FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

OPÉRADES

Exercice 1 (Définition d'une opérade partielle). Dans la définition d'une opérade avec les produits de composition partiels $\circ_i$, décrire le second axiome d'équivariance avec le groupe symétrique, c'est-à-dire, étant donné une permutation $\sigma \in \mathbb{S}_k$, décrire la permutation $\widetilde{\sigma} \in \mathbb{S}_{k+l-1}$ qui vérifie

$$(f^{\sigma}) \circ_i g = (f \circ_{\sigma(i)} g)^{\widetilde{\sigma}} ,$$

pour $f \in \mathcal{P}(k)$ et $g \in \mathcal{P}(l)$.

———— ✍ ————

Exercice 2 (Opérade de suspension). On considère le module gradué $\mathbb{K}s$ de dimension 1 concentré en degré 1, c'est-à-dire $|s| = 1$.

(1) Décrire l'opérade non-symétrique des endomorphismes $\mathrm{End}_{\mathbb{K}s}$.

(2) Décrire la catégorie des algèbres sur cette opérade non-symétrique.

(3) Décrire l'opérade (symétrique) des endomorphismes $\mathrm{End}_{\mathbb{K}s}$.

(4) Décrire la catégorie des algèbres sur cette opérade (symétrique).

———— ✍ ————

Exercice 3 (Des opérades aux algèbres pré-Lie).
Soit $\mathcal{P} := (\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \circ_i, \mathrm{id})$ une opérade. Montrer que $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(n), \star\right)$, où

$$f \star g := \sum_{i=1}^{k} f \circ_i g ,$$

pour $f \in \mathcal{P}(k)$, est une algèbre pré-Lie, à savoir que l'associateur de $\star$ est symétrique à droite.

———— ✍ ————

Exercice 4 (Opérade libre). On considère le $\mathbb{N}$-module $\mathcal{T}$ engendré en arité n par les arbres planaires à n entrées. En arité 0, on prend le module trivial 0. Le module d'arité 1 est de dimension 1 avec pour base l'arbre trivial $|$. On munit $\mathcal{T}$ des compositions partielles $T \circ_i S$ qui consistent à greffer la racine de l'arbre S sur la i^{e} entrée de l'arbre T.

(1) Montrer que la donnée $(\mathcal{T}, \circ_i, |)$ est une opérade non-symétrique.

(2) Montrer qu'il s'agit de l'opérade non-symétrique libre sur $\mathbb{N}$-module $(0, 0, c_2, c_3, \ldots)$ de dimension 1 en arité $n \geqslant 2$.

On considère le $\mathbb{N}$-module $\mathcal{T}_{sym}$ engendré en arité n par les arbres à n entrées vus dans l'espace et dont les feuilles sont indicées bijectivement par $\{1, \ldots, n\}$. On le munit des compositions partielles $T \circ_i S$ qui consistent à greffer la racine de l'arbre S sur la i^{e} entrée de l'arbre T, à garder les indices $1, \ldots, i-1$ de l'arbre T, à décaller de $i-1$ des indices de l'arbre S et à décaller les indices de l'arbre T supérieures à $i+1$ du nombre de feuilles de l'arbre S.

(3) Montrer que la donnée $(\mathcal{T}_{sym}, \circ_i, |)$ est une opérade (symétrique).

(4) Montrer qu'il s'agit de l'opérade (symétrique) libre sur $\mathbb{S}$-module $(0, 0, tr_2, tr_3, \ldots)$ formé de la représentation triviale en arité $n \geqslant 2$.

(5) Décrire l'opérade (symétrique) libre sur $\mathbb{S}$-module $(tr_0, tr_1, tr_2, tr_3, \ldots)$ formé de la représentation triviale en arité $n \in \mathbb{N}$.

✍

Exercice 5 (Algèbre enveloppante). Soit $f : \mathscr{P} \to \mathbb{Q}$ un morphisme d'opérades.

(1) Montrer que f induit un foncteur
$$f^* : \mathbb{Q} - \mathsf{alg} \to \mathscr{P} - \mathsf{alg}$$
de la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres vers celle des $\mathscr{P}$-algèbres.

