Introduction aux faisceaux pervers [François Petit, Montpellier, 2016]

faisceaux constructibles : Chevalley, Grothendieck (géo alg)
puis IH : généraliser la dualité
[Goresky - Mac Pherson]
et D-modules (pr un pb de Hilbert)
(avec une monodromie, on cherche une EDP qui la donne).

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{holonome régulier}}}{D^{b \swarrow \text{borné}}_{rh}}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{DR_X} D^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(X) \quad : \text{équivalence de cat.}$$

$$\begin{array}{ccc} D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) & & D^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(X) \\ \updownarrow & & \updownarrow \text{ faisceau constructibles} \\ Mod_{rh}(\mathcal{D}_X) & \longrightarrow & ? \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \\ \Delta f = \lambda f \\ z_1 \partial_{z_2} f - z_2 \partial_{z_1} f = 0 \end{cases}$$

$? =$ faisceaux pervers

Thèse 79 : Kashiwara conditions sur faisceaux pervers

Déf : Support de F

$$Supp(F) = \left(\bigcup \{ U \in \mathcal{O}(X) \mid F_{|U} = 0 \} \right)^c$$

Prop : Si f est propre sur le support de F

(i) $f_! F \xrightarrow{\sim} f_* F$

en particulier si f propre : $f_! F \simeq f_* F$

(ii) $f_!$ exact à gauche

(iii) $(f \circ g)_! \simeq f_! \circ g_!$

Rq : On cherche un adjoint à droite de $f_!$
$f_!$ exact à gauche, s'il a un adjoint, il est exact à droite $\Rightarrow f_!$ sera exact.

$X = \mathbb{C}/\Lambda \quad f = a_X$

$$R^i f_! \mathbb{C}_X = R^i a_{X!} \mathbb{C}_X = H^i(X, \mathbb{C}_X)$$

$H^1(X, \mathbb{C}_X) \neq 0$

$\Rightarrow \not\exists$ toujours

I - Dualité de Verdier

ici $Sh(Ab(X))$

X, Y deux esp. topo séparés loc^t compacts

$f : X \longrightarrow Y$ continue

F faisceau sur X

$f_* F \longrightarrow Y \qquad f_* F(V) := F(f^{-1}(V))$

Déf

$$f_! F := \{ s \in f_* F(V) \mid f : supp(s) \to V \text{ est propre} \}$$

(f^{-1}(compact) : compact)

où le support d'une section

$s \in F(U)$, $supp(s) = \{ x \in U \mid s_x \neq 0 \}$

$$\begin{array}{ccc} s \in F(U) & \longrightarrow & F_x \\ s & \longmapsto & s_x \end{array} \quad \text{germe de fcts}$$

$a_X : X \to \{*\}$

$$a_{X!} F = \{ s \in F(X) \mid supp(s) \text{ compact} \}$$

Exercice : $i_Z : Z \hookrightarrow X$ inclusion ouverte / fermée

$i_{Z!}$ est exacte

si Z ouvert $(i_{Z!} \dashv i_Z^{-1})$

si Z fermé $i_{Z!} \dashv i_Z^{-1} \Gamma_Z$

Déf : $\Gamma_Z(F)$: sections de F supportées dans Z

$$\Gamma_Z(F)(U) := \Gamma_{Z \cap U}(F(U)) = \ker(F(U) \to F(U \setminus Z \cap U))$$

$\Gamma_K(\mathcal{C}^\infty)$: fct $\mathcal{C}^\infty$ supportée dans K.

$\Gamma_K(\mathcal{O}_{\mathbb{C}})(\mathbb{C}) = 0$
holomorphe

$\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X) \ni F$

(modules sur le faisceau cst)

a assez d'injectifs : $F \xrightarrow{\sim} I^\cdot$ résolution inj.

$$H^i(X,F) := H^i(\Gamma(X,I^\cdot))$$

et $\Gamma(X,F) = a_{X_*}(F) = F(a_X^{-1}(pt)) = F(X)$

et $H^i(X,F) = H^i(a_{X_*}(F)) = H^i(a_{X!}I^\cdot) = R^i a_{X_*}F$ compact $(a_{X!}F)$

(= cohomologie usuelle des espaces cor résolutions acycliques usuelles de Rham, ...)

