ESP. STRAT. (GDT)

Espace de modules de courbes et opérades (suite)

Joan Millès

Introduction

Relier les opérades de l'exposé précédent entre elles à l'aide de la dualité de Koszul.

Comment ? Utiliser une strat. pour construire une suite spectrale tq

- $(E_1, d_1) = \begin{cases} BP \\ \Omega P^i \end{cases}$
- (E_∞, d_∞) dégénère au rang d'après
- $(E_\infty, d_\infty) \Rightarrow \begin{cases} gr\, P^i \\ gr\, P \end{cases}$

Ingrédients :

- $\overline{\mathcal{M}}_{0,n} = \bigsqcup_{t \in \text{arbres}} \mathcal{M}(t)$
- $\mathcal{M}(\overset{1\,2\cdots n}{\Upsilon}) = \mathcal{M}_{0,n+1}$
- $t = t_1 \circ_i t_2$, alors $\mathcal{M}(t) \cong \mathcal{M}(t_1) \times \mathcal{M}(t_2)$

  $\overline{\mathcal{M}}(t) \cong \overline{\mathcal{M}}(t_1) \times \overline{\mathcal{M}}(t_2)$

Künneth $\Rightarrow$ $H_\bullet(\mathcal{M}(t)) \cong H_\bullet(\mathcal{M}(t_1)) \otimes H_\bullet(\mathcal{M}(t_2))$

$\rightsquigarrow$ par récurrence, on voit apparaître une construction (co) libre

$$\mathcal{T}^{(c)}\big(\{H_\bullet(\underbrace{\mathcal{M}(\overset{1\,2\cdots n}{\Upsilon})}_{= \mathcal{M}_{0,n+1}})\}_n\big)$$

⚠ On a triché : $\sqcup$ n'est pas compatible avec $H_\bullet$, on utilise les suites spectrales pour formaliser le fait que ça fonctionne.

1) Opérades considérées et stratifications

Types d'opérades

⇝ $H_\bullet(\overline{M}_{0,n_1+1}) \otimes H_\bullet(\overline{M}_{0,n_2+1}) \to H_\bullet(\overline{M}_{0,n_1+n_2+1})$

<u>Ex</u> $n=2$: $H_\bullet(\overline{M}_{0,3}) = H_\bullet(pt) = \mathbb{Z}[M_{0,3}]$

$n=3$: $H_\bullet(\overline{M}_{0,4}) = H_0 \oplus H_2 = \mathbb{C}[\ ] \oplus \mathbb{C}[M_{0,4}]$

Composition opéradique = inclusion d'une strate

$\circ_i(\ ,\ ) =$

$\circ_i$ $=$ $=$

<u>Coopérades</u> $\bigwedge_{s\in S} Q_S \cong Q$

Tate twist

• $\mathrm{Grav}^{(cycl)} := \det(S) \otimes H^{\bullet+n-3}(M_{0,S})(-1)$

→ $M_{0,S}$ connexe : un générateur de degré $3-n$ correspondant à $\det(S) \otimes H^0(M_{0,S})(-1)$

<u>$n=3$</u> $H^\bullet(M_{0,3}) = H^0(pt) = \mathbb{C}[\ ]^* =$ fonction cont.

<u>$n=4$</u> $H^\bullet(M_{0,4}) = H^\bullet(\ ) = H^\bullet(\ ) = H^0 \oplus H^1$

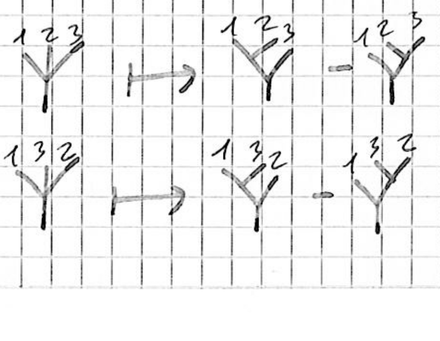
$= \mathbb{C}\cdot\text{cont.} \oplus (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$

123 132

<u>Griffiths – Deligne</u>

$H^1(M_{0,4}) \cong \mathbb{H}^1(\overline{M}_{0,4}, \Omega^\bullet_{\overline{M}_{0,4}}(\log \partial\overline{M}_{0,4}))$

$\xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_{i=1}^{3} H^0(M_{0,3} \times M_{0,3}) = H^0(\overline{M}_{0,4} \setminus M_{0,4})$



<u>relation coLie</u>

Deligne : $H^\bullet(X;\mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^\bullet(\overline{X}; \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log \partial\overline{X}))$

Filtration de Hodge sur $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log \partial\overline{X})$

Poids $W_w = \{\eta \wedge \frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{i_m}}{z_{i_m}},\ m \leq w\}$

Hodge : $F^p = \{ \text{———} \text{''} \text{———},\ \deg\eta + m \geq p\}$

THM (Deligne) ${}_wE_1^{pq} \Longrightarrow H^\bullet(X,\mathbb{C})$ dégénère en E_2

${}_FE_1^{pq} \Longrightarrow H^\bullet(X,\mathbb{C})$ dégénère en E_1

On applique cette suite spectrale à

$X = \mathcal{M}_{0,n}$, $\overline{X} = \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, $\partial\overline{X} = \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$

⇝ on trouve ${}_wE_1^{-p,q} \cong \bigoplus_{t \in T_p(n)} H^{-2p+q}(\overline{\mathcal{M}}(t), \det(t))$

↑ arbres à p arêtes internes

$d_1 : {}_wE_1^{-p,q} \to {}_wE_1^{(-p+1),q}$

PD ≀

$\bigoplus_{t \in T_p(n)} H_{2(n-3)-q}(\overline{\mathcal{M}}(t), \det(t)) \longrightarrow \bigoplus H_{2(n-3)-q}(-)$

$H_\bullet$(incl. de strates)

= composition opéradique

Finalement : ${}_wE_1 = B(H_\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}))$

même homologie de $H^\bullet(\mathcal{M}_{0,n}) = \mathrm{Grav}$.

En poids $2p = q$:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{t \in T_p(n)} H^0(\overline{\mathcal{M}}(t), \det(t)) & \longrightarrow & \bigoplus_{t \in T_{p-1}(n)} H^2(-) \\ \| & & \| \\ {}_wE_1^{-p,2p} & & {}_wE_1^{-p+1,2p} \\ \uparrow & & \\ H^p(\mathcal{M}_{0,n}) & & \end{array}$$

⇝ $\mathrm{Grav}^{\mathrm{cycl.}} \overset{\cong}{\hookrightarrow} B\,\mathrm{Hypercom}$