

Espaces de modules de courbes et opérades

GDT espaces stratifiés

Daniel Robert-Nicoud

1 Les espaces de modules de courbes

On présente les trois espaces $\mathcal{M}_{0,n}$, $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ et on étudie un peu leur structure et les liens entre eux.

Cette section se base principalement sur le mémoire [5] et l'article [3, Sect.2].

1.1 L'espace de modules de courbes en genre zéro et sa cohomologie

Soit $n \geq 3$. L'espace de modules de courbes en genre zéro $\mathcal{M}_{0,n}$ est l'espace de configurations de n points distingués sur la sphère de Riemann modulo les homographies. Pour être plus précis :

Définition 1.1. L'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ est donné par

$$\mathcal{M}_{0,n} := (\mathbb{P}\mathbb{C}^1)_0^n / \mathrm{PSL}(2),$$

où $X_0^n := \{x \in X^n \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$ et où l'action de $\mathrm{PSL}(2)$ est diagonale.

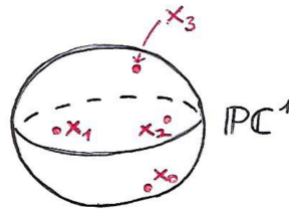


FIGURE 1: Un exemple de configuration de quatre points sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$.

On sait que l'action de $\mathrm{PSL}(2)$ est triplement transitive, et donc ceci nous permet de fixer trois points en $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$, comme par exemple $0 = [1 : 0]$, $1 = [1 : 1]$ et $\infty = [0 : 1]$, et d'obtenir

$$\mathcal{M}_{0,n} \cong (\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})_0^{n-3}. \quad (1)$$

Dit autrement, soit $z = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{P}\mathbb{C}^1)_0^n$. On peut alors choisir un représentant de la classe de z dans $\mathcal{M}_{0,n}$ de la forme $(\infty, 0, t_1, \dots, t_{n-3}, 1)$ avec $t_i \neq t_j$ pour $i \neq j$. Ceci décrit $\mathcal{M}_{0,n}$ comme une variété affine de la manière suivante

$$\mathcal{M}_{0,n} = \mathrm{Spec} \left(\mathbb{Z} \left[t_i, t_i^{-1}, (1 - t_i)^{-1}, (t_j - t_k)^{-1} \right]_{\substack{0 \leq i \leq n-3 \\ 0 \leq j < k \leq n-3}} \right).$$

On peut calculer l'anneau de cohomologie de $\mathcal{M}_{0,n}$ de la façon suivante.

Lemme 1.2. Pour $n \geq 2$, on a

$$\mathbb{C}_0^n \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathcal{M}_{0,n+1}.$$

En particulier, on a un isomorphisme d'anneaux

$$H^\bullet(\mathbb{C}_0^n) \cong H^\bullet(\mathbb{C}^*) \otimes H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n+1})$$

donné par la formule de Kunneth.

Remarque 1.3. Les anneaux de cohomologie sont à coefficients dans \mathbb{Z} .

Démonstration. L'isomorphisme est donné par

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(z_1, z_2 - z_1, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \dots, \frac{z_n - z_1}{z_2 - z_1} \right),$$

où on utilise l'identification (1). C'est évidemment un morphisme algébrique, et il est facile de vérifier qu'il est bijectif. \square

Théorème 1.4 (Arnold,[2]). L'anneau $H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ est l'anneau anticommutatif A engendré par des éléments ω_{ij} de degré 1, pour $1 \leq i, j \leq n$, avec les relations

$$\omega_{ij} = \omega_{ji}$$

et

$$\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0$$

(pas de somme implicite). Cette dernière relation est appelée la relation d'Arnold. Un isomorphisme explicite

$$A \longrightarrow H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$$

est donné par

$$\omega_{ij} \mapsto \frac{1}{2\pi i} \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}.$$

Démonstration. On ne donne que l'idée principale de la démonstration, sans plus de détails. On a un fibré

$$\mathbb{C}_0^n \longrightarrow \mathbb{C}_0^{n-1}$$

avec fibre donnée par \mathbb{C} sans $n - 1$ points. On peut montrer que le groupe fondamental de la base agit trivialement sur la cohomologie de la fibre, et qu'il existe une section globale du fibré. On utilisant ces faits et la suite spectrale de cohomologie de la fibration, on peut obtenir une formule pour $H^\bullet(\mathbb{C}_0^n)$ en termes de la cohomologie d'un bouquet de cercles. Une étude un peu plus approfondie nous donne la structure d'anneau décrite dans le théorème. \square

