À quoi servent les structures supérieures ?

Bruno VALLETTE

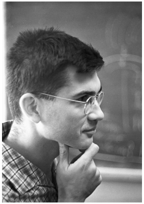
Université Sorbonne Paris Nord

Séminaire des Mathématiques (ENS)

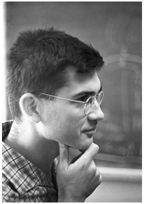
29 mars 2023

$\boxed{\text{Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)}}$

$\boxed{\text{Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)}}$

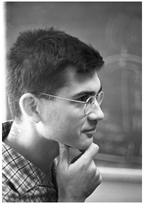


Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)



Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)

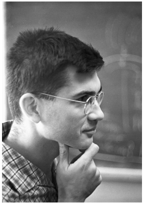
“Au XXème siècle, toutes les théories mathématiques ont été fondées sur la théorie des ensembles. Au XXIème siècle, les théories mathématiques seront construites à partir de théories homotopiques. ”



Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)

“Au XXème siècle, toutes les théories mathématiques ont été fondées sur la théorie des ensembles. Au XXIème siècle, les théories mathématiques seront construites à partir de théories homotopiques. ”

Structures classiques $\xrightarrow{\text{Théorie de l'homotopie}}$ Structures supérieures

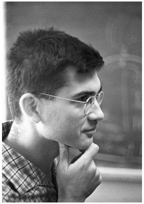


Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)

“Au XXème siècle, toutes les théories mathématiques ont été fondées sur la théorie des ensembles. Au XXIème siècle, les théories mathématiques seront construites à partir de théories homotopiques. ”

Structures classiques $\xrightarrow{\text{Théorie de l'homotopie}}$ Structures supérieures

OBJECTIFS :



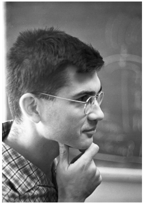
Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)

“Au XXème siècle, toutes les théories mathématiques ont été fondées sur la théorie des ensembles. Au XXIème siècle, les théories mathématiques seront construites à partir de théories homotopiques. ”

Structures classiques $\xrightarrow{\text{Théorie de l'homotopie}}$ Structures supérieures

OBJECTIFS :

- Classification des espaces topologiques à homotopie près



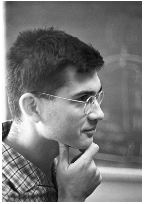
Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)

“Au XXème siècle, toutes les théories mathématiques ont été fondées sur la théorie des ensembles. Au XXIème siècle, les théories mathématiques seront construites à partir de théories homotopiques. ”

Structures classiques $\xrightarrow{\text{Théorie de l'homotopie}}$ Structures supérieures

OBJECTIFS :

- Classification des espaces topologiques à homotopie près
- Quantification des variétés de Poisson



Yuri Ivanovich MANIN (1937-2023)

"Au XXème siècle, toutes les théories mathématiques ont été fondées sur la théorie des ensembles. Au XXIème siècle, les théories mathématiques seront construites à partir de théories homotopiques. "

Structures classiques $\xrightarrow{\text{Théorie de l'homotopie}}$ Structures supérieures

OBJECTIFS :

- Classification des espaces topologiques à homotopie près
- Quantification des variétés de Poisson
- Théorème fondamental de la théorie de la déformation

Table of contents

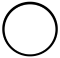
Table of contents

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ $\boxed{\textbf{Classification des espaces topologiques}}$

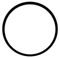
Équivalence d'homotopie

→ $\boxed{\textbf{Classification des espaces topologiques}}$



Équivalence d'homotopie

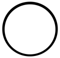
→ **Classification des espaces topologiques**



- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près

Équivalence d'homotopie

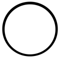
$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**

 $\ncong$ 

- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON

Équivalence d'homotopie

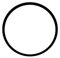
$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**

 $\ncong$ 

- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper"

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ $\boxed{\textbf{Classification des espaces topologiques}}$

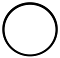


$\sim$

- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper" OUI

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**

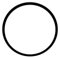
 $\sim$ 

- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper" OUI

MÉTHODE : trouver des invariants algébriques fidèles

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**



$\sim$

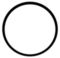
- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper" OUI

MÉTHODE : trouver des invariants algébriques fidèles

- 1er nombre de Betti := nombre de trous :

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**

 $\sim$ 

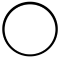
- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper" OUI

MÉTHODE : trouver des invariants algébriques fidèles

- 1er nombre de Betti $:=$ nombre de trous : invariant homotopique

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**



$\sim$

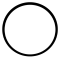
- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper" OUI

MÉTHODE : trouver des invariants algébriques fidèles

- 1er nombre de Betti := nombre de trous : invariant homotopique
  $\rightarrow$ pas fidèle

Équivalence d'homotopie

$\rightarrow$ **Classification des espaces topologiques**

 $\sim$ 

- ÉQUIVALENCE FORTE : à homéomorphisme près NON
- ÉQUIVALENCE FAIBLE : à équivalence d'homotopie près
  "à déformation continue, sans couper" OUI

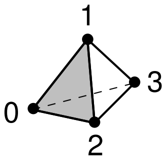
MÉTHODE : trouver des invariants algébriques fidèles

- 1er nombre de Betti $:=$ nombre de trous : invariant homotopique
  $\rightarrow$ pas fidèle

$\rightarrow$ Quantité d'algèbre utilisée : $\boxed{\mathbb{N}}$

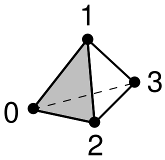
Module différentiel gradué

IDÉE : encoder algébriquement une décomposition cellulaire



Module différentiel gradué

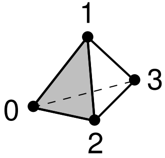
IDÉE : encoder algébriquement une décomposition cellulaire



$$\mathbb{Z}\{\text{0-cellules}\} \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}\{\text{1-cellules}\} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}\{\text{2-cellules}\} \xleftarrow{d_2} \cdots$$

Module différentiel gradué

IDÉE : encoder algébriquement une décomposition cellulaire



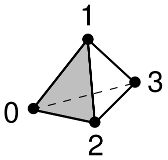
$$\boxed{d_n(c) := \sum_{\substack{c' \in \partial(c) \\ \dim c' = n-1}} \pm c'}$$

$$\mathbb{Z}\{0\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}\{1\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}\{2\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_2} \cdots$$

- orientation $\Longrightarrow$ signes $\Longrightarrow d_{n-1} \circ d_n = 0$

Module différentiel gradué

IDÉE : encoder algébriquement une décomposition cellulaire



$$\boxed{d_n(c) := \sum_{\substack{c' \in \partial(c) \\ \dim c' = n-1}} \pm c'}$$

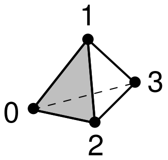
$$\mathbb{Z}\{0\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}\{1\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}\{2\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_2} \cdots$$

- orientation $\Longrightarrow$ signes $\Longrightarrow d_{n-1} \circ d_n = 0$

EXEMPLE : $\mathbb{Z}0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}3 \leftarrow \mathbb{Z}01 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}23 \leftarrow \mathbb{Z}012 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$

Module différentiel gradué

IDÉE : encoder algébriquement une décomposition cellulaire



$$\boxed{d_n(c) := \sum_{\substack{c' \in \partial(c) \\ \dim c' = n-1}} \pm c'}$$

$$\mathbb{Z}\{\text{0-cellules}\} \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}\{\text{1-cellules}\} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}\{\text{2-cellules}\} \xleftarrow{d_2} \cdots$$

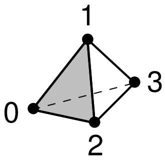
- orientation $\Longrightarrow$ signes $\Longrightarrow$ $d_{n-1} \circ d_n = 0$

EXEMPLE : $\mathbb{Z}0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}3 \leftarrow \mathbb{Z}01 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}23 \leftarrow \mathbb{Z}012 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$

$$d_n(a_0 \cdots a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \ldots \widehat{a_i} \ldots a_n$$

Module différentiel gradué

IDÉE : encoder algébriquement une décomposition cellulaire



$$\boxed{d_n(c) := \sum_{\substack{c' \in \partial(c) \\ \dim c' = n-1}} \pm c'}$$

$$\mathbb{Z}\{0\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_0} \mathbb{Z}\{1\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}\{2\text{-cellules}\} \xleftarrow{d_2} \cdots$$

- orientation $\Longrightarrow$ signes $\Longrightarrow d_{n-1} \circ d_n = 0$

EXEMPLE : $\mathbb{Z}0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}3 \leftarrow \mathbb{Z}01 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}23 \leftarrow \mathbb{Z}012 \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$

$$d_n(a_0 \cdots a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \ldots \widehat{a_i} \ldots a_n$$

Définition (module différentiel gradué ou complexe de chaînes)

$(C_\bullet = \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}, d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ tel que $d^2 = 0$

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$$

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong 0$

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0 =$ nombre de composantes connexes

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$,
$H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0$ = nombre de composantes connexes
$\dim H_1$ = nombre de trous

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X,\mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X,\mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0 =$ nombre de composantes connexes
$\dim H_1 =$ nombre de trous

- Notion duale linéaire de groupes de cohomologie

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0 =$ nombre de composantes connexes
$\dim H_1 =$ nombre de trous

- Notion duale linéaire de groupes de cohomologie
- Définition "équivalente" : complexe de de Rham, homologie singulière

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0 =$ nombre de composantes connexes
$\dim H_1 =$ nombre de trous

- Notion duale linéaire de groupes de cohomologie
- Définition "équivalente" : complexe de de Rham, homologie singulière

Proposition (Invariance homotopique)

$X \sim Y \Longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}) \cong H_n(Y, \mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{N}$

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X, \mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0$ = nombre de composantes connexes
$\dim H_1$ = nombre de trous

- Notion duale linéaire de groupes de cohomologie
- Définition "équivalente" : complexe de de Rham, homologie singulière

Proposition (Invariance homotopique)

$X \sim Y \Longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}) \cong H_n(Y, \mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ pas fidèle !

