Schobers pervers, d'après Kapranov – Schechtman

(Montpellier, 13/04/16)
ANR SAT

La philosophie des Schobers pervers

Schober (der) : traduction allemande du mot "stack" = meule.
(pl. Schober)

But : développer une théorie des faisceaux pervers en catégories triangulées
= Schobers pervers

$$\text{Schobers pervers} \xrightarrow{K_0} \text{Faisceaux pervers}$$

Motivation : application à la géométrie symplectique, "les Schobers pervers sont les coefficients pour les catégories de Fukaya".

Moyen : s'inspirer des descriptions de (certaines) catégories de faisceaux pervers comme catégories de représentations de carquois.

$\xrightarrow{1}$ disque pointé (Beilinson, Deligne, ...) *
$\xrightarrow{2}$ $\mathbb{C}^n$ stratifié par les $\{x_i = 0\}$ (Galligo – Granger – Maisonobe)
$\xrightarrow{3}$ Arrangements d'hyperplans réels (Kapranov – Schechtman)
$\xrightarrow{4}$ Surfaces de Riemann (") *

1 : les Schobers pervers sont les "foncteurs sphériques"
4 : en cours de développement (Dyckerhoff – Kapranov – Schechtman – Soibelman)

Systèmes locaux et cohomologie

<u>Rappel</u> : Δ le disque unité dans $\mathbb{C}$, $\Delta^\times = \Delta - \{0\}$

$$\mathrm{Loc}(\Delta^\times) \simeq \{ V \circlearrowleft T \text{ iso} \} = \mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$$

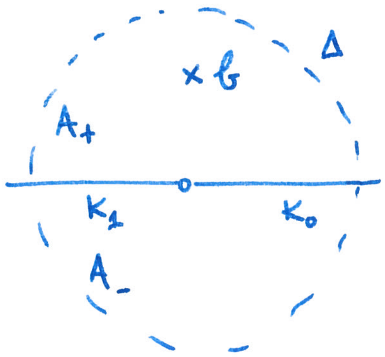
<u>Lemme</u> : Soit $\mathbb{V} \in \mathrm{loc}(\Delta^\times)$ représenté par (V,T). Alors on a

$$H^0(\Delta^\times, \mathbb{V}) \simeq V^T := \ker(V \xrightarrow{1-T} V) ;$$

$$H^1(\Delta^\times, \mathbb{V}) \simeq V_T := \mathrm{coker}(V \xrightarrow{1-T} V) ;$$

$$H^i(\Delta^\times, \mathbb{V}) = 0 \qquad (i \notin \{0,1\}) .$$

<u>Preuve</u> : Par un calcul à la Čech.



$\Delta^\times = U_0 \cup U_1$, $U_i = \Delta^\times - K_i$

$U_0 \cap U_1 = A_+ \sqcup A_-$

($\mathbb{V}$ n'a pas de cohomologie sur U_0, U_1 et $U_0 \cap U_1$)

Complexe de Čech :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathbb{V}, U_0) \oplus \Gamma(\mathbb{V}, U_1) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{V}, A_+) \oplus \Gamma(\mathbb{V}, A_-) \\ \wr\| & & \wr\| \\ V \oplus V & \longrightarrow & V \oplus V \end{array}$$

$V := \mathbb{V}_b$. On fixe des identifications :

$$\Gamma(\mathbb{V}, U_0) \xrightarrow{\simeq} V$$

$$\Gamma(\mathbb{V}, U_1) \xrightarrow{\simeq} V$$

$$\Gamma(\mathbb{V}, A_+) \xrightarrow{\simeq} V$$

$$\Gamma(\mathbb{V}, A_-) \xleftarrow{\simeq} \Gamma(\mathbb{V}, U_1) \xrightarrow{\simeq} V$$

d est alors donnée par la formule

$d(v_0, v_1) = (v_0 - v_1, T(v_0) - v_1)$. On conclut avec la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to V^T & \longrightarrow & V \oplus V & \xrightarrow{d} & V \oplus V & \longrightarrow & V_T & \longrightarrow & 0 . \\ v & \longmapsto & (v, v) & & (v, w) & \longmapsto & v - w & & \end{array}$$

Faisceaux constructibles sur $(\Delta, 0)$

Δ : le disque unité (fermé) dans $\mathbb{C}$, 0 l'origine

Prop : La catégorie $Const(\Delta, 0)$ des faisceaux constructibles sur Δ avec singularité éventuelle en 0 est équivalente à la catégorie dont les objets sont les (V_0, V_1, g, T)

$$V_0 \xrightarrow{g} V_1 \circlearrowleft T$$

avec $V_0, V_1 \in Vect$, T isomorphisme et $(1-T)g = 0$.