Corollaire 1.5. Les polynômes de Poincaré de \mathbb{C}_0^n et de $\mathcal{M}_{0,n}$ sont

$$P_{\mathbb{C}_0^n}(t) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + kt),$$

$$P_{\mathcal{M}_{0,n}}(t) = \prod_{k=2}^{n-1} (1 + kt)$$

respectivement. En particulier, on peut facilement retrouver les nombres de Betti de $\mathcal{M}_{0,n}$.

1.2 La compactification de Deligne-Mumford-Knudsen

Il existe une “bonne” compactification $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ de $\mathcal{M}_{0,n}$, construite par Deligne, Mumford et Knudsen dans les articles [4] et [8]. En fait, cette construction est valide pour les espaces de modules de courbes de genre g qui peut être différent de zéro, mais nous allons nous restreindre au cas qui nous intéresse, c’est-à-dire $g = 0$.

Définition 1.6. Une courbe nodale de genre zéro est une courbe projective dont toutes les singularités sont des points doubles, dont chaque composante lisse est isomorphe à $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$, et dont le graphe d’intersection est de genre zéro.

Une n -courbe stable de genre zéro est une courbe nodale avec n points lisses distincts telle que chaque composante lisse de la courbe contienne au moins 3 points entre les points distincts et les singularités.

Un automorphisme d’une courbe nodale est la donnée d’un automorphisme de chaque composante lisse de la courbe, tous préservant les points singuliers.

Définition 1.7. La compactification de Deligne-Mumford-Knudsen $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ de $\mathcal{M}_{0,n}$ est l’ensemble des n -courbes stables de genre zéro modulo les automorphismes.

Il est clair que $\mathcal{M}_{0,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$. Mais on a beaucoup plus que ça.

Théorème 1.8. Pour $n \geq 3$, l’espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est une variété projective lisse de dimension $n - 3$ et le complémentaire de $\mathcal{M}_{0,n}$ est un diviseur à croisements normaux.

Soit C une courbe stable avec $n + 1$ points marqués (x_0, \dots, x_n) . On associe à cette courbe un arbre réduit à n feuilles de la façon suivante :

1. On associe un sommet à chaque composante lisse de C .
2. On relie deux sommets par une arête si, et seulement si les deux composantes lisses associées ont un point singulier en commun.
3. La racine est attachée au sommet correspondant à la composante lisse qui contient le point x_0 , les feuilles de la même façon correspondent aux points x_1, \dots, x_n .

Soit t un arbre réduit. On dénote par $\mathcal{M}(t)$ le sous-ensemble de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ donné par les éléments dont l’arbre sous-jacent est t , et par $\overline{\mathcal{M}}(t)$ la clôture de $\mathcal{M}(t)$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$.

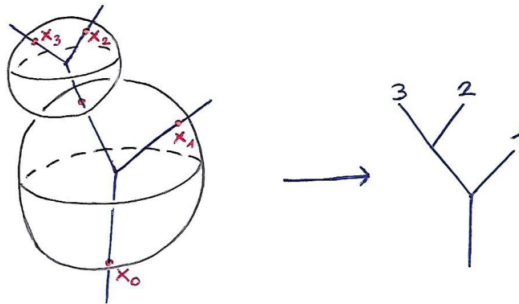


FIGURE 2: Un élément de $\overline{\mathcal{M}}_{0,3+1}$ et son arbre sous-jacent.

Ceci induit une stratification de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ par les arbres sous-jacents. Joan parlera de ceci plus en détail dans le prochain exposé.

Exemple 1.9. L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ est un point.

L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ est donné par une strate ouverte de dimension 1 donnée par $\mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ à laquelle on attache les trois strates codées par les arbres binaires d'arité 3, qui sont données par des points. Globalement on a $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^1$.

1.3 L'espace de modules de courbes de Brown

Dans son article [3], F.Brown introduit un autre espace de modules, noté $\mathcal{M}_{0,n}^\delta$, qui est en quelque sorte intermédiaire entre les deux espaces décrits précédemment, c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_{0,n} \subseteq \mathcal{M}_{0,n}^\delta \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{0,n}.$$

C'est un schéma affine lisse. Sa description est la suivante.