Groupes d'homologie

Définition (Groupes d'homologie)

$H_n(X,\mathbb{Z}) := \ker d_{n-1} / \operatorname{im} d_n$

EXEMPLE : $H_0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(X,\mathbb{Z}) \cong 0$

PROPRIÉTÉS : $\dim H_0$ = nombre de composantes connexes
$\dim H_1$ = nombre de trous

- Notion duale linéaire de groupes de cohomologie
- Définition "équivalente" : complexe de de Rham, homologie singulière

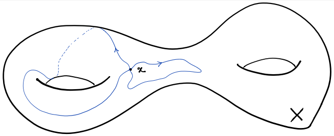
Proposition (Invariance homotopique)

$X \sim Y \Longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}) \cong H_n(Y,\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ pas fidèle !

$\rightarrow$ Quantité d'algèbre utilisée : $\boxed{\text{algèbre linéaire}}$

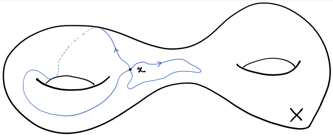
Groupe d'homotopie



Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

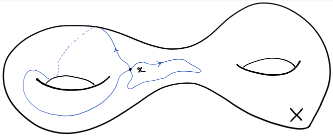
$$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$$



Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid$
φ continue , $\varphi(0) = \varphi(1) = x\}$

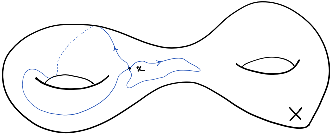


PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t)\ , & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\ , \\ \psi(2t-1)\ , & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\ . \end{cases}$

Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$



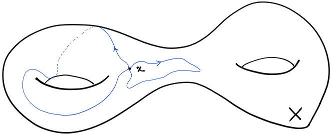
PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t) , & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} , \\ \psi(2t-1) , & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 . \end{cases}$

$\to \star$ est associatif ?

Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi$ continue, $\varphi(0)=\varphi(1)=x\}$



PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t)\ , & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\ , \\ \psi(2t-1)\ , & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\ . \end{cases}$

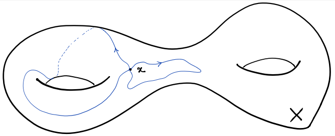
$\to \star$ est associatif ?

non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$

Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

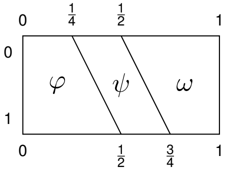
$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0)=\varphi(1)=x\}$



PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t), & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(2t-1), & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

$\rightarrow \star$ est associatif ?

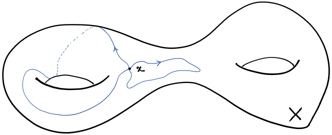
non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$



Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$

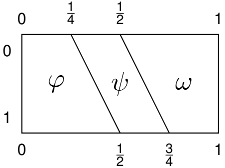


PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t) \,, & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \,, \\ \psi(2t-1) \,, & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \,. \end{cases}$

$\to \star$ est associatif ?

non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$

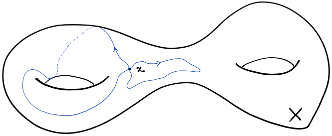
mais : $(\varphi \star \psi) \star \omega \sim \varphi \star (\psi \star \omega)$



Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$

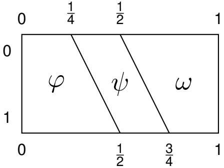


PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t)\ , & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\ , \\ \psi(2t-1)\ , & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\ . \end{cases}$

$\to \star$ est associatif ?

non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$

mais : $(\varphi \star \psi) \star \omega \sim \varphi \star (\psi \star \omega)$



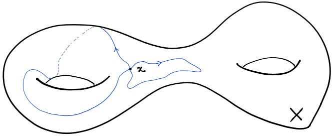
Définition (Groupe fondamental)

$\pi_1(X,x) := (\Omega(X,x)/\sim, \bar{\star})$

Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$

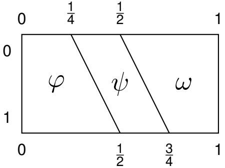


PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t)\,, & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\,, \\ \psi(2t-1)\,, & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\,. \end{cases}$

$\to \star$ est associatif ?

non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$

mais : $(\varphi \star \psi) \star \omega \sim \varphi \star (\psi \star \omega)$



invariant homotopique

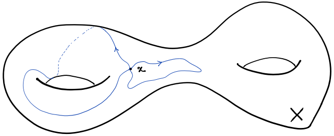
Définition (Groupe fondamental)

$\pi_1(X,x) := (\Omega(X,x)/\sim, \bar{\star})$

Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X,x) := \{\varphi\colon [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$

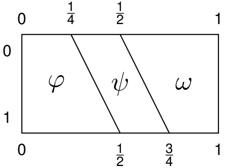


PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t), & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(2t-1), & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

$\rightarrow$ $\star$ est associatif ?

non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$

mais : $(\varphi \star \psi) \star \omega \sim \varphi \star (\psi \star \omega)$



invariant homotopique

$\rightarrow$ pas fidèle !

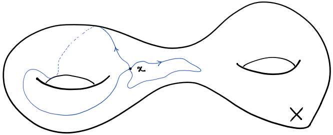
Définition (Groupe fondamental)

$\pi_1(X,x) := (\Omega(X,x)/\sim, \bar{\star})$

Groupe d'homotopie

Définition (Espace de lacets)

$\Omega(X, x) := \{\varphi : [0,1] \to X \mid \varphi \text{ continue}, \varphi(0) = \varphi(1) = x\}$

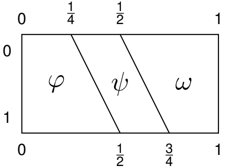


PRODUIT DE CONCATENATION : $\varphi \star \psi(t) := \begin{cases} \varphi(2t), & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(2t-1), & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

$\to \star$ est associatif ?

non : $(\varphi \star \psi) \star \omega \neq \varphi \star (\psi \star \omega)$

mais : $(\varphi \star \psi) \star \omega \sim \varphi \star (\psi \star \omega)$



Définition (Groupe fondamental)

$\pi_1(X, x) := (\Omega(X, x)/\sim, \bar{\star})$

invariant homotopique

$\to$ pas fidèle !

$\to$ Quantité d'algèbre utilisée : $\boxed{\text{Groupes}}$

Théorie des catégories

- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

Théorie des catégories

- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

$$
\begin{array}{ccc}
X & & H_n(X,\mathbb{Z}) \\
f\ \text{continue}\big\downarrow & \longrightarrow & \big\downarrow H_n(f)\ \text{morphisme} \\
Y & & H_n(Y,\mathbb{Z})
\end{array}
$$

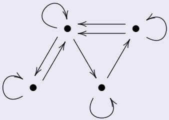
Théorie des catégories

- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

$$\begin{array}{ccc} X & & H_n(X,\mathbb{Z}) \\ f \text{ continue} \downarrow & \longrightarrow & \downarrow H_n(f) \text{ morphisme} \\ Y & & H_n(Y,\mathbb{Z}) \end{array}$$

Définition (Catégorie [Eilenberg–MacLane, 1942])

OBJETS+FLÈCHES COMPOSABLES :
"monoïde avec multiples points de base"



Théorie des catégories

- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

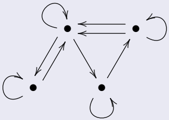
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f \text{ continue}"'] \arrow[r, phantom, ""] & H_n(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_n(f) \text{ morphisme}"] \\ Y \arrow[r, phantom, ""] & H_n(Y,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Définition (Catégorie [Eilenberg–MacLane, 1942])

OBJETS+FLÈCHES COMPOSABLES :

"monoïde avec multiples points de base"

EXEMPLE : espaces topologiques+applications continues



Théorie des catégories

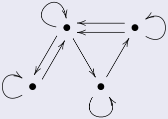
- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f \text{ continue}"'] \arrow[r] & H_n(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_n(f) \text{ morphisme}"] \\ Y & H_n(Y,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Définition (Catégorie [Eilenberg–MacLane, 1942])

