Introduction à l'homologie d'intersection [Christophe Cazanave, Montpellier, 2016]

<u>Motivation</u> dualité de Poincaré des variétés X compactes orientées de dim n.

$\exists\, [X] \in H_n(X)$

isomorphisme [Poincaré]

$[X] \cap - : H^{n-k}(X) \to H_k(X)$

⚠ Si X a des singularités : ne fonctionne plus.

<u>contre-ex:</u> $\Sigma(S^1 \times S^1)$

i	0	1	2	3
$\dim H_i$	1	1	2	1

Cap produit toujours déf

<u>Thèse de McCrory</u> ['75]: X cx cellulaire avec des singularités normales, compact, orientée

$[X] \cap - : H^{n-k}(X) \to \mathrm{Im} \subset H_k(X)$

$\xi \in \mathrm{Im}$ ssi $\xi \sim \xi'$, transverse aux strates singulières de X.

<u>2 choses:</u> . On peut espérer une dualité de Poincaré <u>mais</u> avec une théorie (co)homologique qui prend en compte les conditions de tranversalité par rapport aux strates singulières.

. On peut espérer une dualité + générale en mettant des conditions de transversalité à gauche sur $H^{n-k}(X)$ et en relachant celles sur $H_k(X) \longrightarrow H_\bullet^{\text{intersection}}$ IH.

I_ Construction de IH avec un cx de chaînes singulières

⊛ "Théorie homologique" qui va bien marcher sur un certain type d'esp. stratifiés : les <u>pseudo-variétés</u>.

↳ indexé par une <u>perversité</u> p qui contrôle les conditions de transversalité.

↳ $I^pH_i(X)$

⊛ <u>Bonnes propriétés</u>

- suites exactes de Mayer-Vietoris
- excision
- dualité de Poincaré.
- indépendant de la stratification : ne dépend que de la topologie de X
- X var : $I^pH_i(X) = H_i(X)$

<u>Mauvaises propriétés</u>

- $I^pH_i(X)$ dépend du type d'homotopie...
- Problèmes de fonctorialité

<u>Pseudo-variétés:</u> essentiellement les esp. stratifiés [Treumann]

X stratifié de dim n (paracompact, séparé)

<u>$n=0$</u>: ens. dénombrable de pts

<u>$n>0$:</u> $\exists$ filtration de fermés X_i

$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$

conditions de recollement

$\forall j,\ \forall x \in X_j - X_{j-1}$

$\exists\, U_x$ vois de x dans X et

$\exists\, L$ compact, stratifié de dim $n-j-1$

$L_0 \subset \dots \subset L_{n-j-1} = L$

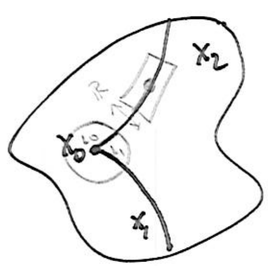
$\Downarrow$

$\{o\} \subset C(L_0) \subset \dots \subset C(L_{n-j-1}) = C(L)$

(L appelé le "lien" en x).

↳ $U_x \underset{\text{homéo}}{\simeq} \mathbb{R}^j \times C(L)$ qui respecte les strates

Ex:



$\Rightarrow X_j - X_{j-1}$ var topo. de dim j.

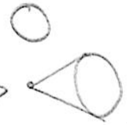
Rq: "normal" $\leftrightarrow$ géo alg.

. M variété à bord $\rightarrow$

$M \underset{\partial M}{\cup} \overline{C}(\partial M)$

bord convexe $\Leftrightarrow$ normal

Ex: $M =$



perversité complémentaire

$q := t - p$.

Dualité de Poincaré relie

I^pH à I^qH

Rq: strate de dim paire
$m(2i) = n(2i)$

Si X normal :

$I^tH_\bullet(X) = H_\bullet(X)$

(pas de condition sur les cycles)

$\boxed{\text{Thm}}$ [Mc Crory] $\Leftrightarrow$

$\underset{\overset{\shortparallel}{\boxed{\text{Im}}}}{I^0}H_i(X) = H^{n-i}(X)$

Déf: [Pseudo-var] espace stratifié

si $X_{n-2} = X_{n-1}$ (i.e $X_{n-1} - X_{n-2} = \emptyset$)

(pas de singularités en codim 1.)

et $X_n - X_{n-2}$ dense dans X.)

