FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 5

FORMES QUADRATIQUES

Exercice 1 (Polynômes homogènes)**.**

(1) Soient f et g deux formes linéaires indépendantes sur un espace de dimension finie. On considère la forme quadratique $q(x) := f(x)g(x)$. Quel est le rang de q ? Sur $\mathbb{R}$, calculer la signature de q.

(2) Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des scalaires non nuls. Montrer que le polynôme $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2$ est irréductible sur $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$.

———— ✍ ————

Exercice 2 (Signature)**.**

Montrer que les applications suivantes sont des formes quadratiques sur $M_n(\mathbb{R})$, donner leur forme polaire et calculer leur signature.

(1) $q : A \mapsto \mathrm{tr}(A)^2$.

(2) $q : A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA)$.

(3) $q : A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$.

———— ✍ ————

Exercice 3 (Symétrique ou antisymétrique)**.**

Soit $\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire vérifiant

$$\Phi(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(y,x) = 0 \;, \quad \text{pour } x, y \in E \;.$$

Montrer que Φ est soit symétrique, soit antisymétrique.

———— ✍ ————

Exercice ☢ 4 (Détermination de la signature)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on appelle *mineur principal d'ordre* k le déterminant

$$\Delta_k(A) := \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} .$$

(1) Soit A une matrice symétrique telle que $\Delta_k(A) \neq 0$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que A est congrue à une matrice diagonale avec pour valeurs (sur la diagonale) :

$$\Delta_1(A),\ \frac{\Delta_2(A)}{\Delta_1(A)},\ \ldots,\ \frac{\Delta_n(A)}{\Delta_{n-1}(A)} \ .$$

(2) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en déduire une méthode pratique pour déterminer la classe de congruence d'une matrice symétrique.

———— ✍ ————

Exercice 5 (Matrice symétrique définie positive)**.**

(1) Soit une application continue

$$A \ : \ [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto A(t) = [a_{i,j}(t)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \ ,$$

telle que, pour tout $t \in]0,1[$, $A(t)$ est symétrique définie positive. Montrer que la matrice

$$M = \int_0^1 A(t)dt = \left(\int_0^1 a_{i,j}(t)dt \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est symétrique définie positive.

(2) Montrer que la matrice

$$M := \left(\frac{1}{1+|i-j|} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est définie positive.

Exercice 6 (Norme triple)**.** Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$|||M|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} \ ,$$

où $\rho(N)$ est la plus grande valeur propre de N.

Exercice 7 (Infinité de nombres premiers)**.**

(1) Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que $\overline{-3}$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \ [6]$.

(2) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6n+1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr`
☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/~vallette/`