OBJETS+FLÈCHES COMPOSABLES :
"monoïde avec multiples points de base"

EXEMPLE : espaces topologiques+applications continues



- BUT 2 : comparer les invariants

$$\begin{tikzcd} \text{Top} \arrow[r, bend left, "\pi_1"] \arrow[r, bend right, "H_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \text{Groupes} \end{tikzcd}$$

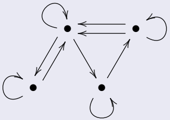
Théorie des catégories

- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f \text{ continue}"'] \arrow[r, phantom, ""] & & H_n(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_n(f) \text{ morphisme}"] \\ Y \arrow[rr, phantom, "\longrightarrow"] & & H_n(Y,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Définition (Catégorie [Eilenberg–MacLane, 1942])

OBJETS+FLÈCHES COMPOSABLES :
"monoïde avec multiples points de base"
EXEMPLE : espaces topologiques+applications continues



- BUT 2 : comparer les invariants

Théorème (Hurewicz)

$$\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)] \cong H_1(X,\mathbb{Z})$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[r, bend left, "\pi_1"] \arrow[r, bend right, "H_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathrm{Groupes} \end{tikzcd}$$

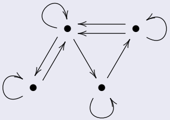
Théorie des catégories

- BUT 1 : encoder la fonctorialité des invariants

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f \text{ continue}"'] & & H_n(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_n(f) \text{ morphisme}"] \\ Y \arrow[rr, phantom, "\longrightarrow" near start] & & H_n(Y,\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

Définition (Catégorie [Eilenberg–MacLane, 1942])

OBJETS+FLÈCHES COMPOSABLES :
"monoïde avec multiples points de base"
EXEMPLE : espaces topologiques+applications continues



- BUT 2 : comparer les invariants

Théorème (Hurewicz)

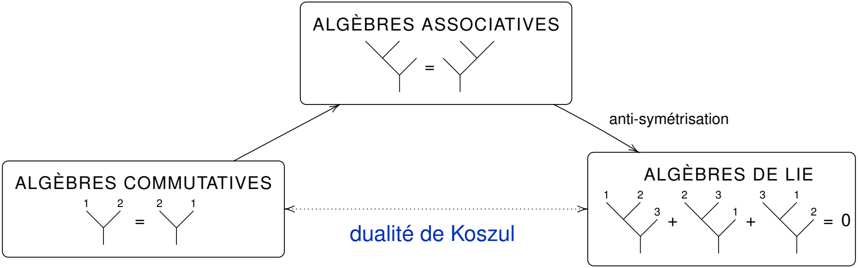
$$\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)] \cong H_1(X,\mathbb{Z})$$

$$\begin{tikzcd} \text{Top} \arrow[r, bend left, "\pi_1"] \arrow[r, bend right, "H_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \text{Groupes} \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ 2-catégorie : structure supérieure

Les trois Grâces

Les trois Grâces



Structures algébriques classiques

- $\left(C^{\bullet}_{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

  algèbre associative différentielle graduée

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre associative différentielle graduée}}$

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre commutative graduée}}$

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

$$\boxed{\text{algèbre associative différentielle graduée}}$$

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

$$\boxed{\text{algèbre commutative graduée}}$$

1$^{\text{ÈRE}}$ HOMOTOPIE SUPÉRIEURE : $\cup_1 : C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})^{\otimes 2} \to C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})$

$$\mathrm{d} \circ \cup_1 + \cup_1 \circ (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}) + \cup_1 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}) = \cup - \cup^{(12)}$$

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre associative différentielle graduée}}$

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre commutative graduée}}$

  1ÈRE HOMOTOPIE SUPÉRIEURE : $\cup_1 : C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})^{\otimes 2} \to C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})$

  $$\mathrm{d} \circ \cup_1 + \cup_1 \circ (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}) + \cup_1 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}) = \cup - \cup^{(12)}$$

- $\left(\pi_{\bullet+1}(X), [\,,]\right)$: groupes d'homotopie avec le crochet de Whitehead

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre associative différentielle graduée}}$

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre commutative graduée}}$

  1ÈRE HOMOTOPIE SUPÉRIEURE : $\cup_1 : C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})^{\otimes 2} \to C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})$

  $$\mathrm{d} \circ \cup_1 + \cup_1 \circ (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}) + \cup_1 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}) = \cup - \cup^{(12)}$$

- $\left(\pi_{\bullet+1}(X), [\,,]\right)$: groupes d'homotopie avec le crochet de Whitehead

  $\boxed{\text{algèbre de Lie graduée}}$

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}),\cup,\mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

  algèbre associative différentielle graduée

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}),\overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

  algèbre commutative graduée

  1ÈRE HOMOTOPIE SUPÉRIEURE : $\cup_1 : C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})^{\otimes 2} \to C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})$

$$\mathrm{d}\circ\cup_1+\cup_1\circ(\mathrm{d}\otimes\mathrm{id})+\cup_1\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{d})=\cup-\cup^{(12)}$$

- $\left(\pi_{\bullet+1}(X),[\,,]\right)$: groupes d'homotopie avec le crochet de Whitehead

  algèbre de Lie graduée

invariants homotopiques

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre associative différentielle graduée}}$

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

  $\boxed{\text{algèbre commutative graduée}}$

  1ère homotopie supérieure : $\cup_1 : C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})^{\otimes 2} \to C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})$

  $$\mathrm{d} \circ \cup_1 + \cup_1 \circ (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}) + \cup_1 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}) = \cup - \cup^{(12)}$$

- $\left(\pi_{\bullet+1}(X), [\,,]\right)$: groupes d'homotopie avec le crochet de Whitehead

  $\boxed{\text{algèbre de Lie graduée}}$

invariants homotopiques$\to$ pas fidèles !

Structures algébriques classiques

- $\left(C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \cup, \mathrm{d}\right)$: cochaînes singulières avec le produit cup

$\boxed{\text{algèbre associative différentielle graduée}}$

- $\left(H^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z}), \overline{\cup}\right)$: cohomologie singulière avec le produit cup

$\boxed{\text{algèbre commutative graduée}}$

1ÈRE HOMOTOPIE SUPÉRIEURE : $\cup_1 : C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})^{\otimes 2} \to C^\bullet_{\text{sing}}(X,\mathbb{Z})$

$$\mathrm{d} \circ \cup_1 + \cup_1 \circ (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}) + \cup_1 \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{d}) = \cup - \cup^{(12)}$$

- $\left(\pi_{\bullet+1}(X), [\,,]\right)$: groupes d'homotopie avec le crochet de Whitehead

$\boxed{\text{algèbre de Lie graduée}}$

invariants homotopiques$\to$ pas fidèles !

$\to$ Quantité d'algèbre utilisée :

$\boxed{\text{algèbres associatives, commutatives, de Lie}}$

Table of contents

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i\ \ ,\ \ \delta^2 = 0}$$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$$

Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$

$$= 0$$

$\square$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\ , \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$$

Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$

$$= 0$$ □

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$p : A \rightleftarrows H : i$, $pi = \mathrm{id}_H$, $ip = \mathrm{id}_A$

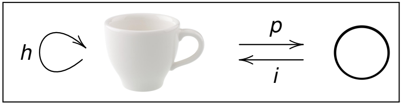
$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$

Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i = 0$$

□

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation



Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\ , \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$$

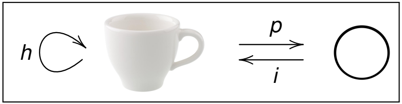
Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$

$$= 0$$

□

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation



$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

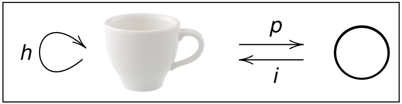
Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$
$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$$

Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$
$$= 0$$
□

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation



$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$$
$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

- STRUCTURE TRANSPORTÉE : $\delta_1 := p\Delta i$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$$

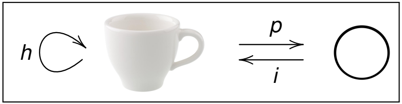
Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$

$$= 0$$

$\square$

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation



$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$$

$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0$$

- STRUCTURE TRANSPORTÉE : $\delta_1 := p\Delta i$

$$\to (\delta_1)^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{\neq \mathrm{id}_A} \Delta i \neq p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i = 0$$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A$$

$$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i\ \ ,\ \ \delta^2 = 0}$$

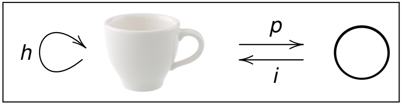
Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$

$$= 0$$

$\square$

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation



$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$$

$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0$$

- STRUCTURE TRANSPORTÉE : $\delta_1 := p\Delta i$ $\quad (\delta_1)^2 \neq 0$

$$\to (\delta_1)^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{\neq \mathrm{id}_A} \Delta i \neq p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i = 0$$

Transport de structure

- STRUCTURE ALGÉBRIQUE (SIMPLE) : $\boxed{\Delta : A \to A\,, \quad \Delta^2 = 0}$

Proposition (Transport de structure)

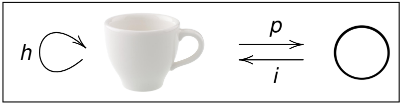
$p : A \rightleftarrows H : i$, $pi = \mathrm{id}_H$, $ip = \mathrm{id}_A$

$\Longrightarrow \boxed{\delta := p\Delta i \quad , \quad \delta^2 = 0}$

Démonstration.

$$\delta^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{=\mathrm{id}_A} \Delta i = p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i$$
$$= 0$$

- ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE ALGÉBRIQUE : retract par déformation



$$\boxed{\begin{array}{c} h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \\ \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0 \end{array}}$$

- STRUCTURE TRANSPORTÉE : $\delta_1 := p\Delta i$ $\quad (\delta_1)^2 \neq 0$

$$\to (\delta_1)^2 = p\Delta \underbrace{ip}_{\sim\mathrm{id}_A} \Delta i \sim p \underbrace{\Delta^2}_{=0} i = 0$$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial\left(\delta_2\right) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

- QUESTION : relation stricte $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$?