Dém :

V_0 et V_1 sont les fibres en 0 et 1 resp., g est le morphisme de généralisation, T est la monodromie.

$Im(g) \subseteq V_1^T = H^0(\Delta(\varepsilon)^*, \underline{V})$

Exemples : $(i : \{0\} \hookrightarrow \Delta,\ j : \Delta^* \hookrightarrow \Delta)$

- $i_* \underline{V}$: $V \xrightarrow{0} 0 \circlearrowleft 0$
- $j_!(V, T)$: $0 \xrightarrow{0} V \circlearrowleft T$
- $j_*(V, T)$: $V^T \hookrightarrow V \circlearrowleft T$
- $f : \Delta \to \Delta,\ z \mapsto z^m$

$f_* \underline{k}_\Delta \in Const(\Delta, 0)$ $\qquad k \longrightarrow k^m \circlearrowleft T$ (shift)

$\qquad\qquad x \longmapsto (x, \dots, x)$

Faisceaux pervers sur $(\Delta, 0)$, description en termes de carquois

Théorème : La catégorie $\mathrm{Perv}(\Delta,0)$ des faisceaux pervers sur $(\Delta,0)$ est équivalente à la catégorie des (Φ, Ψ, u, v)

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, bend left, "v"] & \Psi \arrow[l, bend left, "u"] \end{tikzcd}$$

avec $\Phi, \Psi \in \mathrm{Vect}$, $T := 1 - vu$ isomorphisme.

Remarque : $1 - vu$ iso $\Longleftrightarrow$ $1 - uv$ iso.

Remarque : Dualité de Verdier :

$$\mathbb{D}\left(\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, bend left, "u"] & \Psi \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd} \Phi^\vee \arrow[r, bend left, "v^\vee"] & \Psi^\vee \arrow[l, bend left, "u^\vee"] \end{tikzcd} \right).$$

Compare avec la description de $\mathrm{Const}(\Delta, 0)$.

a) Construction de Ψ : "cycles proches"

Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(\Delta,0)$, vu dans $D^b_{const}(\Delta,0)$. Conditions de perversité, en notant $i_0 : \{0\} \hookrightarrow \Delta$, $j_0 : \Delta - \{0\} \hookrightarrow \Delta$

$$\begin{cases} i_0^* \mathcal{F} \in D^{\leq 0} & \text{et} \quad j_0^* \mathcal{F} \in D^{\leq -1} \\ i_0^! \mathcal{F} \in D^{\geq 0} & \text{et} \quad j_0^! \mathcal{F} \in D^{\geq -1} \end{cases}$$

$$j_0^! = j_0^* \rightsquigarrow j_0^* \mathcal{F} \in D^{\leq -1} \cap D^{\geq -1} = \mathrm{Loc}(\Delta - \{0\})[1]$$

Notons $j_0^* \mathcal{F} = \mathbb{V}[1]$

Soit Ψ la fibre de $\mathbb{V}$ au point b, et notons $T \circlearrowright \Psi$ la monodromie (ce sera le T du théorème).

b) Etudions un peu mieux les conditions de perversité

- Triangle $j_{0!} j_0^! \mathcal{F}^\cdot \to \mathcal{F}^\cdot \to i_{0*} i_0^* \mathcal{F}^\cdot \xrightarrow{+1}$

$j_0^! \mathcal{F}^\cdot = \mathbb{V}[1]$, $j_{0!}$ exact $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^n(j_{0!} j_0^! \mathcal{F}^\cdot) = 0$ pour $n \neq -1$

Condition de perversité, i_{0*} exact $\to$ $\mathcal{H}^n(i_{0*} i_0^* \mathcal{F}^\cdot) = 0$ pour $n > 0$.