1.3.1 Coordonnées diédrales sur $\mathcal{M}_{0,n}$

Soit S un ensemble de cardinal $n \geq 4$. On note par $\mathcal{M}_{0,S}$ l'espace $\mathcal{M}_{0,n}$ où les variables sont indexées par les éléments de S .

Définition 1.10. Une structure diédrale δ sur S est l'identification de S avec les arêtes d'un n -gone modulo les symétries diédrales.

On va normalement représenter une structure diédrale par un n -gone régulier (S, δ) avec les arêtes numérotées par $1, 2, \dots, n$ dans l'ordre. Dans ce cas, on dénote par (i) le sommet entre l'arête i et l'arête $i+1$ (modulo n).

Si l'on a une structure diédrale sur $\mathcal{M}_{0,S}$, on peut définir des coordonnées comme suit : pour chaque couple $\{i, j\}$ tels que $i, i+1, j, j+1$ sont distincts (modulo n), soit

$$u_{ij} := \frac{(z_i - z_j)(z_{i+1} - z_{j+1})}{(z_i - z_{j+1})(z_{i+1} - z_j)}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que ceci dépend seulement du couple $\{(i), (j)\}$, et donc on peut représenter u_{ij} comme la corde reliant les deux sommets dans notre polygone.

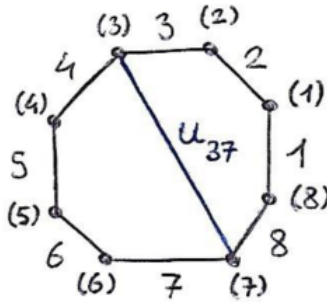


FIGURE 3: Coordonnées diédrales.

Il est possible de montrer que l'anneau de fonctions régulières sur $\mathcal{M}_{0,S}$ est engendré par les coordonnées diédrales u_{ij} et leurs inverses.

On dit que deux cordes a et b se *croisent* si elles s'intersectent à l'intérieur du polygone (S, δ) , et on écrit $a \sim_\times b$. Pour un ensemble de cordes A , on note par A^\times l'ensemble des cordes qui croisent toutes les cordes en A . Deux ensembles de cordes A et B sont dits se *croiser complètement* si $A^\times = B$ et $A = B^\times$. Sans démonstration, on a

Lemme 1.11. *Si A et B se croisent complètement, alors*

$$u_A + u_B = 1,$$

où $u_A = \prod_{a \in A} u_a$ et $u_B = \prod_{b \in B} u_b$.

1.3.2 L'extension diédrale $\mathcal{M}_{0,S}^\delta$

L'espace de modules de Brown est donné par le schéma affine suivant.

Définition 1.12. *Soit $I \subset \mathbb{Z}[u_{ij}]$ l'idéal engendré par les relations du lemme 1.11. L'extension diédrale $\mathcal{M}_{0,S}^\delta$ de $\mathcal{M}_{0,S}$ est le schéma affine*

$$\mathcal{M}_{0,S}^\delta := \text{Spec}(\mathbb{Z}[u_{ij}]/I).$$

Pour chaque corde a on définit un diviseur $D_a = \{u_a = 0\} \subset \mathcal{M}_{0,S}^\delta$.

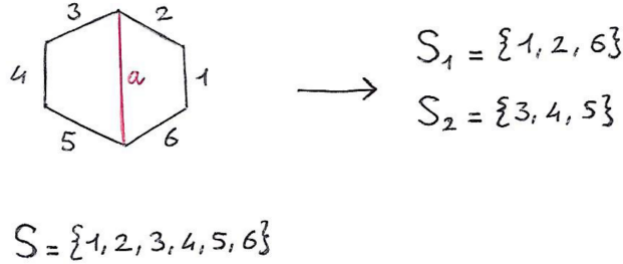
Lemme 1.13. *Il existe une immersion ouverte canonique i_δ de $\mathcal{M}_{0,S}$ dans $\mathcal{M}_{0,S}^\delta$ dont l'image est le complément des diviseurs D_a .*

On peut étudier la configuration de ces diviseurs comme suit. Soit a une corde, alors les identités du lemme 1.11 impliquent que poser $u_a = 0$ impose que $u_b = 1$ pour toute corde b avec $b \sim_\times a$ (en prenant $a \in A = \{b\}^\times$). Les équations se divisent en deux systèmes indépendants, correspondant aux cordes des deux polygones obtenus en coupant le polygone original en deux le long de la corde a . Ceci nous donne le résultat suivant.