Donc on bosse dans la catégorie dérivée

$\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_X) \longrightarrow Ch(\mathbb{Z}_X)$

catégorie dérivée $= D(\mathbb{Z}_X) := Ch(\mathbb{Z}_X)[qis^{-1}]$.

et $D^b(\mathbb{Z}_X) := \{F^\cdot \in Ch(\mathbb{Z}_X) \mid \underbrace{H^i(F^\cdot)}_{\text{Z faisceau de cohomologie}} = 0 \text{ pour } |i| \gg 0\}$

$\cap$ sous-catégorie pleine

$D(\mathbb{Z}_X)$

$\cup$

$D^+(\mathbb{Z}_X) = \{F^\cdot \in Ch(\mathbb{Z}_X) \mid H^i(F) = 0, \ i \ll 0\}$

$\boxed{\text{Thm}}$ Soient X et Y deux esp topo loc^t compacts

$f : X \to Y$ cont de "dim cohomologique finie"

pour conserver le côté borné en cohomologie

alors

$$Rf_! : D^+(\mathbb{Z}_X) \longrightarrow D^+(\mathbb{Z}_Y)$$

a un adjoint à droite

$f^! : D^+(\mathbb{Z}_Y) \longrightarrow D^+(\mathbb{Z}_X)$, ie

$$\mathrm{Hom}_{D^+(\mathbb{Z}_X)}(F^\cdot; f^! G^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_{D^+(\mathbb{Z}_Y)}(Rf_! F^\cdot; G^\cdot)$$

Dém : locale puis recollement. □

Ex : les variétés algébrique $\mathbb{C}$ sont de analytiques dim cohomologique finie.

$\exists n$ tq $\forall F \in Sh(\mathbb{Z}_X)$

$$H^i_c(F) = 0 \quad i > n$$

et les morphismes entre telles variétés sont de dim cohomologiques finie.

Prop $(f \circ g)^! = g^! \circ f^!$

Déf : $a_X : X \longrightarrow \{x\}$

Le complexe dualisant de X est l'objet de $D^+(\mathbb{Z}_X)$: $a_X^!(\mathbb{Z}) =: \omega_X$

On définit

$$D_X : D^+(\mathbb{Z}_X) \longrightarrow D^+(\mathbb{Z}_X)^{op}$$

$$F^\cdot \longmapsto R\mathcal{H}om_{\mathbb{Z}_X}(F^\cdot, \omega_X)$$

où le hom interne :

$\mathcal{H}om(F^\cdot; G^\cdot)$:

$\mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$

$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(F_{|U}; G_{|U})$

Prop : Si X est un var topo de dim n

$\omega_X \simeq or_X[n]$

faisceau d'orientation

si X orientable, le choix d'une orientation donne $\omega_X \simeq \mathbb{Z}_X[n]$

Prop : $Rf_* D_X(F^\cdot) \simeq D_Y(Rf_! F^\cdot)$

$f^! D_Y(G^\cdot) \simeq D_X(f^{-1}G^\cdot)$

Application de la dualité de Poincaré

$f = a_X$; $F = $ cst $\Longrightarrow$

$H^{sing}_\cdot \cong H^\cdot_c$

$\forall i \in [\![0,n]\!]$, $H^i_c(X;\mathbb{Q}_X)^* \simeq H^{n-i}(X, or_X)$

$= H^i(\mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_X; or_X[n]))$

$\simeq H^{-i}(R\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_X, \omega_X))$

$\simeq H^{-i}(R\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_X; a_X^! \mathbb{Q}))$

$\simeq H^{-i}(R\mathrm{Hom}(Ra_! \mathbb{Q}_X; \mathbb{Q}))$

$\simeq H^{-i}((Ra_{X!}\mathbb{Q}_X)^*)$

$\simeq (H^i(Ra_{X!}\mathbb{Q}_X))^*$

$\simeq H_c^{-i}(X;\mathbb{Q}_X)^* = (H_c^{-i}(X))^*$

où $R\mathrm{Hom}(F^\cdot; G^\cdot) = \mathbb{R}\Gamma(X, R\mathcal{H}om(F^\cdot; G^\cdot))$

et $R\Gamma(X;F) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_X}(\mathbb{Q}_X; F)$
("suite spectrale locale $\to$ globale")

Systèmes locaux (= faisceaux loc^t cst)

pas stables par image directe.(*)
pas assez d'inj...