$\Uparrow$

déf d'espace stratifié

$\Rightarrow$ Les liens sont des pseudo-variétés

. var alg quasi-proj sur $\mathbb{C}$

$\hookrightarrow$ structure de pseudo-var

$\rightarrow$ stratification de Whitney en dim paire.

. Complexes simpliciaux de dim n tq tout $(n-1)$ simplexe est face d'exactement 2 n-simplexes. (stratification squelettale).

[Goresky-McPherson '78]

Construction du cx de chaînes

On se donne X pseudo-var avec sa stratificat° et p une perversité.

On construit un sous-cx $I^pC_\bullet$ du cx singulier $C_i := \mathbb{Z}[\Delta^i \to X]$

(Construction initiale: PL variétés et déf simpliciale)

(ici autre déf. [King])

ξ (cycle) de dim i, transverse à une
$\Delta^i \to X$ strate $X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$

$\hookrightarrow$ codim $(\text{Im}\, \xi \cap X_{n-k}) = \text{codim}(\xi) + k$
$= n - i + k$

$\circledast$ $\left[\dim(\text{Im}\, \xi \cap X_{n-k}) \leq i - k + \underbrace{p(k)}_{\text{manière de relacher la condition.}} \right.$

$\Leftrightarrow \xi^{-1}(X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}) \subset i - k + p(k)$ squelette de Δ^i.

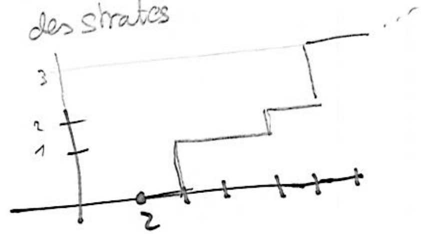
Déf: X est dit normal si les liens sont convexes.

Perversité: $p : \{2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$

ensemble des codimensions des strates

$p(2) = 0$

$p(i+1) = \begin{cases} p(i) \\ \text{ou} \\ p(i)+1 \end{cases}$



$\exists$ 4 perversités importantes

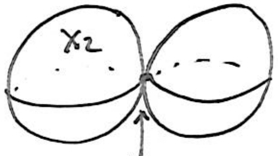
Top: $t(i) := i - 2$

nulle: $0(i) := 0$

deux moitiés $m(i) := \left[\frac{i}{2}\right] - 1$

$n(i) := t(i) - m(i)$

Ex: . $S^2 \vee S^2$



pas normal

$L =)\cup($

. Tore pincé

pas normal

Déf: $I^pC_i(X) := \mathbb{Z}\left[\sigma : \Delta^i \to X \;\; \underbrace{\text{tq } \forall k \;\circledast}_{\sigma \text{ "admissible"}} \text{ et } \partial\sigma \text{ "admissible"}\right] \subset C_i$

↳ sur les combinaisons

$\downarrow$

I^pC_{i-1}

$I^pH_i(X) = H_i(I^{p}C_\cdot)$

Homologie de Borel-Moore (à support fermé)

$\sum_{\text{finie}}$ $\sum_\infty$

$H_\cdot^{sing}$	$H_\cdot^{BM}$
$H_c^\cdot$	$H^\cdot$

évaluation

dualité de Poincaré.

X variété, $[X] \in H_n^{BM}(X)$

et $[X]\cap : H_c^i \to H_{n-i}$

→ Homologie singulière de BM

$C_i^{BM} \supset C_i$

$\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}(\Delta^i;X)}$

comb. lin formelles

localt finies ie $\forall x \in X, \exists U_x \subset X$ tq le nombre de simplexe dont l'image intersecte U_x est fini

$\rightsquigarrow H_\cdot^{BM}(X)$

↳ Complexe dual du complexe des cochaînes à support compact.

Sur un corps k,

$H_\cdot^{BM}(X,k) \simeq (H_c^\cdot(X,k))^*$

Ex: $H_i^{BM}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ \mathbb{Z} & \text{si } i=n \end{cases}$ générateur $[\mathbb{R}^n]$

M var orientée (pas forcément compacte)

$[M] \in H_n^{BM}(X)$

Ex: $H_i^{BM}(\mathring{M}) \simeq H_i(M;\partial M)$

M var à bord

Ex: $H_i^{BM}(\mathbb{R}^2-\{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,[\mathbb{R}^2] & \text{en dim } 2 \\ \mathbb{Z} & \text{en dim } 1 \\ 0 & \text{en dim } 0 \end{cases}$

vient de $\mathbb{R}_+ \hookrightarrow \mathbb{R}^2-\{0\}$

pas de cor

à l'∞.