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h \Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

- QUESTION : relation stricte $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$? non $\neq 0$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

- QUESTION : relation stricte $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$? non $\neq 0$
- IDÉE : introduire une opération supérieure supplémentaire

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

- QUESTION : relation stricte $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$? non $\neq 0$
- IDÉE : introduire une opération supérieure supplémentaire

$$\boxed{\delta_3 := p\Delta h\Delta h\Delta i}$$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

- QUESTION : relation stricte $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$? non $\neq 0$
- IDÉE : introduire une opération supérieure supplémentaire

$$\boxed{\delta_3 := p\Delta h\Delta h\Delta i}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_3) = \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1}$$

Premières opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\boxed{\delta_2 := p\Delta h\Delta i}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_2) := d_A\delta_2 + \delta_2 d_A = (\delta_1)^2}$$

$\leftrightarrow$ δ_2 est une homotopie pour la relation $(\delta_1)^2 = 0$

- QUESTION : relation stricte $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$? non $\neq 0$
- IDÉE : introduire une opération supérieure supplémentaire

$$\boxed{\delta_3 := p\Delta h\Delta h\Delta i}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial(\delta_3) = \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1}$$

$\leftrightarrow$ δ_3 est une homotopie pour la relation $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1 = 0$

Structure supérieure : les multicomplexes

En poursuivant, on considère : $\boxed{\delta_n := p(\Delta h)^{n-1}\Delta i}$, pour $n \geq 1$

Structure supérieure : les multicomplexes

En poursuivant, on considère : $\boxed{\delta_n := p(\Delta h)^{n-1}\Delta i}$, pour $n \geq 1$

Proposition

$$\boxed{\partial(\delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \delta_{n-k}} \ , \ \textit{pour} \ \ n \geq 1 \ .$$

Structure supérieure : les multicomplexes

En poursuivant, on considère : $\boxed{\delta_n := p(\Delta h)^{n-1}\Delta i}$, pour $n \geq 1$

Proposition

$$\boxed{\partial(\delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \delta_{n-k}} \quad , \textit{ pour } n \geq 1 .$$

Définition (Multicomplexe)

$(H, \delta_0 := -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)$ espace vectoriel gradué H muni d'une famille de d'opérateurs linéaires de degré $|\delta_n| = 2n - 1$ vérifiant

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \delta_k \delta_{n-k} = 0} \quad , \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

Structure supérieure : les multicomplexes

En poursuivant, on considère : $\boxed{\delta_n := p(\Delta h)^{n-1}\Delta i}$, pour $n \geq 1$

Proposition

$$\boxed{\partial(\delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \delta_{n-k}} \ , \ \textit{pour} \ \ n \geq 1 \ .$$

Définition (Multicomplexe)

$(H, \delta_0 := -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)$ espace vectoriel gradué H muni d'une famille de d'opérateurs linéaires de degré $|\delta_n| = 2n - 1$ vérifiant

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \delta_k \delta_{n-k} = 0} \ , \quad \text{pour } n \geq 0 \ .$$

- COMPLEXE MIXTE / BICOMPLEXE : multicomplexe $\delta_n = 0$, $n \geq 2$.

Les multicomplexes sont homotopiquement stables

- Partons d'un multicomplexe $(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$

Les multicomplexes sont homotopiquement stables

- Partons d'un multicomplexe $(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$
- On considère les opérateurs transportés

$$\boxed{\delta_n := \sum_{k_1+\cdots+k_l=n} p\Delta_{k_1} h\Delta_{k_2} h \ldots h\Delta_{k_l} i}\ , \quad \text{pour} \ \ n \geq 1$$

Les multicomplexes sont homotopiquement stables

- Partons d'un multicomplexe $(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$
- On considère les opérateurs transportés

$$\boxed{\delta_n := \sum_{k_1+\cdots+k_l=n} p\Delta_{k_1} h\Delta_{k_2} h \ldots h\Delta_{k_l} i} \, , \quad \text{pour} \ \ n \geq 1$$

Proposition

$$\boxed{\partial(\delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \delta_{n-k}} \quad \textit{dans}\ \mathrm{Hom}(A, A), \ \textit{pour} \ \ n \geq 1$$

Les multicomplexes sont homotopiquement stables

- Partons d'un multicomplexe $(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$
- On considère les opérateurs transportés

$$\boxed{\delta_n := \sum_{k_1+\cdots+k_l=n} p\Delta_{k_1} h\Delta_{k_2} h \ldots h\Delta_{k_l} i}\ , \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

Proposition

$$\boxed{\partial(\delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \delta_{n-k}} \quad \textit{dans } \mathrm{Hom}(A, A), \ \textit{pour} \quad n \geq 1$$

$\Longrightarrow$ encore un multicomplexe :

pas besoin de structure supérieure supplémentaire

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de complexe de chaînes $\iff$ $\boxed{\Delta_0 i = i\delta_0}$

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de complexe de chaînes $\iff$ $\boxed{\Delta_0 i = i\delta_0}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les Δ et δ supérieurs ?

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de complexe de chaînes $\iff$ $\boxed{\Delta_0 i = i\delta_0}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les Δ et δ supérieurs ?

$$i\delta_1 = \underbrace{ip}_{\sim_h \mathrm{id}_A} \Delta_1 i \neq \Delta_1 i \quad \text{en général non !}$$

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de complexe de chaînes $\iff$ $\boxed{\Delta_0 i = i\delta_0}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les Δ et δ supérieurs ?

$$i\delta_1 = \underbrace{ip}_{\sim_h \mathrm{id}_A} \Delta_1 i \neq \Delta_1 i \quad \text{en général non !}$$

Définition (∞-morphisme)

$i_\infty : (H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots) \rightsquigarrow (A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$
collection d'applications linéaires $\{i_n \colon H \to A\}_{n \geq 0}$ vérifiant

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de complexe de chaînes $\iff$ $\boxed{\Delta_0 i = i\delta_0}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les Δ et δ supérieurs ?

$$i\delta_1 = \underbrace{ip}_{\sim_h \mathrm{id}_A} \Delta_1 i \neq \Delta_1 i \quad \text{en général non !}$$

Définition (∞-morphisme)

$i_\infty : (H, \delta_0 = -d_H, \delta_1, \delta_2, \ldots) \rightsquigarrow (A, \Delta_0 = -d_A, \Delta_1, \Delta_2, \ldots)$
collection d'applications linéaires $\{i_n : H \to A\}_{n \geq 0}$ vérifiant

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \Delta_{n-k} i_k = \sum_{k=0}^{n} i_k \delta_{n-k}} \ , \quad \text{pour } \ n \geq 0 \ .$$

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

Proposition

Les ∞-quasi-isomorphismes sont (homotopiquement) inversibles.

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

Proposition

Les ∞-quasi-isomorphismes sont (homotopiquement) inversibles.

FAUX pour les quais-isomorphismes de complexes mixtes :

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

Proposition

Les ∞-quasi-isomorphismes sont (homotopiquement) inversibles.

FAUX pour les quais-isomorphismes de complexes mixtes : pas inversibles !

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

Proposition

Les ∞-quasi-isomorphismes sont (homotopiquement) inversibles.

FAUX pour les quais-isomorphismes de complexes mixtes : pas inversibles ! $\rightarrow$ nécessité de passer au niveau supérieur

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

Proposition

Les ∞-quasi-isomorphismes sont (homotopiquement) inversibles.

FAUX pour les quais-isomorphismes de complexes mixtes : pas inversibles ! $\rightarrow$ nécessité de passer au niveau supérieur

Démonstration.

∞-quasi-isomorphisme

Définition (∞-quasi-isomorphisme)

∞-morphisme $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ tel que $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie)

Proposition

Les ∞-quasi-isomorphismes sont (homotopiquement) inversibles.