Déf: Un faisceau loc^t cst est dans $\mathrm{Mod}(A_X)$: faisceau F pour lequel il existe $(U_i)_{i\in I}$ un recoll^t de X et des modules M_i tq $F_{|U_i} \simeq M_{i|U_i}$

Système local A = corps ou $\mathbb{Z}$

fibres sont des modules libres de rang fini

(*) Ex: $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$
$z \mapsto z^2$

$\mathbb{C}_X$ faisceau cst sur $\mathbb{C}$

$(\phi_* \mathbb{C}_X)_z = \begin{cases} z\neq 0 & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \\ z=0 & \mathbb{C}\end{cases}$

$\Rightarrow$ pas local^t cst
(parce que $\mathbb{C}$ est connexe)

mais $\phi_*\mathbb{C}_X$ est loc^t cst sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

et cst sur $\{0\}$

$\Rightarrow \phi_*\mathbb{C}_X$ est constructible.

Rq: A posé dans l'exposé de Damien (et Christophe).

Déf: Un faisceau F est $\mathbb{C}$-constructible s'il existe une stratification $\{S_\alpha\}$ tq $F_{|S_\alpha}$ loc^t cst.

Faisceaux constructibles

Déf X var analytique $\mathbb{C}$

Une partition loc^t finie (finie) de X

$X = \coprod_{\alpha\in A} S_\alpha$ par des sous-espaces analytiques loc^t fermés S_α (sous-var alg.) est appellée une stratification si

- $\forall \alpha\in A$, S_α lisse
- $\overline{S_\alpha} = \coprod_{\beta\in B} S_\beta$, $B\subset A$

Rq: on peut toujours la raffiner en une stratification de Whitney.

2 méthodes en géo alg: site étale ou

X var alg, X^{an}: analytifié (on voit les polynômes comme fcts holomorphes).

$\left\{ \coprod_{n\pi} \right.$ est une sous-var analy de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mais pas alg $\left.\right\}$

On note $D^b_c(X) :=$ cat. dérivée des faisceaux à cohomologie constructible.

$X \rightsquigarrow X^{an}$

$D^b_c(X^{an})$	$D^b_c(X)$
$\cup$	
$D^b_c(X)$	$D^b_c(X)$
X alg	X analytique

H^i-constructibles sur les strates algébriques

$\boxed{\text{Thm}}$ $f : X \to Y$ morph de var alg/analytique

1) Si $\mathcal{G} \in D^b_c(Y)$, $f^{-1}(\mathcal{G})$, $f^! \mathcal{G} \in D^b_c(X)$

2) si $\mathcal{F} \in D^b_c(X)$ et f régulière

$Rf_* \mathcal{F}$ et $Rf_! \mathcal{F} \in D^b_c(X)$

3) $\mathcal{F} \in D^b_c(X)$, f analytique tq $f|_{\operatorname{supp} \mathcal{F}}$ est propre alors $\underset{\underset{Rf_! \mathcal{F}}{\wr\wr}}{Rf_* \mathcal{F}} \in D^b_c(Y)$

4) $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G} \in D^b_c(X)$, $\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G} \in D^b_c(X)$

de même $R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

Rq: . en alg : on peut compactifier encore alg

(faux en analytique).

$\exists$ singularités essentielles à l'∞.

. On peut vérifier que $\mathcal{F} \in D^b_c(X)$ est constructible loc^t

Prop: X var analy\alg $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D^b_c(X)$

1) $D_X(\mathcal{F}) \in D^b_c(X)$

2) $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} D_X D_X(\mathcal{F})$

3) $R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq R\mathcal{H}om(D_X \mathcal{G}, D_X \mathcal{F}) \simeq D_X(D\mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F})$

Prop X var analytique $\mathbb{C}$

$\mathcal{F} \in D^b_c(X)$

$\forall x_0 \in X$, $\exists$ un syst. fondamental de voisinages $(V_i)_i$ de x_0 tq le morph canonique

$R\Gamma(V_i; \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{x_0}$

Exemple: sur $\mathbb{C}$

(E_q) $z \dfrac{\partial f}{\partial z} - \alpha f = 0$

$F = \{ f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \mid z \frac{\partial f}{\partial z} - \alpha f = 0 \}$

constructible le long de $\mathbb{C} \setminus \{0\} \sqcup \{0\}$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\quad F \simeq \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$

Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, B_ε boule centrée en z_0, rayon ε

$z_0 \neq 0$, $\varepsilon < |z_0|$

$a(z) = \dfrac{\alpha}{z}$ et $A(z)$ une primitive de $a(z)$ sur B_ε

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{|B} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] \arrow[d, equal, shift right=6] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}|B} \arrow[r, "z\frac{\partial}{\partial z} - \alpha"] \arrow[d, "\wr\, e^{-A(z)}"] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}|B} \arrow[d, "\wr\, \frac{1}{z} e^{(-A(z))}"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C}_{|B} \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}|B} \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial z}"'] & \mathcal{O}_{\mathbb{C}|B}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ F constructible | $\Rightarrow$ donne un faisceau constructible en degré 0. ($\Leftrightarrow$ revêtement ramifié).

X courbe $\mathbb{C}$ lisse

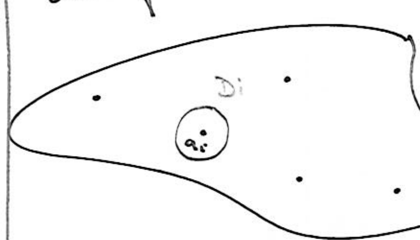
$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ens. discret de pts.

$U = X \setminus Z$

un faisceau constructible sur X : la donnée

. un système local L sur U.

. pour chaque a_i : un ev de dim finie. E_i



maintenant, il faut se donner les restrictions

$$\mathcal{F}(D_i) \to \underset{\substack{\parallel \\ \text{section globale} \\ \text{d'un syst local} \\ \text{sur le cercle}}}{\mathcal{F}(D_i \setminus \{a_i\})} = L(D_i \setminus \{a_i\}) \circlearrowleft_{T_i} = \ker(T_i - id)$$

= matrice de monodromie

(GV)

$\underset{\underset{E_i}{\parallel}}{\mathcal{F}(D_i)} \to \ker(T_i - id)$

. Faisceaux pervers

Catégorie triangulée

D additive

$X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$

$X[1] \to Y[1] \to \dots$

Ex: $D(\mathrm{Mod}_R)$

$\hookrightarrow$ pour faire de l'alg homologique

Déf: Une t-structure sur $\mathcal{D}$ catégorie triangulée est la donnée de 2 ss-cat. pleines $D^{\leq 0}$ et $D^{\geq 0}$

$D^{\leq n} := D^{\leq 0}[-n]$ $\quad D^{\geq n} = D^{\geq 0}[n]$ tq

1) $\forall X \in D^{\leq 0}$, $Y \in D^{\geq 1}$ on a $\mathrm{Hom}(X,Y) = 0$

2) $D^{\leq 0} \supset D^{\leq -1}$ et $D^{\geq 1} \subset D^{\geq 0}$

3) $\forall X \in D$, $\exists$ un triangle

$A \to X \to B \xrightarrow{+1}$ avec

$D^{\leq 0}$ et $B \in D^{\geq 1}$

et $D^{\geq 0} \xhookrightarrow{i_{\geq 0}} D$

$\exists \tau_{\geq 0}$ adj

$D^{\leq 0} \hookrightarrow D$

$\exists \tau_{\leq 0}$ adj

Déf Le coeur $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ est la catégorie $\mathcal{C} := D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$

$\boxed{\text{Thm}}$ $\mathcal{C}$ abélienne admissible

$\hookrightarrow 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \in \mathcal{C}$ vient d'un triangle $X \to Y \to Z \xrightarrow{+1}$

$\boxed{\text{Thm}}$ t-structure ($\perp$ stratification)

Déf: La cat des faisceaux pervers = coeur de cette t-structure

Déf: X var $\mathbb{C}$, (perversité) ($\perp$ une stratification)

$$D_c^{b,\geq 0}(X) := \left\{ F \in D_c^b(X) \mid \dim \mathrm{Supp}\, H^j(F) \leq -j \right\}$$

$\forall j \in \mathbb{Z}$

$$D_c^{b,\leq 0}(X) := \left\{ F \in D_c^b(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall S \text{ var anal. loc. fermé} \\ H^i_S(F) = 0 \\ \forall i < -\dim S \end{array} \right\}$$