Soit A une algèbre sur l'opérade $\mathscr{P}$. Nous utiliserons ici la définition donnée en terme de module à gauche $\gamma_A : \mathscr{P} \circ A \to A$ dans la catégorie monoïdale $(\mathbb{S} - \mathsf{mod}, \circ)$. Le morphisme f induit une structure de module à droite
$$\rho : \mathbb{Q} \circ \mathscr{P} \xrightarrow{\mathbb{Q} \circ f} \mathbb{Q} \circ \mathbb{Q} \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{Q}}} \mathbb{Q}$$
de $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{Q}$.

(2) Montrer que le conoyau noté $f_!(A)$ (ou $\mathbb{Q} \circ_{\mathscr{P}} A$) de l'application
$$\rho \circ \mathrm{id}_A - \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \circ \gamma_A : \mathbb{Q} \circ \mathscr{P} \circ A \to \mathbb{Q} \circ A$$
est une $\mathbb{Q}$-algèbre et que cette construction fournit un foncteur
$$f_! : \mathscr{P} - \mathsf{alg} \to \mathbb{Q} - \mathsf{alg}$$
adjoint à gauche du foncteur f^*.

(3) Que pouvez-vous dire du cas $\mathscr{P} = I$, l'opérade triviale, et de $f : I \to \mathbb{Q}$ le morphisme d'unité de $\mathbb{Q}$?

✍

Exercice 6 (L'opérade symétrique Ass). On considère le $\mathbb{S}$-module $\mathrm{Ass}(n) := \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ formé des représentations régulières du groupe symétrique pour $n \in \mathbb{N}$. Pour $\sigma \in \mathbb{S}_k$ et $\tau \in \mathbb{S}_l$, on définit le produit de composition partiel $\sigma \circ_i \tau$ par la permutation de $\mathbb{S}_{k+l-1}$ suivante :

- ◇ Pour $1 \leqslant n \leqslant i - 1$,
$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \begin{cases} \sigma(n) & \text{si } \sigma(n) < \sigma(i)\,, \\ \sigma(n) + l - 1 & \text{si } \sigma(n) > \sigma(i)\,. \end{cases}$$
- ◇ Pour $1 \leqslant n \leqslant i - 1$,
$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \tau(n - i + 1) + \sigma(i) - 1\ .$$
- ◇ Pour $i + l \leqslant n \leqslant k + l - 1$,
$$(\sigma \circ_i \tau)(n) := \begin{cases} \sigma(n-l) & \text{si } \sigma(n-l) < \sigma(i)\,, \\ \sigma(n-l) + l - 1 & \text{si } \sigma(n-l) > \sigma(i)\,. \end{cases}$$

(1) Montrer que ces données définissent une opérade (symétrique).

(2) Montrer que la catégorie des algèbres sur l'opérade Ass est la catégorie des algèbres associatives.

✍

Exercice 7 (Opérades vs opérades non-symétriques). On définit un foncteur oubli $\sqcup : \mathsf{Op} \to \mathsf{Op\ ns}$ des opérades vers les opérades non-symétriques en oubliant l'action des groupes symétriques.

(1) Quelle est l'image de l'opérade Com codant les algèbres commutatives par ce foncteur ?

(2) Soit $(\mathcal{P}(n), \circ_i)$ une opérade non-symétrique. On considère le $\mathbb{S}$-module défini par $\mathcal{P}(n) \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ que l'on munit de produits de composition partiels suivants :

$$(\mu \otimes \sigma) \circ_i (\nu \otimes \tau) := (\mu \circ_{\sigma(i)} \nu) \otimes (\sigma \circ_i \tau)$$

avec les notations de l'exercice précédent. Montrer que ces données forment une opérade symétrique.

(3) La construction de la question précédente induit un foncteur $\mathrm{Reg} : \mathsf{Op\ ns} \to \mathsf{Op}$. Quelle propriété satisfait-il avec le foncteur oubli $\sqcup : \mathsf{Op} \to \mathsf{Op\ ns}$?

✍

✉ Bruno Vallette : vallette@math.univ-paris13.fr .
☞ Page internet du cours : www.math.univ-paris13.fr/~vallette/ .