FAUX pour les quais-isomorphismes de complexes mixtes : pas inversibles ! $\rightarrow$ nécessité de passer au niveau supérieur

Démonstration.

$(1 - X)^{-1} = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots$ dans $\mathbb{K}[[X]]$. $\square$

Théorème de transport homotopique

Théorème (Théorème de transport homotopique [Lapin 2001])

Soit un retract par déformation

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

et une structure de complexe mixte (ou de multicomplexe) sur A, il existe une structure de multicomplexe sur H telle que i et p s'étendent en des ∞-quasi-isomorphismes et telle que h s'étende en une ∞-homotopie.

Théorème de transport homotopique

Théorème (Théorème de transport homotopique [Lapin 2001])

Soit un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

et une structure de complexe mixte (ou de multicomplexe) sur A, il existe une structure de multicomplexe sur H telle que i et p s'étendent en des ∞-quasi-isomorphismes et telle que h s'étende en une ∞-homotopie.

$\boxed{\text{formules explicites \& pas de perte d'information algébro-homotopique}}$

Théorème de transport homotopique

Théorème (Théorème de transport homotopique [Lapin 2001])

Soit un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

et une structure de complexe mixte (ou de multicomplexe) sur A, il existe une structure de multicomplexe sur H telle que i et p s'étendent en des ∞-quasi-isomorphismes et telle que h s'étende en une ∞-homotopie.

$$\boxed{\text{formules explicites \& pas de perte d'information algébro-homotopique}}$$

- APPLICATION 1 : suites spectrales

Théorème de transport homotopique

Théorème (Théorème de transport homotopique [Lapin 2001])

Soit un retract par déformation

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

et une structure de complexe mixte (ou de multicomplexe) sur A, il existe une structure de multicomplexe sur H telle que i et p s'étendent en des ∞-quasi-isomorphismes et telle que h s'étende en une ∞-homotopie.

$\boxed{\text{formules explicites \& pas de perte d'information algébro-homotopique}}$

- APPLICATION 1 : suites spectrales
- APPLICATION 2 : homologie cyclique

Théorème de transport homotopique

Théorème (Théorème de transport homotopique [Lapin 2001])

Soit un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

et une structure de complexe mixte (ou de multicomplexe) sur A, il existe une structure de multicomplexe sur H telle que i et p s'étendent en des ∞*-quasi-isomorphismes et telle que h s'étende en une* ∞*-homotopie.*

formules explicites & pas de perte d'information algébro-homotopique

- APPLICATION 1 : suites spectrales
- APPLICATION 2 : homologie cyclique (la différentielle de Connes B= δ_2, caractères de Chern = i_∞)

Théorème de transport homotopique

Théorème (Théorème de transport homotopique [Lapin 2001])

Soit un retract par déformation

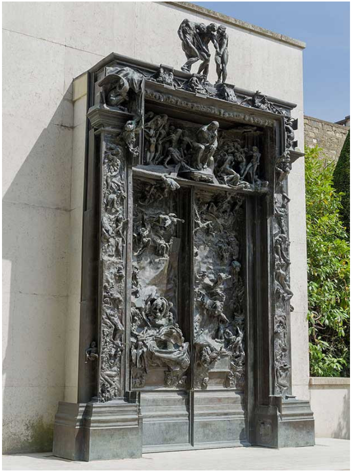
$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, shift left, "p"] & (H, d_H) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

et une structure de complexe mixte (ou de multicomplexe) sur A, il existe une structure de multicomplexe sur H telle que i et p s'étendent en des ∞-quasi-isomorphismes et telle que h s'étende en une ∞-homotopie.

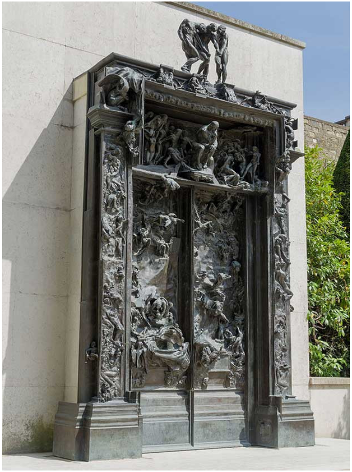
formules explicites & pas de perte d'information algébro-homotopique

- APPLICATION 1 : suites spectrales
- APPLICATION 2 : homologie cyclique (la différentielle de Connes B= δ_2, caractères de Chern = i_∞)
- APPLICATION 3 : version optimale du lemme $d\bar{d}$

Porte des enfers ou boite de Pandore ?



Porte des enfers ou boite de Pandore ?



Transport de structure d'algèbre associative

- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

Transport de structure d'algèbre associative

- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

Proposition (Transport de structure)

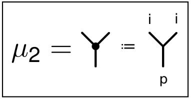
$$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A \Longrightarrow \mu_2 := p\,\nu\, i^{\otimes 2} : \textit{associatif}$$

Transport de structure d'algèbre associative

- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

Proposition (Transport de structure)

$p : A \rightleftarrows H : i, \; pi = \mathrm{id}_H \;, \; ip = \mathrm{id}_A \Longrightarrow \mu_2 := p \, \nu \, i^{\otimes 2}$: *associatif*

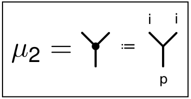


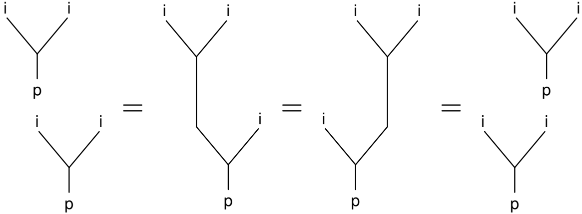
Transport de structure d'algèbre associative

- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

Proposition (Transport de structure)

$p : A \rightleftarrows H : i,\ pi = \mathrm{id}_H\ ,\ ip = \mathrm{id}_A \Longrightarrow \mu_2 := p\, \nu\, i^{\otimes 2}$: *associatif*



DÉMO : 

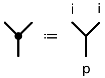
$\square$

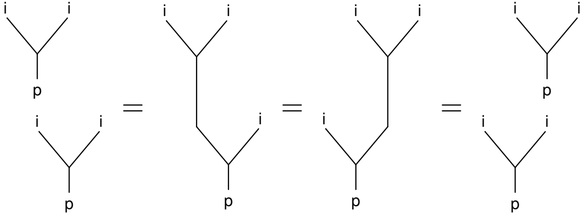
Transport de structure d'algèbre associative

- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

isomorphisme $\rightarrow$ retract par déformation : $h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$

$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0$$

$\mu_2 =$ 

DÉMO : 

$\square$

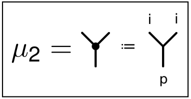
Transport de structure d'algèbre associative

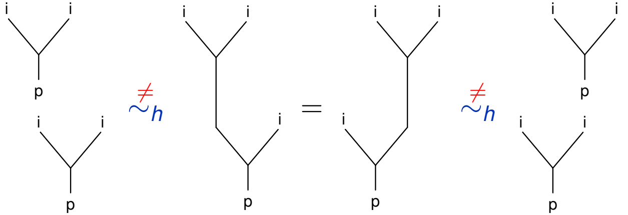
- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

isomorphisme $\rightarrow$ retract par déformation :

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$$

$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0$$





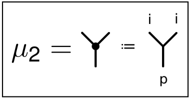
Transport de structure d'algèbre associative

- AUTRE STRUCTURE ALGÉBRIQUE : algèbre associative $\nu =$ 

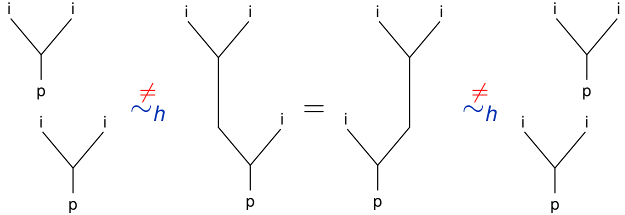
isomorphisme $\to$ retract par déformation :

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$$

$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0$$



pas associatif !