Lemme 1.14. *On a un isomorphisme canonique*

$$D_a \cong \mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{a\}}^{\delta_1} \times \mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{a\}}^{\delta_2},$$

où les ensembles $S_1 \sqcup S_2 = S$ sont les sous-ensembles de S donnés par les arêtes d'un côté ou de l'autre de la corde a :



et δ_1, δ_2 sont les structures diédrales induites.

Remarque 1.15. *Ceci est un isomorphisme dans la catégorie des schémas. En fait, $\mathcal{M}_{0,S}^\delta$ forme une opérade topologique (cyclique) et donc on a une structure d'opérade (diédrale) sur son homologie. On ne va pas considérer cette structure.*

Il est évident que D_a et D_b ont une intersection non-vide si et seulement si les cordes a et b ne se croisent pas. On peut donc considérer des dissections de notre polygone par plusieurs cordes qui ne se croisent pas. Soit α un ensemble de k cordes qui ne se croisent pas, on définit

$$D_\alpha := \bigcap_{a \in \alpha} D_a.$$

Par le lemme 1.14 on a immédiatement un isomorphisme de D_α avec un produit d'espaces $\mathcal{M}_{0,S_i}^{\delta_i}$.

Théorème 1.16. *Le schéma affine $\mathcal{M}_{0,S}^\delta$ est intégral et lisse. Les diviseurs D_a , où a est une corde, sont lisses et à croisements normaux.*

Une démonstration est donnée dans [3, Sect.2.4].

1.3.3 Relation avec la compactification de Deligne-Mumford-Knudsen

On revisite les espaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,S}$ de façon à rendre leur lien avec les espaces de modules de Brown plus explicites. Soient $i, j, k, l \in S$ quatre éléments distincts. On définit le birapport

$$[i \ j \ | \ k \ l] = \frac{(z_i - z_k)(z_j - z_l)}{(z_i - z_l)(z_j - z_k)} : \mathcal{M}_{0,S} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Remarque 1.17. *Les coordonnées diédrales u_{ij} définies auparavant ne sont rien d'autre que le birapport $u_{ij} = [i \ i+1 \ | \ j+1 \ j]$.*

L'ensemble de toutes les birapports nous donnent un plongement

$$\prod_{i,j,k,l \in S} \mathcal{M}_{0,S} \longrightarrow (\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^{\binom{n}{4}}.$$

Ceci nous mène à définir le schéma projectif défini sur \mathbb{Z}

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,S} \subset (\mathbb{P}\mathbb{C}^1)^{\binom{n}{4}}$$

par les coordonnées $[i \ j \ | \ k \ l]$ satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} [i \ j \ | \ k \ l] &= 1 - [i \ k \ | \ j \ l], \\ [i \ j \ | \ k \ l] &= [i \ j \ | \ l \ k]^{-1} = [j \ i \ | \ k \ l]^{-1}, \\ [i \ j \ | \ k \ l] &= [k \ l \ | \ i \ j], \\ [i \ j \ | \ k \ l] &= [i \ j \ | \ k \ m][i \ j \ | \ m \ l]. \end{aligned}$$

Sans démonstration, on a :

Théorème 1.18. *Ce schéma donne exactement la variété projective $\overline{\mathcal{M}}_{0,S}$ définie dans la section 1.2.*

Pour chaque structure diédrale δ sur S on peut définir un ouvert $U^\delta \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,S}$ par

$$U^\delta := \{[i \ j \ | \ k \ l] \neq 0 \text{ si } i, j, k, l \text{ sont en ordre diédral par rapport à } \delta\}$$

(“en ordre diédral” signifie que i vient avant j qui vient avant k qui vient avant l qui vient avant i dans le polygône associé).

Le résultat suivant motive le fait que l'espace de modules de Brown est en quelque sorte une version moins symétrique de $\overline{\mathcal{M}}_{0,S}$.

Théorème 1.19. *Les ouverts $\{U^\delta\}_{\delta \text{ struct. diéd.}}$ forment un recouvrement ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_{0,S}$, et on a un isomorphisme canonique $\mathcal{M}_{0,S}^\delta \cong U^\delta$.*

2 Les structures opéradiques en jeu

Les espaces ainsi présentés donnent lieu à des opérades intéressantes. Dans cette section, on va décrire ces opérades et commencer à parler des liens entre elles. Ce travail sera complété par Joan dans le prochain exposé. Un point important sera l'introduction du concept de (co)opérade diédrale.