Suite exacte longue en cohomologie $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^\cdot) = 0$ pour $n > 0$.

- Triangle $i_{0!} i_0^! \mathcal{F}^\cdot \to \mathcal{F}^\cdot \to j_{0*} j_0^* \mathcal{F}^\cdot \xrightarrow{+1}$

$j_0^* \mathcal{F}^\cdot = \mathbb{V}[1]$, j_{0*} exact à gauche $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^n(j_{0*} j_0^* \mathcal{F}^\cdot) = 0$ pour $n < -1$

Condition de perversité, $i_{0!}$ exact $\to$ $\mathcal{H}^n(i_{0!} i_0^! \mathcal{F}^\cdot) = 0$ pour $n < 0$

Suite exacte longue en cohomologie $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^n(\mathcal{F}^\cdot) = 0$ pour $n < -1$.

Conclusion : on a seulement $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\cdot)$ et $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\cdot)$

$$j_0^* \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\cdot) \simeq \mathbb{V}$$

$$j_0^* \mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\cdot) = 0 \quad \to \quad \mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\cdot) \text{ est supporté en } \{0\}.$$

$$\left(\text{et } \mathcal{H}^{-1}(i_{0!} i_0^! \mathcal{F}^\cdot) = 0 \right)$$

c) Aparté

Pour comprendre une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ $(= \mathrm{Perv}(\Delta, 0))$, et a fortiori si on veut décrire $\mathcal{C}$ comme représentation d'un carquois, on a envie de produire des foncteurs exacts :

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$$

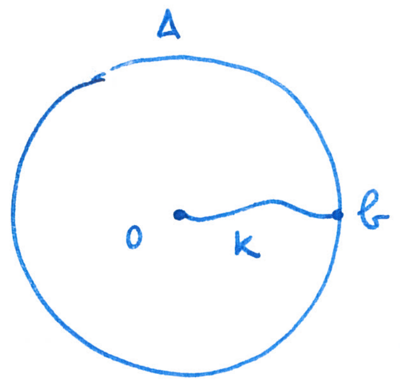
(chaque sommet du carquois donne lieu à un tel foncteur)

On a déjà $\Psi : \mathrm{Perv}(\Delta, 0) \to \mathrm{Vect}_k$ "fibre générique décalée"

Idée naturelle : prendre la fibre / cofibre en 0.

Problème : en général $i_0^* \mathcal{F}' / i_0^! \mathcal{F}'$ a de la cohomologie en plusieurs degrés (-1 et 0 / 0 et 1) ; on pourrait prendre H^{-1} ou H^0 / H^0 ou H^1, mais ça donnerait un foncteur exact à droite ou à gauche seulement.

d) Un lemme très utile



$i : K \hookrightarrow \Delta$

$j : \Delta - K \hookrightarrow \Delta$

On pose $\underline{H}^n_K(\mathcal{F}') := \mathcal{H}^n(i_! i^! \mathcal{F}') \in \mathrm{Const}(\Delta)$ $\quad \Delta = (\Delta - K) \sqcup (K - 0) \sqcup 0$

$= i_* \mathcal{H}^n(i^! \mathcal{F}')$

(faisceaux de cohomologie à support dans K, $\underline{H}^n_K = R^n \underline{\Gamma}_K$, $\underline{\Gamma}_K = i_! i^!$ foncteur des sections à support dans K)

<u>Lemme</u> : ("Lemme de coupure") $\underline{H}^n_K(\mathcal{F}') = 0$ pour $n \neq 0$.

<u>Preuve</u> :

On utilise le triangle $i_! i^! \mathcal{F}' \to \mathcal{F}' \to j_* j^* \mathcal{F}' \xrightarrow{+1}$

On a $j_* j^* \mathcal{F}' = j_* \underline{\jupiter}_{\Delta - K}[1]$ qui n'a que du $\mathcal{H}^{-1}$, et $\mathcal{F}'$ n'a que du

non dérivé   faisceau constant

$\mathcal{H}^{-1}$ et du $\mathcal{H}^0$, donc il suffit de montrer que $\mathcal{H}^{-1}(i_! i^! \mathcal{F}') = 0$.