Rq: f_*^{BM} existe pour les f propres.

Exemples de calculs

M var. à bord de dim n $\quad X = M \cup_{\partial M} C(\partial M)$

I^pC_i ne dépend que de $p(n)$

Pour ξ_i un i-cycle, ξ est admissible

si $\dim(\xi_i \cap X_0) \leq i-n+p(n)$

$I^pH_i = \left(\begin{matrix}\xi_i \text{ adm} \\ \text{tq } \partial\xi_i = 0\end{matrix}\right) \Big/ \begin{matrix}\partial\sigma_{i+1} \text{ adm.} \\ \dim(\sigma_{i+1}\cap X_0) \\ \leq i+1-n+p(n)\end{matrix}$

3 cas

. si $i-n+p(n) < -1$

→ ni les ξ_i ni les σ_{i+1} n'ont pas le droit de passer par le pt du cône (P)

$I^pH_i(X) = H_i(M)$

. si $i-n+p(n) = -1$

Les ξ_i ne passent pas par P, mais σ_{i+1} peuvent passer par P.

$I^pH_i(X) = \mathrm{Im}\left(\begin{matrix}H_i(M) \\ \downarrow \\ H_i(X)\end{matrix}\right)$

. si $i-n+p(n) > -1$

aucune condition sur ξ_i et σ_{i+1}

$I^pH_i(X) = H_i(X)$

Calculs fondamentaux des voisinages locaux

$I^pH_i^{BM}(C(L)\times\mathbb{R}^j)$ en fonction de $I^pH_i^{BM}(L)$
et $I^pH_i^{BM}(C(L)^\circ\times\mathbb{R}^j)$

moins le pt

① Calcul de $I^pH_i^{BM}(X\times\mathbb{R})$ en fonction de $I^{\bar p}H_i^{BM}(X)$

$I^pC_i^{BM}(X)\longrightarrow I^pC_i^{BM}(X\times\mathbb{R})$ donne un morphisme (qi) de complexes
$\xi_i\longmapsto\xi_i\times[\mathbb{R}]$

$I^pC_\bullet^{BM}(X)\xrightarrow{\sim}I^pC_\bullet^{BM}(X\times\mathbb{R})[1]$

Rq: on aussi faire les calculs sur I^pH_i

② Calcul de $I^pH_\bullet^{BM}(C(L))$ en fonct° de $I^pH^{BM}(L)$

ici L : espace $(k-1)$-stratifié de sorte que $C(L)$ de dim k

$\xi\in C_{i-1}^{BM}(L)\longrightarrow c(\xi)\in C_i^{BM}(C(L))$

si $\xi_{i-1}\in I^pC_{i-1}^{BM}$ alors $c(\xi_{i-1})$ satisfait automatiq^t les cond. de transversalité dans $C(L)$ sauf ev^t au sommet du cône.

$C(\xi_{i-1})$ est transverse en P ssi $i-k+p(k)\geq 0$

$\partial c(\xi_{i-1})$ ———————— $i-1-k+p(k)\geq 0$

Conclusion

. si $i>k-p(k)$ alors $c(\xi_{i-1})\in I^pC_i^{BM}(C(L))$

. si $i=k-p(k)$ alors ————
ssi ξ_{i-1} est un cycle.

. si $i<k-p(k)$, $c(\xi_{i-1})$ ne vérifie pas la condition de transversalité en P

↳ on obtient un morph de cxs

$\tau_{\geq k-p(k)-1}I^pC_\bullet^{BM}(L)\xrightarrow{\sim}I^pC_\bullet(C(L))[1]$

tronqué

qui est q.i.

En particulier $x\in X_k-X_{k-1}$ avec $U_x\simeq\mathbb{R}^{n-k}\times C(L)$

dim $k-1$

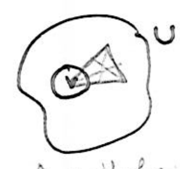
$$\begin{array}{ccc}
I^pC_\bullet^{BM}(U_x) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\geq n-p(k)}I^pC_\bullet^{BM}(U_x)\\
\downarrow & & \downarrow\wr\\
I^pC_\bullet^{BM}(\underbrace{U_x\setminus(X_k-X_{k-1})}_{U_x^\circ:=}) & \longleftarrow & \tau_{\geq n-p(k)}I^pC_\bullet^{BM}(U_x^\circ)
\end{array}$$

II Version faisceautique de I^pH^{BM}

U ouvert de X

$U\longmapsto I^pC_\bullet^{BM}(U)\hookrightarrow I^pC_\bullet^{BM}(X)$

Restriction



si Δ pathologique
$\Longrightarrow$ subdivision barycentrique
↳ Δ dedans ok
Δ dehors $\to 0$
sinon on itère

(si PL marche bien).

