Intersections dérivées et 'vraies' structures de Lie

[Julien Grivaux, St Etienne de Tinée, 2017]

$\chi(\mathcal{F}) = \int ch(\mathcal{F})\, td(X)$

↑ Hirzebruch - Riemann - Roch

X var complexe

$\mathcal{F}$ faisceau cohérent (loc. libre)

$\mathcal{F} \rightsquigarrow c_i(\mathcal{F}) \in H^i(X, \Omega^i_X)$ ← i formes holomorphes

↳ $i^{\text{ème}}$ classe de Chern

si X compact kähler :

$$H^i(X, \Omega^i_X) \cong H^{2i}(X, \mathbb{C})$$

$\Rightarrow H^\bullet(BGL_r(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_r]$

↳ classe de Chern topo

$\mathcal{F} \rightsquigarrow ch(\mathcal{F}) = \underbrace{ch_0(\mathcal{F})}_{= rk(\mathcal{F})} + ch_1(\mathcal{F}) + ch_2(\mathcal{F}) \dots$

$c(\mathcal{F}), ch(\mathcal{F}) \in \left(\bigoplus_i H^i(X, \Omega^i_X)\right)^{\times}$ $\quad c_0(\mathcal{F}) = 1$

$ch(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = ch(\mathcal{F})\, ch(\mathcal{G})$ → comme le caractère d'une représentation

Ex: $\mathcal{L}$ fibré de rg 1 $\quad c(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L})$

$ch(\mathcal{L}) = e^{c_1(\mathcal{L})}$

Motivation 1 : ch est un caractère pour une rep d'une alg de Lie

Motivation 2 : thm de l'indice

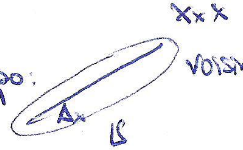
X var topo orientée compacte

$\chi(X) = \int_X eu(X)$

$eu(X) = [\Delta_X]^2 \in H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$

$\Delta_X \subset X \times X \quad [\Delta_X] \in H^n(X \times X, \mathbb{Z})$

Cas topo :



$\wr\wr$

TX

↳ faux en cx : différence mesurée par la théorie de Kapranov.

Pour X cpt cx.

$\chi(\mathcal{O}_X) = \sum_i (-1)^i h^i(X, \mathcal{O}_X)$

$= \int_X td(X)$ ← classe de Todd

dim $X = 2$: $\chi(\mathcal{O}_X) = \dfrac{c_1^2 + c_2}{12}$

$[\Delta_X] \in \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_{\Delta_X}; \mathcal{O}_X \boxtimes k_X) \quad \overset{\text{"HKR"}}{\simeq} \quad \bigoplus_i H^i(X, \Omega^i_X)$

un nombre

(1)

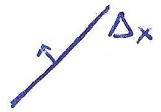
$\downarrow$

$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_{\Delta_X}; \delta_* k_X)$ où $\delta : X \hookrightarrow X \times X$

$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\mathcal{O}_{X \times X}; \delta_* k_X) \simeq H^n(X, k_X) \simeq \underset{td(X)}{\mathbb{C}}$

$\Delta_X \subset X \times X$

$\mathcal{O}^{(\infty)}_{\Delta_X}$ = fcts holomorphes sur Δ_X avec variables formelles additionnelles



$\mathcal{J}_{\Delta_X} \subset \mathcal{O}_{X \times X}$

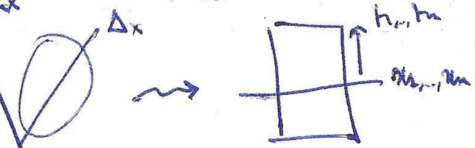
↑ fcts qui s'annulent sur Δ_X

$\mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{J}_{\Delta_X} \leftarrow \mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{J}^2_{\Delta_X} \leftarrow \mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{J}^3 \leftarrow \dots$

$\shortparallel$

$\mathcal{O}_{\Delta_X}$

Def : $\mathcal{O}^{(\infty)}_{\Delta_X} := \varprojlim \mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{J}^n_{\Delta_X}$



$\mathcal{O}^{(\infty)}_{\Delta_X} \underset{\text{local}}{=} \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n)[[h_1, \dots, h_n]]$

fibré des p.p. $\mathcal{F}$ faisceau coh

$P_X(\mathcal{F}) \underset{\mathbb{C}\text{-ev}}{=} \Omega^1_X \otimes \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}$