Cela résulte du triangle

$i_! (i_0^K)_! (i_0^K)^! i^! \mathcal{F}' \to i_! i^! \mathcal{F}' \to i_! (j^K_{K-0})_* (j^K_{K-0})^* i^! \mathcal{F}' \xrightarrow{+1}$

En effet, $i_!(i_0^K)_!(i_0^K)^! i^! \mathcal{F}^\cdot = i_{0!}\, i_0^! \mathcal{F}^\cdot$, qui n'a pas de $\mathcal{H}^{-1}$ par les conditions de perversité, et

$$i_!(j_{K-0}^K)_*(j_{K-0}^K)^* i^! \mathcal{F}^\cdot \simeq j_{0*}(i_{K-0}^{\Delta-0})_!(i_{K-0}^{\Delta-0})^! \mathbb{V}[1]$$

dont le $\mathcal{H}^{-1}$ est

$$\mathcal{H}^0\left(j_{0*}(i_{K-0}^{\Delta-0})_!(i_{K-0}^{\Delta-0})^! \mathbb{V}\right) \simeq \underset{\substack{\text{(non}\\ \text{dérivé)}}}{j_{0*}}(i_{K-0}^{\Delta-0})_* \underbrace{\mathcal{H}^0(i_{K-0}^{\Delta-0})^!}_{\substack{\text{sections à}\\ \text{support dans } K-0}} \mathbb{V} = 0.$$

---

e) Construction de Φ, u, v.

"cycles évanescents"

D'après la suite exacte longue pour le triangle de la preuve du lemme de confusion, on a une suite exacte dans $\mathrm{Const}(\Delta)$:

$$0 \to \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\cdot) \to j_* \underline{\Psi}_{\Delta-K} \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathbb{H}}_K^0(\mathcal{F}^\cdot) \to \mathcal{H}^0(\mathcal{F}^\cdot) \to 0.$$

système local $\mathbb{V} = (\Psi, T)$ en-dehors de 0

non dérivé

constant

supporté sur K, constructible sur $K = (K-0) \sqcup 0$.

supporté en $\{0\}$

Fibre en b :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}^\cdot))_b \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & (j_* \underline{\Psi}_{\Delta-K})_b \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \underline{\mathbb{H}}_K^0(\mathcal{F}^\cdot)_b \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\wr"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Psi \arrow[r] & \Psi \oplus \Psi \arrow[r] & \Psi \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto (x, T^{-1}(x))$$

$$(x, y) \longmapsto x - T(y)$$

On a donc $\underline{\mathbb{H}}^0_K(\mathcal{F}')_\xi \simeq \Psi$.

Définissons $\Phi := \underline{\mathbb{H}}^0_K(\mathcal{F}')_0$.

On définit $v : \Phi \longrightarrow \Psi$ comme le morphisme de généralisation le long de K.

et $u : \Psi \longrightarrow \Phi$ comme la fibre en 0 de

$$j_* \underline{\Psi}_{\Delta - K} \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathbb{H}}^0_K(\mathcal{F}')$$

Le fait que α commute aux morphismes de généralisation nous dit qu'on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} x & \Psi & \xrightarrow{u} & \Phi \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow v \\ (x,x) & \Psi \oplus \Psi & \longrightarrow & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & x - T(y) \end{array}$$

On a donc $vu(x) = x - T(x)$: $T = 1 - vu$.

Fin de la construction de l'équivalence de catégories.

f) L'équivalence inverse

On se donne $\Phi \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} \Psi$, $T := 1 - vu$ isomorphisme.

Soit $\mathcal{A} := j_* \underline{\Psi}_{\Delta - K}$

$\mathcal{B}$ le faisceau constructible supporté sur K obtenu en recollant la fibre Φ en 0 et Ψ sur $K - \{0\}$ par le morphisme v.

$\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ l'unique morphisme de faisceaux dont la fibre en 0 est

$u : \Psi \to \Phi$ et dont la fibre sur $K - \{0\}$ est $\begin{array}{rcl} \Psi \oplus \Psi & \longrightarrow & \Psi \\ (x, y) & \longmapsto & x - (1 - vu)y \end{array}$

On a alors un objet

$$\cdots \to 0 \to \underset{(-1)}{\mathcal{A}} \xrightarrow{\alpha} \underset{(0)}{\mathcal{B}} \to 0 \to \cdots$$

de $D^b_{const}(\Delta)$, et on vérifie qu'il est dans $\mathrm{Perv}(\Delta, 0)$.

