Conditions de Keller pour les A_∞-catégories [J. Nosa, Saint-Etienne de Tinée, 2017]

↳ "Derived invariance of higher structures on the Hochschild complex."

A_∞-cat : est un triplet

$\mathcal{C} = (I, \mathcal{C}, d_\mathcal{C})$

ens (fini) ; ∈ de $grMod^{I\times I}$; codér$^2 = 0$ sur $T^c\mathcal{C}[1]$

sans unité, courbée.

$\boxed{\text{Thm}}$ [Happel - Rickard, '87]

Soient A, B deux k-algèbres assoc unitaires

Les catégories dérivées DA et DB sont équivalentes

↳ dg A-modules/qi

alors il existe un qi $HH^\bullet(A) \cong HH^\bullet(B)$ (pas constructif)

Keller : "relèvement" sur $CH^\bullet$: (~~Assoc~~)

plus riche

↳ X dg A-B bimodule tel que $\otimes^L_A X : DA \to DB^{op}$ est une équivalence de catégorie alors

il existe un iso d'algèbres assoc $f_X : HH^\bullet(B,B) \to HH^\bullet(A,A)$

qui se relève en $C^\bullet(B,B) \to C^\bullet(A,A)$ dans la catégorie homotopique des B_∞-algèbres

En particulier, A algèbre de Koszul $\Rightarrow C^\bullet(A,A) \cong C^\bullet(A^!, A^!)$

$A^!$

$X = A \otimes A^!$

$A \circlearrowright$, $\circlearrowleft A^!$

Démo : $L_A : A \longrightarrow End_B(X)$

$a \longmapsto (x \mapsto a.x)$

$R_B : B \longrightarrow End_A(X)$

$\boxed{\text{Thm}}$ [Keller '03]

Si L_A et R_B sont des qi alors

$P_B : CC(Cat(A,X,B)) \xrightarrow{\sim} CC(B)$

P_A : ———— $\xrightarrow{\sim} CC(A)$

cx de Hochschild

Cat(A,X,B)

$\mathcal{C}^\circ \quad A \xrightarrow{X} \mathcal{O}_B$ dg cat.

Objectif : Généraliser au cadre des A_∞-algèbres/catégories

① A_∞-cat, A_∞-bimod

② Cx de Hochschild pour une A_∞-cat

③ Actions à gauche et à droite.

④ Thm final

~~Rq~~ :

$d_C^0 = 0 \Rightarrow$ pas de courbure

↳ d_C^1 : diff

↳ A_∞-catégorie

si $k \geq 3$, $d_C^k = 0$

$\Rightarrow$ dg cat (sans unité)

$I = \{a\}$: A_∞-algèbre.

Def : A_∞ foncteur :

→ foncteur entre dg cocatégories

$\Leftrightarrow$ ∞-morphismes

① $grMod_k$: k ev $\mathbb{Z}$-gradués.

I ensemble fini : $grMod_k^{I\times I} = \prod_{(i,j)\in I\times I} grMod_k$

objets : $A = (A_{a,b})_{a,b\in I}$

↳ produit tensoriel $\otimes_I$; $A \otimes_I B := \bigoplus_{k\in I} A_{a,k} \otimes B_{k,b}$

$F : I \longrightarrow J$

Def : (A_∞-A-B-bimodule) est une A_∞-cat tq $I = \{a,b\}$

A_∞ dg

$C_{b,a} = \{0\}$

On pose $A := C_{a,a}$

$B := C_{b,b}$

$X := C_{a,b}$: A_∞-~~bimod~~

Notation : $Cat_\infty(A,X,B)$

② Cx de Hochschild

Def: $A \in grMod^{I \times I}$

$$C^{\cdot}(A,A) := \bigoplus_{p \geq 0} Hom_{grMod^{I\times I}}\left(A^{\otimes_I p+1} ; A\right)$$

$\in grMod^{I \times I}$

$\mathbb{Z}$-graduation de $C^{\cdot}(A,A)$: graduation totale

obtenue $C^{(p,q)}(A,A) = \ldots$

structure braces : $P\{Q_1, \ldots, Q_n\} = P(-, Q_1, -, Q_2, -, \ldots Q_n, -, --)$

↳ petite, Lie : crochet de Gerstenhaber

$$C(A,A) := Coder_{I \times I}\left(T^c_I\, A[1]\right)$$

$$\stackrel{1}{=} Hom_{GrMod_k^{I\times I}}\left(T^c_I A[1], A[1]\right)$$

$[,]_G = [,]$ coderivation.