Action de $\mathcal{O}_X$

$f.(\omega \otimes s, s') = (f\omega \otimes s + df \otimes s', fs')$

(1)

$0 \to \Omega^1_X \otimes \mathcal{F} \to P^1_X(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to 0$ suite exacte d'Atiyah $\circledast$

$\downarrow$ dual^t

$0 \to E \to J^{\leq 1}(E) \xrightarrow[\text{symbole}]{} TX \otimes E \to 0$

<u>Lemme</u>: Les splittings de $\circledast$ sont en bij avec les connections sur $\mathcal{F}$

<u>Def</u>: La classe d'Atiyah de $\mathcal{F}$ est la classe d'extension de $(\circledast)$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \Omega^1_X \otimes \mathcal{F})$

$$= \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathcal{F}, \Omega^1_X[1] \otimes \mathcal{F})$$

$at(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}$ admet une connexion holomorphe globale.

<u>Classe d'Atiyah de Ω^1_X</u>

$$\Omega^1_X[1] \xrightarrow{at_{\Omega^1_X[1]}} \Omega^1_X[1] \otimes \Omega^1_X[1]$$

$\boxed{\text{Thm}}$ [Kapranov, Markarian]

$(\Omega^1_X[1], at_{\Omega^1_X[1]})$ est une cogèbre de Lie dans $D(X)$

<u>antisym</u> $\Rightarrow$

$$\Omega^1_X[1] \xrightarrow{at_{\Omega^1_X}} (\Omega^1_X[1])^{\otimes 2} \to \Lambda^2 \Omega^1_X[2]$$

$at_{\Omega^1_X} \to \mathrm{Sym}^2 \Omega^1_X[1]$

$= 0$

$\Rightarrow at$ obstruction à avoir une connexion sur ..

torseurs des connexions sur Ω^1_X $\qquad \Omega^1_X \otimes \Omega^1_X$

$\downarrow$

torseur des connexions sans torsion $\qquad \mathrm{Sym}^2 \Omega^1_X$

$\boxed{\text{Thm}}$ [Kapranov]

$\mathcal{O}^{(\infty)}_{\Delta_X}$ peut être reconstruit en "tordant" $\mathcal{O}_{\Delta_X}$ par $\Omega^1_X[1]$

$\mathcal{F}$, $at_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \Omega^1_X[1] \otimes \mathcal{F}$

<u>Prop</u>: Les comodule sur la cogèbre de Lie $\Omega^1_X[1]$

$$D(X) \xhookrightarrow[\text{pleine}]{} \mathrm{Rep}(\Omega^1_X[1])$$

<u>travaux d'Atiyah</u>:

$$c_1(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}(at(\mathcal{F})) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \Omega^1_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

si $\mathcal{F}$ loc libre

$$at(\mathcal{F}) \in H^1(X, \Omega^1_X \otimes \underbrace{\mathrm{End}(\mathcal{F})}_{\downarrow \mathrm{tr}\ \mathcal{O}_X})$$

$$at^k(\mathcal{F}) \in H^k(X, (\Omega^1_X)^{\otimes k} \otimes \mathrm{End}(\mathcal{F}))$$

$\downarrow$ anti + tr

$ch_k(\mathcal{F}) \qquad H^k(X, \Omega^k_X)$

$\shortparallel$

$\mathrm{tr}\ ad^k(\mathcal{F})$

g polyn de deg k $\quad (S^k \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$

$\Omega^1_X[1]$

$\mathcal{F} \in D(X)$

$\mathcal{F}^{\Omega^1_X[1]}$

$$= \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$$

$$\mathrm{Tr}\ ad^k_{\Omega^1_X[1]} \in H^0(X, \Omega^k_X[k]) = H^k(X, \Omega^k_X)$$

$\Rightarrow$ tout s'interprète en théorie de Lie.

Algèbre enveloppante de $TX[-1]$

Thm [Markarian–Ramadoss]

$$\mathcal{U}(TX[-1]) \simeq (p_1)_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X\times X}}(\mathcal{O}_{\Delta_X}, \mathcal{O}_{\Delta_X})$$

proj $p_1 : X\times X \to X$

cohomologie de Hochschild de $\mathcal{O}_X$

iso HKR $\to$ $\wr|$

$$\bigoplus_i \Lambda^i TX[-i]$$

PBW !!!

