MASTER 2 : OPÉRADES ET ALGÈBRE HOMOTOPIQUE 2017-2018

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 5

DUALITÉ DE KOSZUL DES OPÉRADES

Exercice 1 (Produit de composition tordu).

(1) Montrer que la partie d'arité n du complexe de Koszul $\mathrm{As}^{¡} \circ_{\kappa} \mathrm{As}$ est isomorphe au complexe de chaînes engendré par les éléments de la forme $[i_1|\cdots|i_k]$ avec $i_1+\cdots+i_k=n$ et $i_j \geqslant 1$ de degré $k-1$ et muni de la différentielle
$$\mathrm{d}\left([i_1|\cdots|i_k]\right)=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}[i_1|\cdots|i_j+i_{j+1}|\cdots i_k]\ .$$

(2) Montrer que le complexe de Koszul est acyclique, c'est-à-dire qu'il n'admet qu'un seul groupe d'homologie non nul : $\mathrm{H}_0(\mathrm{As}^{¡} \circ_{\kappa} \mathrm{As}(1)) = \mathbb{K}$.

(3) En déduire que l'opérade non-symetrique As est de Koszul.

Exercice 2 (Bar construction opéradique).
Soit $\mathscr{P}$ une opérade différentielle graduée augmentée.

(1) Décrire la construction bar opéradique $\mathrm{B}\mathscr{P}$.

(2) Décrire la construction cobar-bar $\Omega\mathrm{B}\mathscr{P}$.

(3) Décrire la catégorie des algèbres différentielles graduées sur l'opérade $\Omega\mathrm{B}\mathscr{P}$.

Exercice 3 (Duales de Koszul non-symétriques).

(1) Montrer que $\mathrm{Dend}^{!} = \mathrm{Dias}$ et que $\mathrm{Dend} = \mathrm{Dias}^{!}$.

(2) Décrire un produit associatif non-trivial sur les produit tensoriel $A \otimes B$ d'une algèbre diassociative A et d'une algèbre dendriforme B.

(3) Décrire la notion d'algèbre dendriforme à homotopie près, c'est-à-dire la notion d'algèbre sur l'opérade non-symétrique $\Omega\mathrm{Dend}^{¡}$.

(4) Calculer l'opérade non-symétrique duale de Koszul de l'opérade non-symétrique Dupl qui code les algèbres dupliciales.

Exercice 4 (Leibniz et Zinbiel). Une *algèbre de Leibniz (droite)* est un $\mathbb{K}$-module muni d'un produit (sans symétrie particulière à priori) $[\,,\,] : A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant la relation de dérivation (droite)
$$[[x,y],z]=[x,[y,z]]+[[x,z],y]\ .$$
Une *algèbre de Zinbiel (droite)* est un $\mathbb{K}$-module muni d'un produit (sans symétrie particulière à priori) $\diamond : A^{\otimes 2} \to A$ vérifiant les relations
$$(x\diamond y)\diamond z = x\diamond(y\diamond z+z\diamond y)\ .$$

(1) Montrer que les opérades Leib et Zinb codant respectivement les algèbre de Leibniz et les algèbres de Zinbiel sont duales de Koszul l'une de l'autre.

(2) Décrire un crochet de Lie non-trivial sur les produit tensoriel $A \otimes B$ d'une algèbre de Leibniz A et d'une algèbre de Zinbiel B.

✍

Exercice 5 (Produit tensoriel).
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux opérades et soient A une $\mathcal{P}$-algèbre et B une $\mathbb{Q}$-algèbre.

(1) Montrer que le produit tensoriel $A \otimes B$ admet une structure naturelle non-triviale d'algèbre sur l'opérade $\mathcal{P} \otimes_H \mathbb{Q}$.

On suppose maintenant que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V, R)$ est une opérade binaire quadratique de type fini et que $\mathbb{Q} = \mathcal{P}^!$.

(2) Montrer que si $\mathcal{P}$ est non-symétrique, alors le produit tensoriel $A \otimes B$ admet une structure naturelle non-triviale d'algèbre associative.
Indication : On pourra exhiber un morphisme non-trivial d'opérades $\mathrm{As} \to \mathcal{P} \otimes_H \mathbb{Q}$.

(3) Montrer que si $\mathcal{P}$ est symétrique, alors le produit tensoriel $A \otimes B$ admet une structure naturelle non-triviale d'algèbre de Lie.
Indication : On pourra exhiber un morphisme non-trivial d'opérades $\mathrm{Lie} \to \mathcal{P} \otimes_H \mathbb{Q}$.

✍

Exercice ☢ 6 (Algèbre commutative à homotopie près).
Le morphisme d'opérade $\mathrm{Lie} \to \mathrm{Ass}$ fournit un morphisme de $\mathbb{S}_n$-module $\mathrm{Lie}(n) \to \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ pour tout $n \geqslant 1$.

(1) Montrer que le dual linéaire $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]^* \to \mathrm{Lie}^*(n)$ de ce morphisme admet pour noyau le module engendré par les n sommes, pour $1 \leqslant p \leqslant n$, des duaux linéaires des (p, q)-battages (shuffles), où $p + q = n$.

(2) Montrer qu'une Com_∞-algèbre, c'est-à-dire une algèbre sur l'opérade $\Omega \mathrm{Com}^{¡}$, est un complexe de chaînes (A, d) muni d'une structure d'A_∞-algèbre telle chaque opération $m_n : A^{\otimes n} \to A$ s'annule sur les n sommes, pour $1 \leqslant p \leqslant n$, des duaux linéaires des (p, q)-battages (shuffles), où $p + q = n$.

✍

Exercice ☢ 7 (Koszulité des opérades Com et Lie).
On travaille sur un corps de caractéristique nulle. Monter que les deux opérades Com et Lie sont de Koszul.

✉ Bruno Vallette : vallette@math.univ-paris13.fr .
☞ Page internet du cours : www.math.univ-paris13.fr/~vallette/ .