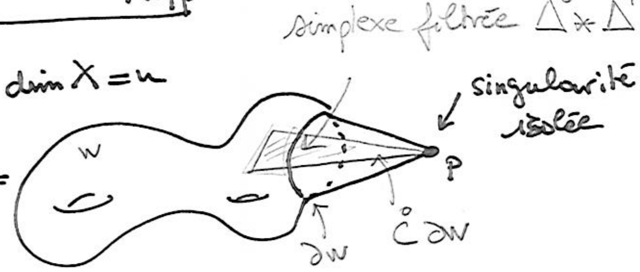
Complexes de faisceaux auto-duaux [David Chataur, Montpellier, 2016]

Exemples de calcul de $H^\bullet_{TW,\bar p}$

W : var à bord et on fait le cône du bord $\dim X = n$

$X =$ 

strate régulière $:= X - p$

'50 : géodiff : théorie auto-dual des formes diff. [Cheeger]

$$\begin{array}{ccc} C^\bullet(W) & \xleftarrow{\quad\quad} & C^\bullet(W) \underset{C^\bullet(\partial W)}{\oplus} \tau^{\leq \bar p} C^\bullet(\partial W) \simeq C^\bullet_{TW,\bar p}(X) \\ \Big\downarrow \text{rest.} & \lrcorner & \Big\downarrow \\ C^\bullet(\partial W) & \longleftarrow & \tau^{\leq \bar p} C^\bullet(\partial W) \end{array}$$

$$\tau^{\leq \bar p} C^\bullet(\partial W) = \begin{cases} C^\bullet(\partial W) & \bullet < \bar p(n) \\ \ker d & \bullet = \bar p(n) \\ 0 & \bullet > \bar p(n) \end{cases}$$

$$H^\bullet_{TW,\bar p}(X) \cong \begin{cases} H^\bullet(W) & \bullet \leq \bar p(n) \\ \ker\left(H^\bullet(W) \to H^\bullet(\partial W)\right) & \bullet = \bar p(n) \\ H^\bullet(X) & \bullet > \bar p(n) \end{cases}$$

1- Motivation pour $IH^\bullet_{\bar p}$ (Historique)

50-60 : topo alg : classification des variétés.

Déf : X cw cx fini, 1-connexe. On dit que X est à DP de dim n s'il $\exists$ $[X] \in H_n(X, \mathbb{Z})$ tq $H^i(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{[X]\cap -} H_{n-i}(X, \mathbb{Z})$ iso

Ex : var compacte orientée (peut être vu comme une obstruction à cela).

Pb. $\exists$? var topo M tq $M \xrightarrow{\sim} X$?
(compacte, orientée, ss bord ; $\sim$: homotopie)

Solution : (Browder, Novikov, Sullivan, Wall — fin 60, Ranicki 90)

- $\exists$ une suite exacte longue de groupes abéliens

$$\dots \to L_k(X) \xrightarrow{A} L_k(\mathbb{Z}) \to S_k(X) \to L_{k-1}(X) \to L_{k-1}(\mathbb{Z}) \to$$

- quand X est à dualité de Poincaré, on a $s(X)$: classe d'obstruction totale, $s(X) \in S_n(X)$

$$s(X) = 0 \iff \exists M \text{ var topo} \dots \text{ tq } M \simeq X$$

On a une deuxième suite exacte

$$\dots \to L^\circ_k(X) \xrightarrow{A} L^\circ_k(\mathbb{Z}) \to S^\circ_k(X) \to \dots$$

($\in Ab$)

et

$$\begin{array}{c} S^\circ_n(X) \ni s^\circ(X) \\ \uparrow \\ S_n(X) \ni s(X) \end{array}$$

Thm

$$s^\circ(X) = 0 \iff \exists M \text{ var topo } M \simeq X$$

($\simeq$: iso en $H_\bullet(-; \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}])$)

Ex de cx symétrique à DP

X espace à DP. $\rightsquigarrow C^\bullet_{sing}(X; \mathbb{Z})$

On a $(W_{2,d})$ (résolution de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$\hookrightarrow (W_2)_i := \mathbb{Z}\langle e_i ; \tau . e_i \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ action triviale

$\mathfrak{S}_2$-module libre

avec $d e_i = e_{i-1} + (-1)^i \tau e_{i-1}$

début de l'opérade de Barratt-Eccels.