Rq : Duflo $(TX[-1]) = Td(X)$

2 pas iso d'algèbres

Thm [Damien, VdB]

L'iso de Duflo est vrai pour $TX[-1]$

$$R\Gamma(HH^\cdot(\mathcal{O}_X)) \xleftrightarrow{\sqrt{Td}\,\lrcorner\, HKR} \bigoplus_i R\Gamma(\Lambda^i TX)$$

iso d'alg

Thm [A-C]

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \underset{D(X)}{\overset{add}{\simeq}} \mathrm{Sym}\, N_{X/Y}[-1] \iff N_{X/Y} \text{ s'étend à l'ordre 1 dans } Y.$$

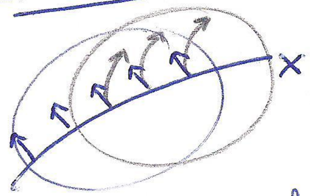
Récemment : S. Tu calcul de $[X_\sigma]$ avec des cx explicites (en cat dérivée)

↳ belle formule du type "Todd $(N_{X/Y})$" quand $\sigma^* N_{X/Y}$ s'étend à l'ordre 2.

Thm [G.]

Si $\exists$ voisinage tubulaire qui prolonge σ, alors $[X]_\sigma = 1$ (→ obstruction).

Cadre de travail



la suite normale est holomorphiquement scindée.

$$(X, \sigma, Y) \to [X]_\sigma \in \bigoplus_i H^i(X, \Lambda^i N^*_{X/Y})$$

champ de directions tangentes

$$\Omega^i_X \to \Omega^i_{Y|X}$$

$$K(Y) \xrightarrow{ch_\sigma} \bigoplus_i H^i(X, \Lambda^i N^*_{X/Y})$$

Ex : $\mathcal{L}$ fibré en droites

$$(X, \mathcal{O}_Y/J_X^2) =: \bar{X}$$

extension triviale de carré nul de $\mathcal{O}_X$ par $N^*_{X/Y}$.

(⊛)

$$0 \to \underbrace{TX[-1]}_{\text{sous obj de Lie}} \to \underbrace{TY[-1]_{|X}}_{\text{Lie}} \to N_{X/Y}[-1] \to 0$$

σ

$N_{X/Y}[-1] \otimes N_{X/Y}[-1] \xrightarrow{P} TX[-1]$ scindage sur $\mathcal{O}_X$

obstruction à l'existence de (H1)

Dictionnaire

$0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \leftrightarrows \mathfrak{n} \to 0$ comme $\mathfrak{h}$-mod

(H1) $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]_\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{n}$: produit semi-direct

$\Rightarrow$ $\mathfrak{n}$ est une alg de Lie

(H2) $([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]_\mathfrak{g}$

$[\mathrm{proj}_\mathfrak{h} \quad ; \mathfrak{n}] =$

$\Rightarrow$ idem

Kashiwara '92

Arinkin–Caldararu '10

Damien–Caldararu–Tu

Grivaux

cas de la diag

$\iota : X \subset Y$ sous var fermée

$N_{X/Y}[-1]$: algébroïde de Lie (dérivé)

$$\mathcal{U}(N_{X/Y}[-1]) = \underbrace{R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)}_{?}$$

sur $\bar{X}$ $\to$ $\mathcal{L}_{|\bar X}$

↳ $\sigma^*(\mathcal{L}_{|X})$

$\mathcal{L}_{|\bar X} \otimes (\sigma^*(\mathcal{L}_{|X}))^*$ fibré en droites sur $\bar X$

dont la restriction à X est triviale

$\in H^1(X, N^*_{X/Y})$: c'est c_1

H2 $\leftrightarrow$ Condition de Yu (classe dans H^2)

Dans ce cas-là

$\boxed{\text{Thm}}$ [Calaque, Căldăraru et Yu] sous l'hyp (✱)

$[X]_\rho = \text{Duflo}(N_{X/Y}[-1])$

et $\mathcal{U}(N_{X/Y}[-1]) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$

le calcul est possible que grâce à la structure algébrique.