Les sources principales sont l'article [6] et à nouveau le mémoire [5].

2.1 L'opérade de Deligne-Mumford-Knudsen

On a une opérade (topologique) $\overline{\mathcal{M}}$ construite comme suit. Soit $\overline{\mathcal{M}}(1) := \{*\}$ le point et pour $n \geq 2$ on définit $\overline{\mathcal{M}}(n) := \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ avec l'action de \mathbb{S}_n donnée par permutation des derniers n points marqués. La composition opéradique

$$\overline{\mathcal{M}}(k) \times (\overline{\mathcal{M}}(n_1) \times \dots \times \overline{\mathcal{M}}(n_k)) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(n_1 + \dots + n_k)$$

est donnée en collant les points marqués (x_1, \dots, x_k) de $\overline{\mathcal{M}}(k)$ sur les points marqués x_0 de $\overline{\mathcal{M}}(n_1) \times \dots \times \overline{\mathcal{M}}(n_k)$.

Définition 2.1. *L'opérade topologique $\overline{\mathcal{M}}$ est appelée l'opérade de Deligne-Mumford-Knudsen.*

Il est évident que la composition de deux éléments avec arbres sous-jacents t et s va nous donner un arbre avec comme arbre sous-jacent le greffage de t et s à la feuille appropriée :

dessin

Pour $n \geq 2$, la corolle à n feuilles est l'arbre sous-jacent de tous les éléments provenant de $\mathcal{M}_{0,n+1} \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$. On voit donc que la compactification de l'espace de modules de courbes est donnée par toutes les compositions supérieures.

Comme on a une opérade topologique, son homologie $H_\bullet(\overline{\mathcal{M}})$ est naturellement une opérade algébrique.

Remarque 2.2. *En fait, l'identification du premier point marqué avec la racine est complètement arbitraire. On peut ne pas forcer ceci et obtenir une opérade cyclique.*

2.2 La coopérade de la cohomologie des $\mathcal{M}_{0,n+1}$

2.2.1 Formes logarithmiques et résidus de Poincaré

Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage de 0, et soit ∂U le diviseur donné par l'ensemble des points $z = (z_1, \dots, z_n)$ de U tels que $\prod_{i=1}^r z_i = 0$ pour $0 < r < n$ fixé.

Définition 2.3. *Une forme différentielle méromorphe sur U est une forme logarithmique le long de ∂U si elle peut être écrite comme une combinaison linéaire de termes de la forme*

$$\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \frac{dz_{i_2}}{z_{i_2}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_s}}{z_{i_s}} \wedge \eta$$

pour $0 < i_1 < \dots < i_s < r$ et η une forme holomorphe sur U .

Si θ est une forme logarithmique sur U , alors il y a une unique façon de l'écrire sous la forme

$$\theta = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \alpha + \beta,$$

où α et β sont des formes logarithmiques le long de $\prod_{i=2}^r z_i$. On définit le résidu de θ le long de $z_1 = 0$ comme la restriction

$$\text{Res}(\theta) := 2\pi i \alpha|_{\{z_1=0\}} .$$

C'est une nouvelle forme logarithmique de degré inférieur de 1 sur le diviseur $\partial U \subseteq \{z_1 = 0\} \subset U$. L'opération donnée par prendre le résidu anticommute avec la différentielle :

$$\text{Res} \circ d + d \circ \text{Res} = 0 .$$

On peut définir des autres résidus en intégrant le long de z_i au lieu de z_1 .

Soit X une variété, et soit ∂X un diviseur. En recollant les définitions qu'on vient de donner, on obtient un complexe de faisceaux de formes logarithmiques le long du diviseur, qu'on dénote

$$\Omega_X^\bullet(\log \partial X)$$

avec des résidus qui passent en cohomologie grâce au fait que le résidu défini localement (anti)commute à la différentielle.