"pour toutes les stratifications"

Exemple A anneau, $D(A)$

$D^{\geq 0} := \{ M \in D(A) \mid \underset{=0}{H^i(M)}, \forall i < 0 \}$

$D^{\leq 0} := \{ M \in D(A) \mid H^i(M) = 0, \forall i > 0 \}$

$\tau^{\leq i} X = \dots \to X^{i-2} \to X^{i-1} \to \ker d_X^i \to 0$ $\quad H^0 = \tau^{\geq 0} \tau^{\leq 0}$

$\tau^{\geq i} X = \dots \to 0 \to X^i / \ker d_X^i \to X^{i+1} \to \dots$

ici $\mathrm{Mod}(A) = D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$

$X = \coprod_{\alpha \in A} S_\alpha$ $\leftarrow$ avec une stratification donnée

$$D_c^{b,\leq 0}(X, S) = \left\{ F \in D_c^b(X, S) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i > -\dim S_\alpha \\ H^i(F_{|S_\alpha}) = 0 \end{array} \right\}$$

$$D_c^{b,\geq 0}(X, S) = \left\{ \text{———} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i < -\dim S_\alpha \\ H^i(i_{S_\alpha}^! F) = 0 \end{array} \right\}$$

Déf
$\hookrightarrow$ t-Cohomologie $:= {}^t H^i$

${}^t H^0 : D \to \mathcal{C}$

$\overset{\shortparallel}{\tau^{\geq 0} \tau^{\leq 0}}$

Cas : 1 seule strate $S = \{X\}$

$H^i(F) = 0 \quad \forall i > -\dim X$

$H^i(F) = 0 \quad \forall i < -\dim X$

${}^p D^{b,\leq 0}(X) \cap {}^p D^{b,\geq 0}(X) = \mathrm{Loc}^{\text{Syst}} [\dim X]$

Cas : 2 strates $X = U \amalg Z$

$$Z \hookrightarrow X \hookleftarrow U$$

$$D^b_c(Z,Z) \xrightarrow{j_*} D^b_c(S,X) \overset{i^{-1}}{\longleftrightarrow} D^b_c(U,U)$$

on recolle [BBD] pour obtenir une t-structure

$$D^{b,\leq 0}_c(S,X) := \left\{ F \in D^b_c(S,X) \;\middle|\; \begin{array}{l} j^{-1}F \in D_c^{\leq 0}(Z,Z) \\ i^{-1}F \in D_c^{\leq 0}(U,U) \end{array} \right\}$$

$$D^{b,\geq 0}_c(S,X) := \left\{ \text{———} \;\middle|\; \begin{array}{l} j^! F \in D_c^{\geq 0}(Z,Z) \\ i^! F \in D_c^{\geq 0}(U,U) \end{array} \right\}$$

<u>Ex :</u> $X = \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{C}\setminus\{0\} = U \quad \{0\} = Z$

$$D_c^{\geq 0}(Z,Z) = D^{\leq 0}(\mathbb{C})$$
$$D_c^{\leq 0}(Z,Z) = D^{\geq 0}(\mathbb{C})$$

Z ne sont pas des faisceaux.

Déf : $\mathrm{Perv}(X) = D^{b,\leq 0}_c(X) \cap D^{b,\geq 0}_c(X)$

(ou [BBD] stratification = poset pour le raffinement

et $\operatorname{colim}_{\mathfrak{S}\text{ strat}} \mathrm{Perv}^{\mathfrak{S}} = \mathrm{Perv}$

dit qu'un faisceau est pervers : on le montre pour une stratification

$U \longmapsto \mathrm{Perv}(U)$: champ de cat. abéliennes

$(U_i)_{i\in I}$ recouvr^t ouvert de X

$F_i \in \mathrm{Perv}(U_i)$

$$F_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\theta_{ij}} F_j|_{U_{ij}}$$

U_{ijk} : $\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik} \Rightarrow$ définit

(F, θ_i) $F \in \mathrm{Perv}(X)$

(où $\theta_i : F|_{U_i} \xrightarrow{\sim} F_i$ iso

unique à iso près

(d'où la terminologie "faisceau" pervers)