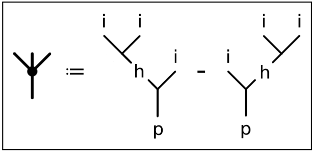


Opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\mu_3 : H^{\otimes 3} \to H$

Opérations supérieures

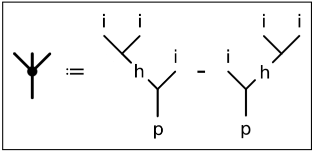
- IDÉE : introduire une opération supérieure $\mu_3 : H^{\otimes 3} \to H$



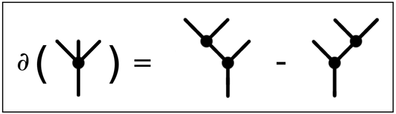
mesure le défaut d'associativité de μ_2

Opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\mu_3 : H^{\otimes 3} \to H$



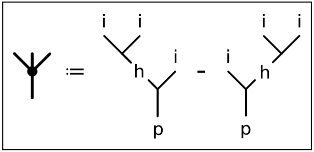
mesure le défaut d'associativité de μ_2



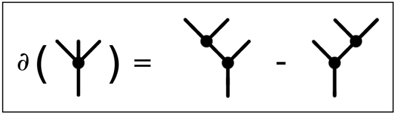
dans Hom$(H^{\otimes 3}, H)$

Opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\mu_3 : H^{\otimes 3} \to H$



mesure le défaut d'associativité de μ_2

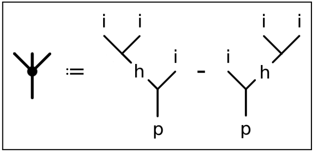


dans Hom$(H^{\otimes 3}, H)$

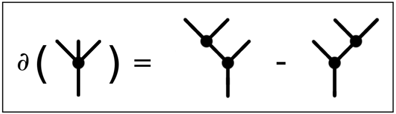
$\leftrightarrow$ μ_3 est une homotopie pour la relation d'associativité de μ_2

Opérations supérieures

- IDÉE : introduire une opération supérieure $\mu_3 : H^{\otimes 3} \to H$



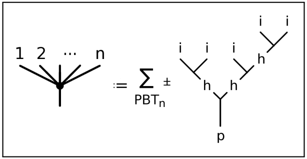
mesure le défaut d'associativité de μ_2



dans $\mathrm{Hom}(H^{\otimes 3}, H)$

$\leftrightarrow$ μ_3 est une homotopie pour la relation d'associativité de μ_2

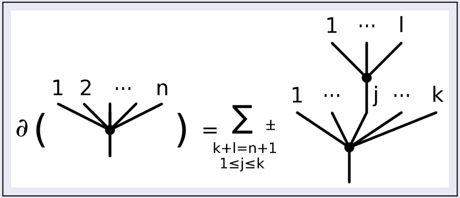
- Opérations supérieures :
  $\mu_n : H^{\otimes n} \to H, \ \forall n \geqslant 2$



Algèbres associatives à homotopie près

Proposition

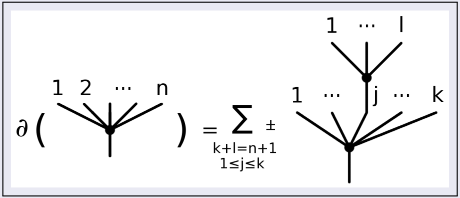
Les opérations $\{\mu_n\}_{n\geq 2}$ *vérifient*



Algèbres associatives à homotopie près

Proposition

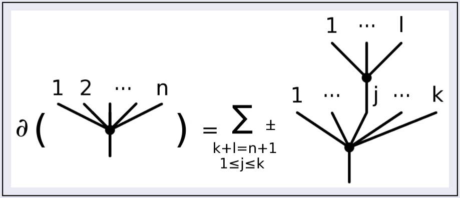
Les opérations $\{\mu_n\}_{n\geq 2}$ *vérifient*



Définition (A_∞-algèbres [Stasheff, 1963])

$$(H, \mu_1 = d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)$$

$$\mu_n : H^{\otimes n} \to H$$



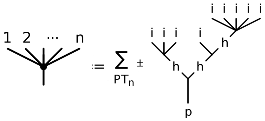
Les A_∞-algèbres sont homotopiquement stables

$\rightarrow$ Partant d'une A_∞-algèbre $(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)$:

Les A_∞-algèbres sont homotopiquement stables

$\rightarrow$ Partant d'une A_∞-algèbre $(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)$:

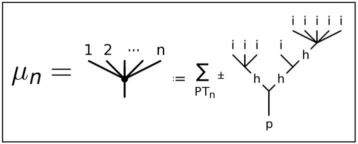
On considère $\mu_n =$



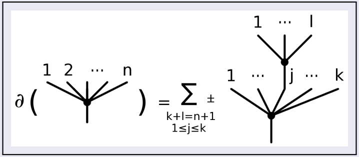
Les A_∞-algèbres sont homotopiquement stables

→ Partant d'une A_∞-algèbre $(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)$:

On considère



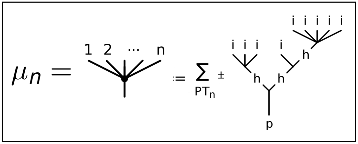
Proposition



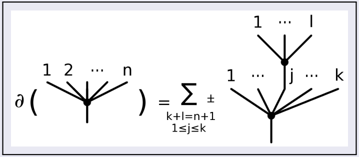
Les A_∞-algèbres sont homotopiquement stables

$\rightarrow$ Partant d'une A_∞-algèbre $(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)$:

On considère



Proposition



$\Longrightarrow$ encore une A_∞-algèbre :

pas besoin de structure supérieure supplémentaire

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de chaînes $\iff$ $\boxed{d_A i = i d_H}$

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de chaînes $\iff$ $\boxed{d_A i = i d_H}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les ν et μ supérieurs ?

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de chaînes $\iff$ $\boxed{d_A i = i d_H}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les ν et μ supérieurs ?
  $\rightarrow$ en général non !

Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{i} \underbrace{(H, d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de chaînes $\iff$ $\boxed{d_A i = i d_H}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les ν et μ supérieurs ?
  $\rightarrow$ en général non !

Définition (A_∞-morphisme)

$(H, d_H, \{\mu_n\}_{n\geq 2}) \rightsquigarrow (A, d_A, \{\nu_n\}_{n\geq 2})$: collection $\{f_n \ : \ H^{\otimes n} \to A\}_{n\geq 1}$

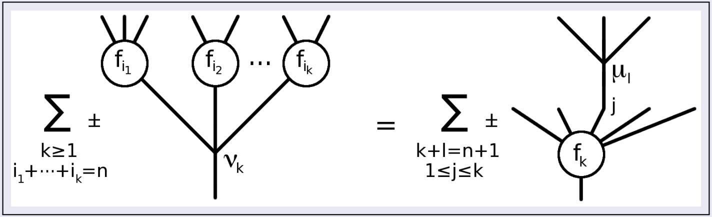
Morphismes supérieurs

$$\underbrace{(A, d_A, \nu_2, \nu_3, \ldots)}_{\text{structure originelle}} \xleftarrow{\ i\ } \underbrace{(H, d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)}_{\text{structure transportée}}$$

- i morphisme de chaînes $\iff$ $\boxed{d_A i = i d_H}$
- QUESTION : est-ce que i commute avec les ν et μ supérieurs ?
  $\rightarrow$ en général non !

Définition (A_∞-morphisme)

$(H, d_H, \{\mu_n\}_{n\geq 2}) \rightsquigarrow (A, d_A, \{\nu_n\}_{n\geq 2})$: collection $\{f_n : H^{\otimes n} \to A\}_{n\geq 1}$



Théorème de transport homotopique

A_∞-QUASI-ISOMORPHISME : $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ t.q. $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-iso.

Théorème de transport homotopique

A_∞-QUASI-ISOMORPHISME : $i : H \stackrel{\sim}{\rightsquigarrow} A$ t.q. $i_0 : H \stackrel{\sim}{\to} A$ quasi-iso.

Théorème (TTH pour les A_∞-algèbres [Kadeshvili 1982])

Soit une A_∞-algèbre A et un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

il existe une structure d'A_∞-algèbre sur H telle que i, p, et h s'étendent respectivement en A_∞-quasi-isomorphismes et A_∞-homotopie.

Théorème de transport homotopique

A_∞-QUASI-ISOMORPHISME : $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ t.q. $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-iso.

Théorème (TTH pour les A_∞-algèbres [Kadeshvili 1982])

Soit une A_∞-algèbre A et un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

il existe une structure d'A_∞-algèbre sur H telle que i, p, et h s'étendent respectivement en A_∞-quasi-isomorphismes et A_∞-homotopie.

$\boxed{\text{formules explicites \& pas de perte d'information algébro-homotopique}}$

Théorème de transport homotopique

A_∞-QUASI-ISOMORPHISME : $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ t.q. $i_0 : H \xrightarrow{\sim} A$ quasi-iso.

Théorème (TTH pour les A_∞-algèbres [Kadeshvili 1982])

Soit une A_∞-algèbre A et un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

il existe une structure d'A_∞-algèbre sur H telle que i, p, et h s'étendent respectivement en A_∞-quasi-isomorphismes et A_∞-homotopie.

$\boxed{\text{formules explicites \& pas de perte d'information algébro-homotopique}}$

- APPLICATION 1 : produits de Massey sur $H^\bullet(X, \mathbb{K})$
  $\to$ cohomologie galoisienne, courbes elliptiques, etc.

Théorème de transport homotopique

A_∞-QUASI-ISOMORPHISME : $i : H \overset{\sim}{\rightsquigarrow} A$ t.q. $i_0 : H \overset{\sim}{\to} A$ quasi-iso.