Les préfaisceaux $I^pC_i(-)$ sont des faisceaux

On pose $\mathcal{I}^p\mathcal{C}_{BM}^{-i}:=I^pC_i^{BM}$

$\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet$ cxs de faisceaux.

Rq: sections à support compact de $\mathcal{I}^p\mathcal{C}_{BM}^{-1}$

donne I^pC_i (pas Borel-Moore).

Les faisceaux $\mathcal{I}^p\mathcal{C}^{-i}_{BM}$ sont acycliques

$H^j(X, \mathcal{I}^p\mathcal{C}^{-i}_{BM}) = 0$ si $j>0$.

Conséquence: $\mathbb{H}^{-i}_c(X, \mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}) = I^pH_i^{BM}(X)$

hypercohomologie de X dans un cx de faisceaux $\mathcal{C}^\bullet$

est par définition pour $0 \to \mathcal{C}^{-n} \to \cdots \to \mathcal{C}^0 \to 0$

rés. inj.

= cohomologie du cx $\Gamma(X, \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}^\bullet)$

$\boxed{\text{Thm}}$ sur un corps . Le $\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}$ est cohomologiqu^t constructible, ie les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i$ sont constructibles

. De plus, il vérifie les conditions suivantes qi

(A0) $\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}|_{X-X_{n-2}} \simeq \mathbb{R}_{X-X_{n-2}}[n]$ ← faisceau cst

(A1) $\mathcal{H}^{-i}(\quad) = 0$ si $i < -n$

(A2) $\mathcal{H}^i(\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM})|_{U_{k+1}} = 0$ si $i > p(k)-n$

$\iff \mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}|_{U_{k+1}} \simeq \tau_{\le p(k)-n}\,\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}|_{U_{k+1}}$

$U_k := X - X_{n-k}$; $u_k : U_k \hookrightarrow U_{k+1}$; $j_k : \overset{X_{n-k}-X_{n-k-1}}{\overset{\shortparallel}{U_{k+1}-U_k}} \hookrightarrow U_{k+1}$

(A3) $\mathcal{H}^i(j_k^*(\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM})|_{U_{k+1}}) \longrightarrow \mathcal{H}^i(j_k^* R i_{k*} i_k^* \mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}|_{U_{k+1}})$

est un iso si $i \le p(k)-n$

. Tout cx de faisceaux qui vérifie (A0-3) $\simeq \mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM}$

Unicité d'un tel cx $\mathcal{C}^\bullet$: on peut le reconstruire à qi près à partir de ses restrictions aux U_k.

Sur $\mathcal{C}|_{U_2} = \mathbb{R}_{U_2}[n]$

$$\text{(A2)}\ \mathcal{C}^\bullet|_{U_3} \simeq \tau_{\le \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p(2)}-n}\,\mathcal{C}^\bullet|_{U_3}$$

$$\wr|\ \text{(A3)}$$

$$\tau_{\le -n} R i_{2*} \underbrace{i_2^*\mathcal{C}^\bullet|_{U_{2+1}}}_{\mathcal{C}^\bullet|_{U_2}}$$

Formule de Deligne:

$$\mathcal{C}^\bullet = \tau_{\le p(n)-n} R i_{n*} \tau_{p(n-1)-n} R i_{(n-1)*} \cdots \tau_{p(2)-n} \mathbb{R}_{U_2}[n]$$

↳ fonctionne pour des stratifications + générales

$\Longrightarrow I^pH_i$ invariant topologique, i.e. $\perp$ stratification.

↳ Permet de vérifier facilement la dualité de Poincaré

$\mathcal{D}$: foncteur de dualité de Verdier

Montrer la dualité de Poincaré pour IH revient à mq

$(\mathcal{D}\,\mathcal{I}^p\mathcal{C}^\bullet_{BM})[n]$

$\wr|$

$\mathcal{I}^q\mathcal{C}^\bullet$

pour $q = t-p$

Démo: on vérifie les axiomes (A0-3). □