Il reste à vérifier que ces deux constructions sont quasi-inverses l'une de l'autre...

<u>Exemples</u>:

- $i_{0*}\underline{V}_{\{0\}}$: $V \rightleftarrows 0$
- $\underline{V}_\Delta[1]$: $0 \rightleftarrows V$
- $j_{0!}\underline{V}_{\Delta-\{0\}}[1]$: $V \underset{1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} V$ $\quad (0 \to i_{0*}\underline{V}_{\{0\}} \to j_{0!}\underline{V}_{\Delta-\{0\}}[1] \to \underline{V}_\Delta[1] \to 0)$
- $j_{0*}\underline{V}_{\Delta-\{0\}}[1]$: $V \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} V$ $\quad (0 \to \underline{V}_\Delta[1] \to j_{0*}\underline{V}_{\Delta-\{0\}}[1] \to i_{0*}\underline{V}_{\{0\}} \to 0)$

<u>Remarque</u>: $i_{0*}\underline{k}_{\{0\}}$ et $\underline{k}_\Delta[1]$ sont des objets simples, mais ni $j_{0!}\underline{k}_{\Delta-\{0\}}[1]$ ni $j_{0*}\underline{k}_{\Delta-\{0\}}[1]$ ne le sont.
dans $\mathrm{Perv}(\Delta, 0)$.

Pour compléter la liste des objets simples il faut rajouter les

$$j_{0!*}\mathbb{V}[1] := \mathrm{Im}\left(j_{0!}\mathbb{V}[1] \longrightarrow j_{0*}\mathbb{V}[1]\right)$$

pour $\mathbb{V}$ un système local simple sur Δ^*.

(pour $\mathbb{V} = \underline{V}$ trivial, $j_{0!*}\underline{V}[1] \simeq \underline{V}_\Delta[1]$).

Remarque: Pour $\mathbb{V} = (V, T) \in \mathrm{Loc}(\Delta^\times)$,

$$
\begin{tikzcd}
j_{0!}\mathbb{V}[1] \arrow[d, phantom, ""] & : & V \arrow[r, shift left, "1-T"] \arrow[d, "1-T"'] & V \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[d, "1"] \\
j_{0*}\mathbb{V}[1] & : & V \arrow[r, shift left, "1"] & V \arrow[l, shift left, "1-T"]
\end{tikzcd}
$$

donc
$$
j_{0!*}\mathbb{V}[1] : \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(1-T) \arrow[r, shift left] & V \arrow[l, shift left, "1-T"]
\end{tikzcd}.
$$

Remarque: Généralisation de cette image par Galligo-Granger-Maisonobe au cas de $\mathbb{C}^n$ stratifié par les hyperplans de coordonnées.

Foncteurs sphériques

(théorie due à Anno - Logvinenko)

Contexte : dans une catégorie triangulée on n'a pas de cône fonctoriel. On travaille dans un contexte "amélioré" dans lequel cela existe.

Mot-clé : dg-amélioration = on considère les catégories triangulées avec des identifications $\mathcal{A} \simeq H^0(\tilde{\mathcal{A}})$, $\tilde{\mathcal{A}}$ une dg-catégorie parfaite.

Remarque : dans les exemples ci-dessous, ce problème ne se pose pas.

Déf : Soit $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur (triangulé) entre catégories triangulées qui admet un adjoint à gauche L et un adjoint à droite R.

On pose

$T := \mathrm{Cone}(SR \Rightarrow id_{\mathcal{B}})$, $T' := \mathrm{Cone}(id_{\mathcal{B}} \Rightarrow SL)[-1]$ "foncteurs de twist"

$F := \mathrm{Cone}(id_{\mathcal{A}} \Rightarrow RS)[-1]$, $F' := \mathrm{Cone}(LS \Rightarrow id_{\mathcal{A}})$ "foncteurs de cotwist"

On dit que S est un foncteur sphérique si

(1) $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est une équivalence de catégories

(2) $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est une équivalence de catégories

(3) $LT[-1] \longrightarrow L(SR) \simeq (LS)R \longrightarrow R$ est un isomorphisme de foncteurs
("le twist identifie les adjoints")

(4) $R \longrightarrow R(SL) \simeq (RS)L \longrightarrow FL[1]$ est un isomorphisme de foncteurs
("le cotwist identifie les adjoints")

Théorème : (Anno-Logvinenko)

- Deux parmi (1), (2), (3), (4) impliquent les deux autres.
- Dans ce cas, T' est un quasi-inverse de T , F' un quasi-inverse de F.