$W_2 \otimes_{\mathfrak{S}_2} C^\circ(X)^{\otimes 2} \longrightarrow C^\circ(X)$

$e_i \otimes \alpha_e \otimes \beta_m \longmapsto \alpha_e \cup_i \beta_m$

avec $\alpha \cup_0 \beta$ = cup produit.

$W_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} C^\circ(X)^{\otimes 2} \longrightarrow C^\circ(X) \xrightarrow{[X]\cap -} C_{n-\bullet}(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$

Déf : Un cx (A°, d) est symétrique à DP de dim n si on a une application $W_2 \otimes_{\mathfrak{S}_2} (A^\circ)^{\otimes 2} \to \mathbb{Z}[-n]$ tq la restriction $(W_2)_0 \otimes_{\mathfrak{S}_2} (A^\circ)^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[-n]$ est non-dégénérée (i.e $A^i \xrightarrow{\sim} (A^{n-i})^*$)

$L^\circ_n(\mathbb{Z}) := \{$ cx sym à DP de dim $n \}$: modèles algébriques pour les espaces à DP (bordisme alg.) ou groupes de Witt.

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{qd } k \equiv 0 \ [4] \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{qd } k \equiv 1 \ [4] \\ 0 & \text{— } 2, 3 \end{cases}$$

Déf : $L^\circ_k(X)$ on remplace A par un complexe de faisceau $\mathcal{C}^\circ(-)$ sur X et à la place de $\mathbb{Z}$: faisceau d'orientation

L°_k : théorie homologique généralisée de coeffs $L^\circ_k(\mathbb{Z})$

Déf : $S_k := \{$ cx L°_k tq section globale soit acyclique $\}$ / bordisme

approche faisceautique due à

- Thomas Hutt [95]
- Eppelmann
- Banagl, Laures, McClure

Pt de vue de Sullivan

$\exists$ classe d'esp. stratifiés qui portent un cx de faisceaux à DP = K "on en fait du bordisme"

$\Omega^k_*(X) \to L^\circ_*(X)$ "bonne" approximation

("notes au MIT")

Signature et IH°

X stratifié avec des strates en dim paire.

Alors

~~$IH^*_{\bar m}(X;\mathbb{F}) \xrightarrow{\cong}$~~

alors $(\dim X = n)$

$IH^\circ_{\bar m}(X;\mathbb{F}) \xrightarrow{\simeq} IH^\circ_{\bar n}(X;\mathbb{F})$

$IH^i_{\bar m}(X;\mathbb{F}) \otimes IH^{n-i}_{\bar n}(X;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ non-dég.

Analyse pour les singularités isolées

$\dim X = 2n+1$

$C^\circ_{\bar m}(X) \to C^\circ_{\bar n}(X)$

cofibre : $R^\circ_{\bar m}(X)$

$H^n(\partial W; \mathbb{F})$

Déf [P. Siegel] X espace stratifié de dim m est dit espace de Witt si :

$\forall x \in X$, $x \in S$ (strate singulière)

$IH^{L/2}_{\bar m}(\mathrm{Link}(x), \mathbb{Q}) = 0$

$L := \dim \mathrm{Link}(x)$.

$\boxed{\text{Thm}}$ [P. Siegel]

$$\Omega_\bullet^{\text{Witt}} = \begin{cases} W(\mathbb{Q}) & \text{pour } \bullet \equiv 0\ [4] \\ & \bullet > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{pr } \bullet = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déf: IP-espaces

[Pardon] (1) $C^\bullet_{\bar m}(X) \xrightarrow{\sim} C^\bullet_{\bar n}(X)$

(2) $IC^\bullet_{\bar m} \xrightarrow{\sim} IC^\bullet_{\bar n - \bullet}(X)$

$(1)+(2) \Longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dual de Verdier}}}{\mathbb{D}_X} IC^\bullet_{\bar m} \simeq IC^\bullet_{\bar m}$

$$\Omega_*^{IP}(Y) \xrightarrow{\Phi} L^\bullet_*(Y)$$

$$\begin{array}{c} X \text{ esp IP} \\ \downarrow f \\ Y \end{array} \longmapsto \left[f_* IC^*_{\bar m} \right]$$

"Théorèmes des variétés charactéristiques"

[Sullivan]

$$\Omega_\bullet^{IP}(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \bullet = 0\ [4] \\ \mathbb{Z}/2 & \bullet = 1\ [4] \\ & \bullet > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$