Remarque 2.4. *En fait, pour des questions de compatibilité avec les structures de Hodge mixte, il faut tordre la cohomologie twist de Tate.*

2.2.2 La structure de coopérate sur $H^{\bullet-1}(\mathcal{M}_{0,n+1})$

Les classes de cohomologie de $\mathcal{M}_{0,S}$ peuvent être représentées par la restriction à $\mathcal{M}_{0,S}$ de formes différentielles sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,S} \supset \mathcal{M}_{0,S}$ logarithmiques le long de $\overline{\mathcal{M}}_{0,S} \setminus \mathcal{M}_{0,S}$ (par un résultat général du à Griffith et Deligne). Si l'on prend maintenant un arbre t à une arête interne avec les feuilles indexées par S , on aura un diviseur associé

$$\mathcal{M}(t) \cong \mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{v\}} \times \mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{v\}},$$

où S_1 et S_2 sont les ensembles d'éléments de S qui sont reliés au premier sommet de l'arbre et au deuxième respectivement. Ce diviseur est de codimension 1, et donc on a exactement un résidu sur les formes logarithmiques. On peut donc appliquer le résidu puis l'isomorphisme de Künneth pour obtenir un morphisme

$$\Delta_t : H^{a+b-1}(\mathcal{M}_{0,S}) \longrightarrow H^{a-1}(\mathcal{M}_{0,S_1 \cup \{v\}}) \otimes H^{b-1}(\mathcal{M}_{0,S_2 \cup \{v\}}) .$$

Ceci induit la structure de coopérate sur l'homologie de $\mathcal{M}_{0,\bullet}$.

Remarque 2.5. *Comme on a déjà mentionné, pour que tout ceci fonctionne de façon correcte il faut ajouter un twist de Tate (et un signe de Koszul dans le coproduit). Plus de détails sont donnés dans [6, sect.2].*

Définition 2.6. *La coopérate (cyclique) ainsi obtenue est appelée la coopérate de gravité.*

2.3 La coopérate diédrale associée à l'espace de configuration de Brown

2.3.1 (Co)opérate diédrales

Une opérate diédrale est une opérate où les opérations sont codées par des polygones et des recollements de polygones le long des arêtes dans le plan, avec symétrie diédrale. De façon équivalente, on peut coder les opérations par des arbres planaires "dans le plan" (en prenant le graphe dual) toujours avec symétrie diédrale, ou par des arbres planaires dans l'espace (la symétrie est alors codée par la liberté de bouger dans la troisième dimension).

Remarque 2.7. *Il est important de noter que les arbres planaires qu'on considère n'ont pas de racine distinguée : les concepts d'entrée et de sortie d'une opération sont interchangeable. On parle alors d'opérade cyclique non-symétrique.*

Une définition plus formelle est donnée dans [6], où une monade d'arbres diédraux est définie. Une opérade diédrale est alors une algèbre sur cette monade.

Une coopérade diédrale est tout simplement le concept dual (une cogèbre sur la comonade des arbres diédraux).

2.3.2 La coopérade de gravité diédrale

En appliquant exactement le même procédé qu'on a à peine vu au niveau de l'espace de modules de Brown $\mathcal{M}_{0,S} \subset \mathcal{M}_{0,S}^\delta$, on obtient une structure de coopérade diédrale sur la cohomologie $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,S})$. Dans l'article [6], Bruno et Clément ont montré que cette coopérade est colibre, ce qui est équivalent au fait que la structure de Hodge mixte sur $\mathcal{M}_{0,S}^\delta$ est pure.

Références

- [1] Johan Alm, Dan Petersen, *Brown's dihedral moduli space and freedom of the gravity operad*, arXiv :1509.09274, 2015.
- [2] Vladimir I. Arnold, *The cohomology ring of the colored braid group*, Mat. Zametki – 5 :2, 227-231, 1969.
- [3] Francis C. S. Brown, *Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$* , Annales scientifiques de l'ENS – tome 42, fascicule 3, 2009.
- [4] Pierre Deligne, David Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications mathématiques de l'IHES – tome 36, pp. 75-109, 1969.
- [5] Clément Dupont, *Espaces de modules de courbes en genre zéro et opérades*, rapport de stage, 2009.
- [6] Clément Dupont, Bruno Vallette, *Brown's moduli space of curves and the gravity operad*, arXiv :1509.08840v2, 2015.
- [7] Ezra Getzler, *Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces*, arXiv :alg-geom/9411004v1. 1994.
- [8] Finn F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves II : the stacks $M_{g,n}$* , Math. Scand. 52, pp. 545-574, 1983.