<u>Lemme</u>: Soit $S : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur sphérique, alors chacune des adjonctions

$$\mathcal{A} \underset{R}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \mathcal{B} \qquad\qquad \mathcal{A} \underset{S}{\overset{L}{\leftrightarrows}} \mathcal{B}$$

donne lieu à des faisceaux pervers sur $(\Delta, 0)$ après passage au K_0 :

$$K_0(\mathcal{A}) \underset{K_0(R)}{\overset{K_0(S)}{\rightleftarrows}} K_0(\mathcal{B}) \qquad\qquad K_0(\mathcal{A}) \underset{K_0(S)}{\overset{K_0(L)}{\leftrightarrows}} K_0(\mathcal{B})$$

(si $K_0(\mathcal{A})$ et $K_0(\mathcal{B})$, par convention à coefficients dans k, sont de dim. finie)

[Déf: Un Schober pervers sur $(\Delta, 0)$ est un foncteur sphérique.

<u>Preuve</u> :

D'après $SR \Longrightarrow id_{\mathcal{B}} \Longrightarrow T \overset{+1}{\Longrightarrow}$

on a $K_0(S)K_0(R) = K_0(SR) = 1 - \underbrace{K_0(T)}_{\text{isomorphisme de } K_0(\mathcal{B})}$.

En effet, pour tout objet X de $\mathcal{B}$ on a

$$SRX \longrightarrow X \longrightarrow TX \overset{+1}{\longrightarrow}$$

d'où $\underset{K_0(S)K_0(R)[X]}{\underset{\parallel}{[SRX]}} = [X] - \underset{K_0(T)[X]}{\underset{\parallel}{[TX]}}$.

<u>Exemples de foncteurs sphériques</u>

Soit S^d la sphère de dimension d, $a : S^d \to \{pt\}$

$$\mathcal{A} := D^b(\mathrm{Vect}) = D^b(pt) \xrightarrow{a^*} D^b(S^d) =: \mathcal{B}$$

<u>Prop</u> : a) $\mathcal{A} \xrightarrow{a^*} \mathcal{B}$ est un foncteur sphérique

b) Plus généralement, pour $f : X \to Y$ une S^d-fibration entre CW-complexes, $f^* : D^b(Y) \to D^b(X)$ est un foncteur sphérique.

De même, T' est donné par

$$T'(\mathcal{F}') = \pi_{2*}(\pi_1^*\mathcal{F}' \otimes \mathcal{K}')$$

avec $\mathcal{K}' = j_* \underline{k}_U [d-1]$.

On veut vérifier que $T \circ T' \sim \mathrm{id}$ et $T' \circ T \sim \mathrm{id}$

$$(T \circ T')(\mathcal{F}') = \pi_{2*}(\pi_1^*\mathcal{F}' \otimes (\mathcal{K} * \mathcal{K}'))$$

$$\mathcal{K} * \mathcal{K}' = \pi_{13*}(\pi_{12}^* \mathcal{K} \otimes \pi_{23}^* \mathcal{K}')$$

$$= \pi_{13*}(\pi_{12}^* j_! \underline{k}_U \otimes \pi_{23}^* j_* \underline{k}_U) [d]$$

On trouve alors que

$$\mathcal{K} * \mathcal{K}' \simeq i_* \underline{k}_\Delta \text{ , et donc } T \circ T' \sim \mathrm{id}.$$

$$\Uparrow$$

$j^*(\mathcal{K} * \mathcal{K}') = 0$ car $H^\cdot(S^d - \{x\}, \{y\}) = 0$ $(x \neq y)$

$i^*(\mathcal{K} * \mathcal{K}') \simeq \underline{k}_\Delta$ car $H^\cdot(S^d - \{x\}) \cong k[0]$

$H^\cdot(S^d, \{x\}) \cong k[-d]$.