Donnée de structure A_∞-cat (I, c, d_c)

$\Longleftrightarrow \exists\, MC$ (coder $^2 = 0$) γ

et $d_\gamma := [\gamma, -]$

Pour $\varphi = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_X$

$$d_\gamma(\varphi) = [\gamma_A, \varphi_A] + \boxed{\gamma_X\{\varphi_A\}}^{L_A} + [\gamma, \varphi_X] + \boxed{\gamma_X\{\varphi_B\}}_{R_B} + [\gamma_B; \varphi_B]$$

③ Actions

$d_{k,B} = \cancel{(P_{k} \otimes B)} \circ \gamma_{\mathbf{k}}|_{\mathbf{k}[1] \otimes T^c(B[1])}$

$\in Coder_{-T^c(B)\text{-comodule}}(k[1] \otimes T^c B[1])$

$$\underline{End}_{-B}(X) = End^c_{-T^c(B)}(k[1] \otimes T^c(B[1]))$$

$$\stackrel{1}{=} \bigoplus_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ q \geq 0}} Hom^p(k[1] \otimes B[1]^{\otimes q}, \mathbf{k}[1])$$

$L_A : T^c(A[1]) \longrightarrow T^c(End_{-B}(X)[1])$

est définie via ses coefs de Taylor

$L_A^m(a_1|\ldots|a_m) \in End_{-B}(X)[1]$

par déf

$L_A^m(a_1|\ldots|a_m)^n(x|b_1|\ldots|b_n) =$

$\gamma_X(a_1|\ldots|a_m|x|b_1|\ldots|b_n)$

Lemme : $(d_{k,B})^2 = -L_A^1(\gamma_A^0(1))$

Sur $End_{-B}(X)$, on peut définir une str de A_∞-alg par $Q^0(1) = L_A^1(\gamma_A^0(1))$

$Q^1(\varphi) = -[d_{k,B}; \varphi]$

$Q^2(\varphi_1|\varphi_2) = \pm\, \varphi_1 \circ \varphi_2$

(d_γ alg courbée).

Lemme : L_A morphisme de A_∞-algèbres de A vers $End_{-B}(X)$.

idem pour R_B ;

Def : $C^{\cdot}(A,M) \subset Hom(T^c A ; T^c A \otimes M \otimes T^c A)$

$T^c A$-cobimodule $\quad d_M \varphi = d_M \circ \varphi \pm \varphi \circ d_A$

Lemme : $(C^{\cdot}(A,X,B), [\gamma_X, -])$

$\cong$

$C^{\cdot}(A, End_{-B}(X)), d_{End_{-B}(X)}$

Ex : pour $Cat_\infty(A, X, B)$

↓

$$C^{\cdot}(\cdot) = \underbrace{\bigoplus_{p+q=n} Hom^q(A^{\otimes p+1}; A)}_{C^n(A,A)} \oplus \underbrace{\bigoplus_{p+q+r=n} Hom^r(A^p \otimes X \otimes B^q, X)}_{C^n(A,k,B)} \oplus C^n(B,B)$$

$L_A \rightsquigarrow C(A,A) \to C(A,X,B) \simeq C^{\cdot}(A, End_B(X))$

avec $(L_A \circ \varphi)^{m,n}(a_1|\ldots|a_m|x|b_1|\ldots|b_n) = \gamma_X\{\varphi_A\}$

③ Conditions de Keller

$$P_A : \; C^\bullet(A,X,B) \twoheadrightarrow C^\bullet(A,A)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi_A$$

$$P_B : \; \qquad\qquad C^\bullet(B,B)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi_B$$

$\boxed{\text{Thm}}$ [Calaque-Felder-Ferrario-Rossi]

A, B, X venant de $Cat_\infty(A,X,B)$

Supposons A et B plates (sans courbure)

$\Downarrow$

Q^0 sur $End_{-B}(X)$ et sur $End_{A-}(X)$ sont nulles

alors L_A q-iso $\Rightarrow P_A$ q-iso

R_B q-iso $\Rightarrow P_B$ q-iso