P_A(A)$.

(2) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $e^A = P(A)$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

———— ✍ ————

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr`

☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/~vallette/`