Deuxième condition : $R \xrightarrow{\sim} FL[+1]$

$F = \mathrm{Cone}(\mathrm{id} \Rightarrow a_* a^*)[-1]$

$$k \longrightarrow a_* \underline{k}_{S^d} \longrightarrow k[-d] \xrightarrow{+1}$$

donc $Fk[1] \cong k[-d]$

d'où $a_* \xrightarrow{\sim} a_*[d][-d]$.

Un autre exemple : $q : Z \to X$ (lisse/k) famille propre et lisse de variétés de CY (au sens strict : $H^i(Z, \mathcal{O}_Z) = k$ ssi $i \in \{0, n\}$, $q^* : D^b_{coh}(X) \to D^b_{coh}(Z)$.

Preuve : (de a))

Adjoint à droite : $R = a_*$ (dérivé : foncteur de cohomologie)

Adjoint à gauche : $L = a_*[d]$

En effet, $a^! \cong a^*[d]$

$a_! \cong a_*$ (a est propre)

$$\mathrm{Hom}(a_! X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(X, a^! Y)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(a_* X[d], Y) &\simeq \mathrm{Hom}(X[+d], a^! Y)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(X[d], a^* Y[d])\\ &\simeq \mathrm{Hom}(X, a^* Y).\end{aligned}$$

Notation : $\pi_1, \pi_2 : S^d \times S^d \longrightarrow S^d$, $i : \Delta \hookrightarrow S^d \times S^d$

$j : \underbrace{(S^d \times S^d) - \Delta}_{U} \hookrightarrow S^d \times S^d$

$$\mathcal{K} = j_! \underline{k}_U[1] \quad (\text{"kernel"})$$

Fait : $T := \mathrm{Cone}(a^* a_* \Rightarrow \mathrm{id}_{D^b(S^d)})$ est donné par

$$T(\mathcal{F}') = \pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{F}' \otimes_k \mathcal{K})$$

Justification :

$$a^* a_* \mathcal{F}' \simeq \pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{F}' \otimes_k \underline{k}_{S^d \times S^d})$$

$$\mathcal{F}' \simeq \pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{F}' \otimes_k i_* \underline{k}_\Delta)$$

et on a un triangle

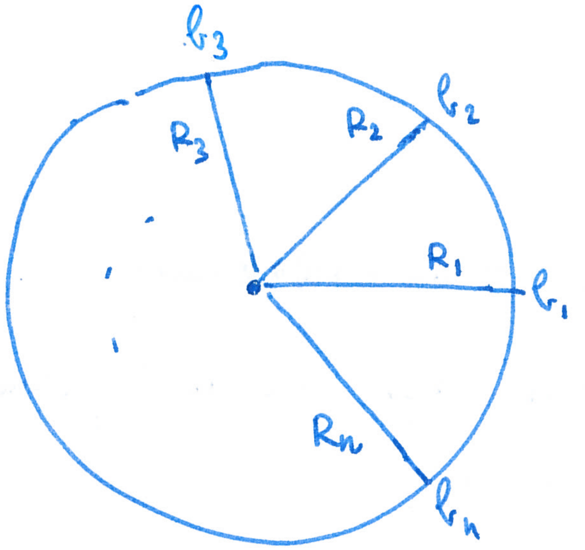
$$\underline{k}_{S^d \times S^d} \longrightarrow i_* \underline{k}_\Delta \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{+1}$$

qui donne

$$a^* a_* \Rightarrow \mathrm{id} \Rightarrow T \xRightarrow{+1}$$

Vers les faisceaux pervers sur les surfaces

(d'autres incarnations de la même catégorie)



$(n \geq 2)$ $\qquad$ $K = R_1 \cup \dots \cup R_n$

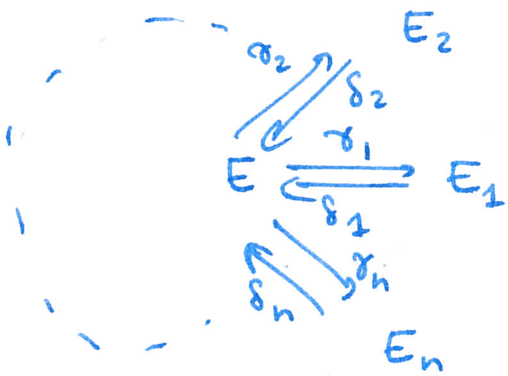
<u>Prop</u> : Pour $\mathcal{F}^\cdot \in \mathrm{Perv}(\Delta, 0)$, on a $\underline{\mathbb{H}}^i_K(\mathcal{F}^\cdot) = 0$ $\forall i \neq 0$. (récurrence)