Théorème (TTH pour les A_∞-algèbres [Kadeshvili 1982])

Soit une A_∞-algèbre A et un retract par déformation

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H) \qquad \mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A$$

il existe une structure d'A_∞-algèbre sur H telle que i, p, et h s'étendent respectivement en A_∞-quasi-isomorphismes et A_∞-homotopie.

formules explicites & pas de perte d'information algébro-homotopique

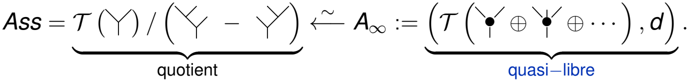
- APPLICATION 1 : produits de Massey sur $H^\bullet(X, \mathbb{K})$
  $\to$ cohomologie galoisienne, courbes elliptiques, etc.
- APPLICATION 2 : A_∞-catégories
  $\to$ cohomologie de Floer, symétrie miroir, etc.

Calcul opéradique

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{une opérade } \mathcal{P}} \arrow[d, dotted] & \boxed{\mathcal{P}_\infty\text{: résolution quasi-libre (cofibrante)}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie d'algèbres}\\ \text{de type } \mathcal{P}\end{array}} \arrow[r, "\subset"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres =}\\ \text{catégorie d'}\mathcal{P}\text{-algèbres}\\ \text{à homotopie près}\end{array}}
\end{tikzcd}
$$

Calcul opéradique

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{une opérade } \mathcal{P}} \arrow[d, dotted] & \boxed{\mathcal{P}_\infty\text{: résolution quasi-libre (cofibrante)}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie d'algèbres}\\ \text{de type } \mathcal{P}\end{array}} \arrow[r, "\subset"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres =}\\ \text{catégorie d'}\mathcal{P}\text{-algèbres}\\ \text{à homotopie près}\end{array}}
\end{tikzcd}$$



Calcul opéradique

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{une opérade } \mathcal{P}} \arrow[d, dotted] & \boxed{\mathcal{P}_\infty\text{: résolution quasi-libre (cofibrante)}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie d'algèbres}\\ \text{de type } \mathcal{P}\end{array}} \arrow[r, "\subset"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres =}\\ \text{catégorie d'}\mathcal{P}\text{-algèbres}\\ \text{à homotopie près}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

$$Ass = \underbrace{\mathcal{T}\left(\curlyvee\right) / \left(\curlyvee\!\!\curlyvee \;-\; \curlyvee\!\!\curlyvee\right)}_{\text{quotient}} \xleftarrow{\sim} A_\infty := \underbrace{\left(\mathcal{T}\left(\curlyvee \oplus \Psi \oplus \cdots\right), d\right)}_{\text{quasi}-\text{libre}} .$$

- EXEMPLES : Lie_∞, Com_∞, $LieBi_\infty$, $Frobenius_\infty$, etc.

Calcul opéradique

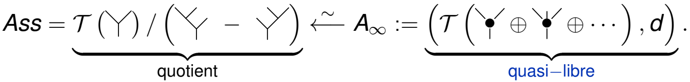
$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{une opérade } \mathcal{P}} \arrow[d, dotted] & \boxed{\mathcal{P}_\infty :\ \text{résolution quasi-libre}\ \ \text{(cofibrante)}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie d'algèbres} \\ \text{de type } \mathcal{P}\end{array}} \arrow[r, "\subset"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres =} \\ \text{catégorie d'}\mathcal{P}\text{-algèbres} \\ \text{à homotopie près}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

$$Ass = \underbrace{\mathcal{T}\left(\ \right) / \left(\ \ -\ \ \right)}_{\text{quotient}} \xleftarrow{\sim} A_\infty := \underbrace{\left(\mathcal{T}\left(\ \oplus\ \oplus \cdots\right), d\right)}_{\text{quasi}-\text{libre}}.$$

- EXEMPLES : Lie_∞, Com_∞, $LieBi_\infty$, $Frobenius_\infty$, etc.
- THÉORÈME : théorème de transport homotopique

Calcul opéradique

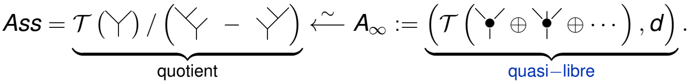
$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{une opérade } \mathcal{P}} \arrow[d, dotted] & \boxed{\mathcal{P}_\infty\text{: résolution quasi-libre (cofibrante)}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\text{catégorie d'algèbres de type } \mathcal{P}} \arrow[r, "\subset"] & \boxed{\text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres = catégorie d'}\mathcal{P}\text{-algèbres à homotopie près}}
\end{tikzcd}$$



- EXEMPLES : *Lie*$_\infty$, *Com*$_\infty$, *LieBi*$_\infty$, *Frobenius*$_\infty$, etc.
- THÉORÈME : théorème de transport homotopique
- APPLICATIONS : diagrammes de Feynman, probabilitiés nc, etc.

Calcul opéradique

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{une opérade } \mathcal{P}} \arrow[d, dotted] & \boxed{\mathcal{P}_\infty \text{: résolution quasi-libre (cofibrante)}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie d'algèbres}\\ \text{de type } \mathcal{P}\end{array}} \arrow[r, "\subset"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres =}\\ \text{catégorie d'}\mathcal{P}\text{-algèbres}\\ \text{à homotopie près}\end{array}}
\end{tikzcd}
$$



- EXEMPLES : Lie_∞, Com_∞, $LieBi_\infty$, $Frobenius_\infty$, etc.
- THÉORÈME : théorème de transport homotopique
- APPLICATIONS : diagrammes de Feynman, probabilitiés nc, etc.

Théorème (Mandell [2005])

Le type d'homotopie d'un espace topologique X est encodé fidèlement par la structure d'E_∞-algèbre structure de son complexe de cochaînes singulières $C^\bullet_{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$.

Table of contents

Théorie de Lie classique

- 3e THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Théorie de Lie classique

- 3ᴱ THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Définition (Formule de Baker–Campbell-Hausdorff)

$$\mathrm{BCH}(x, y) := \ln\left(\exp(x).\exp(y)\right) \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong \widehat{Ass}(x, y)$$

Théorie de Lie classique

- 3E THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Définition (Formule de Baker–Campbell-Hausdorff)

$$\mathrm{BCH}(x, y) := \ln\left(\exp(x).\exp(y)\right) \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong \widehat{Ass}(x, y)$$

Théorème

- $\mathrm{BCH}(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [x, y]] + \cdots$
  $\in \widehat{Lie}(x, y) \subset \widehat{Ass}(x, y)$

Théorie de Lie classique

- 3E THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Définition (Formule de Baker–Campbell-Hausdorff)

$$\mathrm{BCH}(x, y) := \ln\left(\exp(x).\exp(y)\right) \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong \widehat{Ass}(x, y)$$

Théorème

- $\mathrm{BCH}(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [x, y]] + \cdots$
  $\in \widehat{Lie}(x, y) \subset \widehat{Ass}(x, y)$
- $\mathrm{BCH}(\mathrm{BCH}(x, y), z) = \mathrm{BCH}(x, \mathrm{BCH}(y, z))$

Théorie de Lie classique

- 3E THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Définition (Formule de Baker–Campbell-Hausdorff)

$$\mathrm{BCH}(x, y) := \ln(\exp(x).\exp(y)) \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong \widehat{Ass}(x, y)$$

Théorème

- $\mathrm{BCH}(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [x, y]] + \cdots$
  $\in \widehat{Lie}(x, y) \subset \widehat{Ass}(x, y)$
- $\mathrm{BCH}(\mathrm{BCH}(x, y), z) = \mathrm{BCH}(x, \mathrm{BCH}(y, z))$
- $\mathrm{BCH}(x, 0) = x = \mathrm{BCH}(0, x)$

Théorie de Lie classique

- 3^E THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Définition (Formule de Baker–Campbell-Hausdorff)

$$\mathrm{BCH}(x, y) := \ln\left(\exp(x).\exp(y)\right) \in \mathbb{K}\langle\langle x, y\rangle\rangle \cong \widehat{Ass}(x, y)$$

Théorème

- $\mathrm{BCH}(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [x, y]] + \cdots$
  $\in \widehat{Lie}(x, y) \subset \widehat{Ass}(x, y)$
- $\mathrm{BCH}(\mathrm{BCH}(x, y), z) = \mathrm{BCH}(x, \mathrm{BCH}(y, z))$
- $\mathrm{BCH}(x, 0) = x = \mathrm{BCH}(0, x)$

Définition (Groupe de Hausdorff)

$(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ algèbre de Lie complète

Théorie de Lie classique

- 3ᴱ THÉORÈME DE LIE : algèbre de Lie $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp}$ groupe de Lie G

Définition (Formule de Baker–Campbell-Hausdorff)

$$\mathrm{BCH}(x,y) := \ln\left(\exp(x).\exp(y)\right) \in \mathbb{K}\langle\langle x,y\rangle\rangle \cong \widehat{Ass}(x,y)$$

Théorème

- $\mathrm{BCH}(x,y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}[x,[x,y]] + \frac{1}{12}[y,[x,y]] + \cdots \in \widehat{Lie}(x,y) \subset \widehat{Ass}(x,y)$
- $\mathrm{BCH}(\mathrm{BCH}(x,y),z) = \mathrm{BCH}(x,\mathrm{BCH}(y,z))$
- $\mathrm{BCH}(x,0) = x = \mathrm{BCH}(0,x)$

Définition (Groupe de Hausdorff)

$(\mathfrak{g},[\,,\,])$ algèbre de Lie complète $\Rightarrow G := (\mathfrak{g}, \mathrm{BCH}, 0)$ groupe de Hausdorff

Théorie de la déformation

$\longrightarrow$ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{d})$

Théorie de la déformation

$\rightarrow$ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Théorie de la déformation

$\longrightarrow$ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Proposition

Le groupe de Hausdorff G de $\mathfrak{g}_0$ *agit sur* $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

Théorie de la déformation

→ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Proposition

Le groupe de Hausdorff G de $\mathfrak{g}_0$ *agit sur* $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

→ PHILOSOPHIE : “Tout problème de déformation sur un corps de caractéristique 0 peut être encodé par une algèbre de Lie dg.”

