FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 5

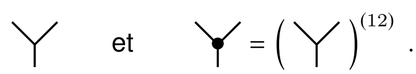
CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5

✍

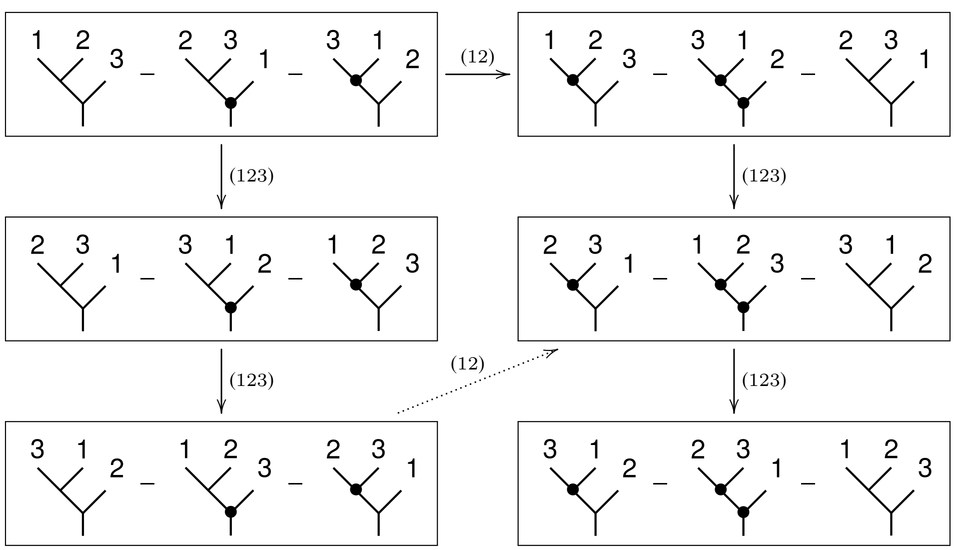
Une *algèbre de Leibniz (droite)* est un $\mathbb{K}$-module muni d'un produit (sans symétrie particulière à priori) $[\,,\,] : A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant la relation de dérivation (droite)

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [[x, z], y] \ .$$

L'opérade binaire quadratique Leib codant les algèbres de Leibniz est engendrée linéairement par deux opérations que l'on note respectivement par



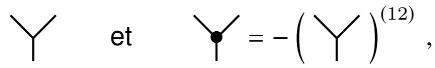
Une base $\mathbb{K}$-linéaire du $\mathbb{S}_3$-module des relations $\mathrm{R}_{\mathrm{Leib}}$ dans $\mathcal{T}\left(\ , \ \right)(3)$ est donnée par



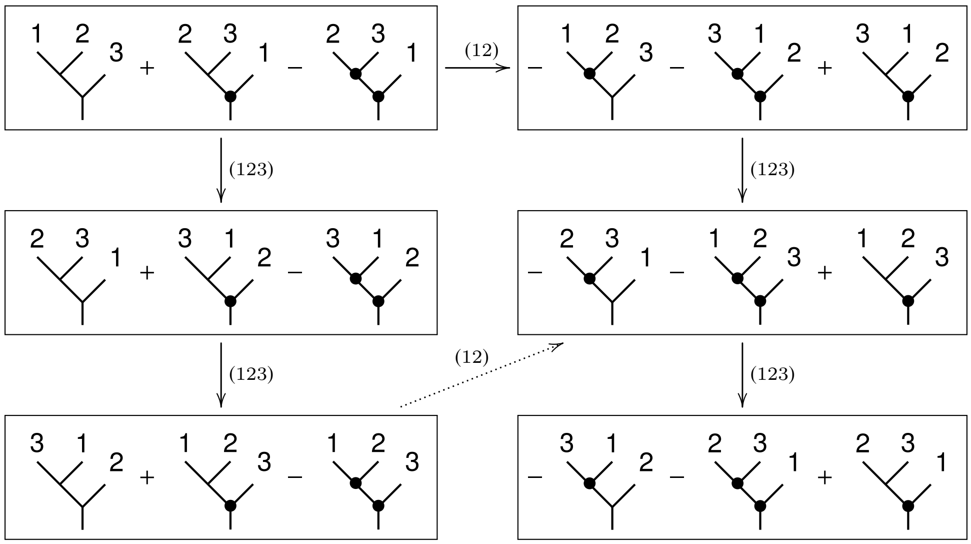
Une *algèbre de Zinbiel (droite)* est un $\mathbb{K}$-module muni d'un produit (sans symétrie particulière à priori) $\diamond : A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant les relations

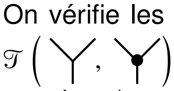
$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z + z \diamond y) \ .$$

On considère l'opérade binaire quadratique $\mathscr{P}$ engendrée linéairement par deux opérations que l'on note respectivement par

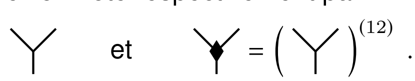


avec pour relations le $\mathbb{S}_3$-module $\mathrm{R}_{\mathscr{P}}$ ayant pour base $\mathbb{K}$-linéaire :



On vérifie les 6*6=36 calculs qui montrent que $\mathrm{R}_{\mathscr{P}} = \mathrm{R}_{\mathrm{Leib}}^{\perp}$ pour le produit scalaire défini sur (3). (Nous n'avons pas écrit $*$ sur les générateurs de l'opérade $\mathscr{P}$ pour alléger les notations.)

Au final, l'opérade binaire quadratique Zinb codant les algèbres de Zinbiel est engendrée linéairement par deux opérations que l'on note respectivement par



Le morphisme d'opérades binaires quadratiques $\mathrm{Zinb} \to \mathscr{P}$ défini par

est un isomorphisme ce qui montre que $\mathrm{Leib}^! \cong \mathrm{Zinb}$ et donc que $\mathrm{Zinb}^! \cong \mathrm{Leib}$ par dualité.

———— ✍ ————

✉ Bruno Vallette : vallette@math.univ-paris13.fr .