Posons donc $E := \underline{\mathbb{H}}^0_K(\mathcal{F}^\cdot)_0$

et $\forall i = 1, \dots, n$, $E_i := \underline{\mathbb{H}}^0_K(\mathcal{F}^\cdot)_{b_i}$

On a des $\gamma_i : E \longrightarrow E_i$.

<u>Prop</u> : La catégorie $\mathrm{Perv}(\Delta, 0)$ est équivalente à la catégorie formée des diagrammes



vérifiant

- $\gamma_i \delta_i = id_{E_i}$
- $T_i := \gamma_{i+1} \delta_i : E_i \longrightarrow E_{i+1}$ iso.
- $i \neq j, j+1 \mod n$, $\gamma_i \delta_j = 0$.

Faisceaux pervers sur les surfaces

Soit S une surface compacte, possiblement à bord ∂S, $S^\circ := S - \partial S$.
$N \subseteq S^\circ$ un ensemble fini.

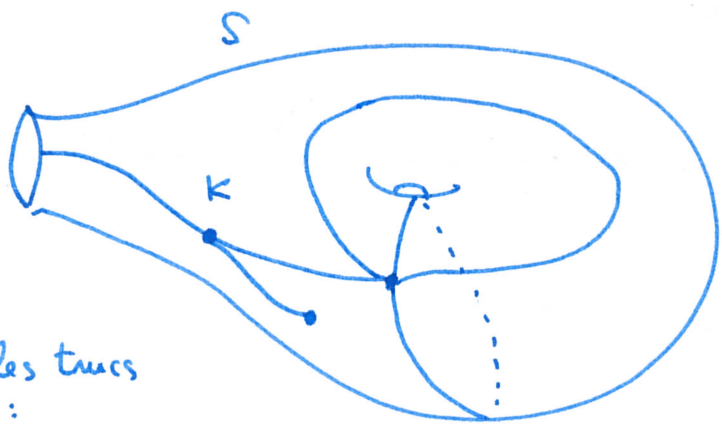
On veut comprendre $\mathrm{Perv}(S, N)$.

Une possibilité : recoller les $\mathrm{Perv}(\Delta, 0)$ et un système local sur $S - N$.

Plus dans l'esprit des Schobers pervers : s'appuyer sur un "squelette Lagrangian" pour faire une coupure globale.

Fixons un "graphe couvrant" K de S, ie un graphe avec une immersion fermée dans S°, tq $\overline{K} \subset S$ est un graphe dans S, et que $K \hookrightarrow S^\circ$ est une équivalence d'homotopie.

($\Rightarrow$ S doit avoir un bord)



$N := \mathrm{Vert}(K)$

En recollant les trucs locaux :

<u>Prop</u> : $\forall \mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(S, N)$, $\underline{H}^i_K(\mathcal{F}) = 0$ $\forall i \neq 0$.

<u>Prop</u> : $\mathrm{Perv}(S, N)$ est équivalente à la catégorie formée

→ $\forall x \in \mathrm{Vert}(K)$, E_x

→ $\forall e \in \mathrm{Ed}(K)$, E_e

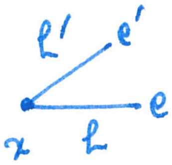
→ $\forall h$ half-edge, $E_x \underset{\delta_h}{\overset{\gamma_h}{\rightleftarrows}} E_e$

tq

→ pour x 1-valent, $1-\gamma_h\delta_h : E_h \to E_h$ isomorphisme

→ pour une valence ≥ 2,

- $\forall h$, $\gamma_h\delta_h = 1$

- 

$\gamma_{h'}\delta_h : E_e \to E_{e'}$ iso

- autre cas, $\gamma_{h'}\delta_h = 0$.