Mercredi 1er Mars : "Introduction aux espaces $\mathcal{L}_\infty$"

(Brice Le Grignou)

"Problèmes de modules formels paramétrés par des variétés"

I - Théorie de la deformation (= problèmes de modules formels)

Un tel problème : $\begin{cases} \{*\} \\ \mathfrak{g} \text{ algèbre } \mathcal{L}_\infty \text{ tangente} \end{cases}$

Concrètement. Codérivation de degré -1 de carré nul sur la cogèbre cocom colibre $\mathcal{S}^c(s\mathfrak{g})$

$\rightsquigarrow$ déterminé par la projection $\mathcal{S}(s\mathfrak{g}) \to s\mathfrak{g}$
en particulier :

$$k \to s\mathfrak{g}$$
$$s\mathfrak{g} \to s\mathfrak{g} \quad \rightsquigarrow \text{diff sur } \mathfrak{g}$$
$$s\mathfrak{g} \otimes s\mathfrak{g} \to s\mathfrak{g}$$

On a un morphisme $k \to \mathcal{S}(s\mathfrak{g})$

$\{*\}$ espace pointé

II - $\mathcal{L}_\infty$- espaces

Def : ($\mathcal{L}_\infty$ - algèbre courbé sur une algèbre com, attention subtilité)

Soit A une algèbre dg com unit

Soit $I \subset A$ un dg-idéal nilpotent

Une (A,I) $\mathcal{L}_\infty$-algèbre courbé est :
i) Un A^{gr}- module localement libre de rang fini
ii) Une codérivation de carré nul, de degré -1 sur $\mathcal{S}^c_A(s\mathfrak{g})$, + compatibilité à d_A

⚠ On autorise le terme $A \to s\mathfrak{g}$ à être non nul $\rightsquigarrow$ la courbure

iii) mod I, la courbure est nulle.

Rq : Comme $\mathfrak{g}$ est libre et de dim finie, alors la structure de $\mathcal{L}_\infty$-alg courbé peut se coder sous la forme d'une derivation sur $\hat{\mathcal{S}}_A(s^{-1}\mathfrak{g}^*)$

Notation : $(\mathcal{S}^c(s\mathfrak{g}), d) =: C_*(\mathfrak{g})$ $\qquad \hat{\mathcal{S}}(s^{-1}\mathfrak{g}^*) =: C^*(\mathfrak{g})$

Rq : On a de la courbure, donc pas d'augmentation $C^*(\mathfrak{g}) \to A$
D'un point de vue géométrique, pas de section du fibré

$$\operatorname{Spec}(C^*\mathfrak{g}) \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

Def : $\mathcal{L}_\infty$ espace

C'est la donnée : i) D'une variété lisse X
ii) D'un faisceau gradué $\mathfrak{g}$ muni d'une structure de $(\Omega_X, \Omega_X^{\geq 1})$ $\mathcal{L}_\infty$ algèbre courbée

morphisme $(X,\mathfrak{g}) \to (Y,\mathfrak{g}')$

$$\begin{cases} f : X \to Y \\ f^{-1}(C^\cdot(\mathfrak{g}')) \underset{f^{-1}\Omega_Y}{\otimes} \Omega_X \longrightarrow C^\cdot(\mathfrak{g}) \end{cases}$$

III - Foncteurs de points

Motivation : Si (X,g) et (Y,g') sont des $\mathcal{L}_\infty$-espaces, on aimerait définir : "$\mathrm{Map}((X,g),(Y,g'))$"

avoir toutes les colimites

a) Cas du pb de modules formels

Foncteur : $\mathrm{dg\,Artin}^{\leq 0} \longrightarrow \mathrm{sSet}$

$\|$

$\mathbb{R}$-algèbres com unit aug de dim finie nilpotent

i) $F(\mathbb{R})$ contractile

ii) Envoie q-iso sur eq

iii) Preserve certains Pull back

Chez Hinich

F envoie les q-iso filtré sur eq, si pour $f : A \to B$ artin

$$Gr_R A \xrightarrow{q\text{-iso}} Gr_R B$$

$\downarrow$

filtration radicale

ex : dg-cogèbre cocom fibrante C

$$A \longmapsto \underset{\substack{\text{cogèbre}\\ \text{cocom}\\ \text{conil}}}{\mathrm{Map}}(A^\vee, C)$$

ne préserve pas forcément les q-iso d'anneaux artiniens

b) Variété dg nilpotentes

Def : Une var dg nil est
- Une variété lisse X
- Un faisceau de $\Omega^\bullet_X$-algèbre A de dim finie
- Un morphisme de $\Omega^\bullet_X$-algèbre $A \to \mathcal{C}^\infty_X$ de noyau nilpotent

Rq : . C'est une dg algèbre artinienne sur $\mathcal{C}^\infty_X$ mais pas sur $\Omega^\bullet_X$ (pas d'augmentation)

$\rightsquigarrow$ Courbure des $\mathcal{L}_\infty$-espaces

. Localement $H.(A)$ est concentré en degré ≥ 0

Def : morphisme

$$(X,A) \to (Y,B)$$

$$\begin{cases} f : X \to Y \\ \text{morphisme } f^{-1}\Omega_Y\text{-alg} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B) & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}\mathcal{C}^\infty_Y & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty_X \end{array}$$

C'est équivalence si
i) $f : X \to Y$ diff
ii) $f^{-1} Gr_R B \xrightarrow[q\text{-iso}]{} Gr_R A$

Ex : $(M, \mathcal{C}^\infty_M) =: M_{sm}$

$(M, \Omega_X) =: M_{dR}$

Prop : Le foncteur $\mathrm{Var} \to \mathrm{Var\ dg\ nil}$, $M \mapsto M_{sm}$ est pleinement fidèle

- Foncteur $\begin{array}{rcl} dg\,Art & \to & dg\,Var\,nil \\ A & \mapsto & (*, A) \end{array}$ est pleinement fidèle

- $\forall (M, A) \qquad M_{sm} \to (M,A) \to M_{dR}$

Definition : Un champ dérivé est un foncteur $X : dg\,Var\,nil^{op} \to s\,Set$
tq : i) X preserve les équivalence
ii) X satisfait une condition de descente
ie : Soit (M, A) une dg Var nil

$(M_i, A_{|M_i})_{i \in I}$ un recouvrement, soit $\check{C}M$ la dg var nil simpliciale

$$\check{C}M_n = \underbrace{\left(\coprod_i (M_i, A_i)\right) \times_{(M,A)} \left(\coprod_i (M_i, A_i)\right) \times \dots}_{n+1 \text{ fois}}$$

en degré 0 : $\coprod_i (M_i, A_i)$

1 : $\coprod_{ij} (M_i \cap M_j, A_{|M_i \cap M_j})$

alors cdt de descente $X(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{hocolim}(X(\check{C}M))$

$(\check{C}M \to M)$

Def : Une equivalence de champs est un morphisme de champs dérivés $F : X \to Y$
tq $\forall (M, A) \qquad F(M,A) : X(M,A) \xrightarrow{\sim} Y(M,A)$

IV Foncteur B

Def : Soit (X, g) un $\mathcal{L}_\infty$-espace on définit B_g le champs suivant

$$B_g(M,A)_n = \{ f : M \to X \mid x \in MC(f^* g \otimes I_M \otimes \Omega_n) \}$$

Rq : $B_g(M,A) = \coprod_{f : M \to X} MC.(f^* g \otimes I_M)$

Thm B_g est un champ dérivé