Théorie de la déformation

$\rightarrow$ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Proposition

Le groupe de Hausdorff G de $\mathfrak{g}_0$ *agit sur* $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

$\rightarrow$ PHILOSOPHIE : “Tout problème de déformation sur un corps de caractéristique 0 peut être encodé par une algèbre de Lie dg.”

$$\text{structures de type } \mathcal{P} \text{ sur un “espace” } A \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},A})$$

Théorie de la déformation

→ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Proposition

Le groupe de Hausdorff G de $\mathfrak{g}_0$ *agit sur* $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

→ PHILOSOPHIE : "Tout problème de déformation sur un corps de caractéristique 0 peut être encodé par une algèbre de Lie dg."

structures de type $\mathcal{P}$ sur un "espace" A	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},A})$
relation d'équivalence	$\longleftrightarrow$	G

Théorie de la déformation

$\rightarrow$ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Proposition

Le groupe de Hausdorff G de $\mathfrak{g}_0$ *agit sur* $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

$\rightarrow$ PHILOSOPHIE : “Tout problème de déformation sur un corps de caractéristique 0 peut être encodé par une algèbre de Lie dg.”

structures de type $\mathcal{P}$ sur un “espace” A	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},A})$
relation d'équivalence	$\longleftrightarrow$	G

- $(Hoch^\bullet(A, A), [\,,\,]_{Gerst})$: algèbres associatives / isomorphismes

Théorie de la déformation

$\rightarrow$ ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE GRADUÉE : $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$

Définition (éléments de Maurer–Cartan)

$$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \mathrm{d}\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

Proposition

Le groupe de Hausdorff G de $\mathfrak{g}_0$ *agit sur* $\mathrm{MC}(\mathfrak{g})$

$\rightarrow$ PHILOSOPHIE : “Tout problème de déformation sur un corps de caractéristique 0 peut être encodé par une algèbre de Lie dg.”

structures de type $\mathcal{P}$ sur un “espace” A	$\longleftrightarrow$	$\mathrm{MC}(\mathfrak{g}_{\mathcal{P},A})$
relation d'équivalence	$\longleftrightarrow$	G

- $(Hoch^\bullet(A, A), [\,,\,]_{Gerst})$: algèbres associatives / isomorphismes
- $(\Gamma(\Lambda^\bullet TM), [\,,\,]_{SN})$: structures de Poisson / difféomorphismes

Quantification par déformation des variétés de Poisson

Théorème (Kontsevich [1997])

Toute variété de Poisson (M, π) *peut-être quantifiée :*
$\exists$ *produit associatif* $*$ *sur* $C^\infty(M)[[\hbar]]$ *t.q.* $*_0 = \cdot$ *et* $*_1 = \{\,,\}$

Quantification par déformation des variétés de Poisson

Théorème (Kontsevich [1997])

Toute variété de Poisson (M, π) *peut-être quantifiée :*
$\exists$ *produit associatif* $*$ *sur* $C^\infty(M)[[\hbar]]$ *t.q.* $*_0 = \cdot$ *et* $*_1 = \{\,,\}$

Démonstration.

- Le foncteur : algèbres de Lie dg $(\mathfrak{g}, [\,,], \mathrm{d}) \mapsto \mathrm{MC}(\mathfrak{g})/G$ envoie les quasi-isomorphismes sur les bijections.

Quantification par déformation des variétés de Poisson

Théorème (Kontsevich [1997])

Toute variété de Poisson (M, π) *peut-être quantifiée :*
$\exists$ *produit associatif* $*$ *sur* $C^\infty(M)[[\hbar]]$ *t.q.* $*_0 = \cdot$ *et* $*_1 = \{\,,\}$

Démonstration.

- Le foncteur : algèbres de Lie dg $(\mathfrak{g}, [\,,], \mathrm{d}) \mapsto \mathrm{MC}(\mathfrak{g})/G$ envoie les quasi-isomorphismes sur les bijections.
- Le quasi-isomorphisme de Hochschild–Kostant–Rosenberg

$$\Gamma(\Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{\sim} Hoch^\bullet(C^\infty(M), C^\infty(M))$$

Quantification par déformation des variétés de Poisson

Théorème (Kontsevich [1997])

Toute variété de Poisson (M, π) *peut-être quantifiée :*
$\exists$ *produit associatif* $*$ *sur* $C^\infty(M)[[\hbar]]$ *t.q.* $*_0 = \cdot$ *et* $*_1 = \{\,,\}$

Démonstration.

- Le foncteur : algèbres de Lie dg $(\mathfrak{g}, [\,,], \mathrm{d}) \mapsto \mathrm{MC}(\mathfrak{g})/G$ envoie les quasi-isomorphismes sur les bijections.
- Le quasi-isomorphisme de Hochschild–Kostant–Rosenberg

$$\Gamma(\Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{\sim} Hoch^\bullet(C^\infty(M), C^\infty(M))$$

(ne respecte pas les crochets de Lie)

Quantification par déformation des variétés de Poisson

Théorème (Kontsevich [1997])

Toute variété de Poisson (M, π) *peut-être quantifiée :*
$\exists$ *produit associatif* $*$ *sur* $C^\infty(M)[[\hbar]]$ *t.q.* $*_0 = \cdot$ *et* $*_1 = \{\, ,\}$

Démonstration.

- Le foncteur : algèbres de Lie dg $(\mathfrak{g}, [\, ,], \mathrm{d}) \mapsto \mathrm{MC}(\mathfrak{g})/G$ envoie les quasi-isomorphismes sur les bijections.
- Le quasi-isomorphisme de Hochschild–Kostant–Rosenberg

$$\Gamma(\Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{\sim} Hoch^\bullet(C^\infty(M), C^\infty(M))$$

(ne respecte pas les crochets de Lie)
s'étend en un Lie_∞-quasi-isomorphisme.

Quantification par déformation des variétés de Poisson

Théorème (Kontsevich [1997])

Toute variété de Poisson (M, π) *peut-être quantifiée :*
$\exists$ *produit associatif* $*$ *sur* $C^\infty(M)[[\hbar]]$ *t.q.* $*_0 = \cdot$ *et* $*_1 = \{\,,\}$

Démonstration.

- Le foncteur : algèbres de Lie dg $(\mathfrak{g}, [\,,], \mathrm{d}) \mapsto \mathrm{MC}(\mathfrak{g})/G$ envoie les quasi-isomorphismes sur les bijections.
- Le quasi-isomorphisme de Hochschild–Kostant–Rosenberg

$$\Gamma(\Lambda^\bullet TM) \xrightarrow{\sim} Hoch^\bullet(C^\infty(M), C^\infty(M))$$

(ne respecte pas les crochets de Lie)
s'étend en un Lie_∞-quasi-isomorphisme.
- $\exists$ Lie_∞-q.i. $\Leftrightarrow$ $\exists$ zig-zag of q.i. d'algèbres de Lie dg

$\square$

Théorème fondamental de la théorie de la déformation

Définition (Foncteur de déformation)

Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \mathrm{d})$ une algèbre de Lie différentielles graduées :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}} : & \text{anneaux artiniens} & \to & \text{groupoïdes} \\ & \mathfrak{R} \cong \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m} & \mapsto & (\mathrm{MC}\ (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}), G) \end{array}$$

Théorème fondamental de la théorie de la déformation

Définition (Problème de modules formels)

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,], \mathrm{d})$ une algèbre de Lie différentielles graduées :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}} : \text{dg anneaux artiniens} & \to & \infty\text{- groupoïdes} & \text{s.t. [...]} \\ \mathfrak{R} \cong \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m} & \mapsto & (\mathrm{MC}_{\bullet}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}), G) & \end{array}$$

Théorème fondamental de la théorie de la déformation

Définition (Problème de modules formels)

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$ une algèbre de Lie différentielles graduées :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}} : \text{dg anneaux artiniens} & \to & \infty\text{- groupoïdes} & \text{s.t. [...]} \\ \mathfrak{R} \cong \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m} & \mapsto & (\mathrm{MC}_{\bullet}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}), G) & \end{array}$$

- ∞-groupoïde $\leftrightarrow$ espaces topologiques $\leftrightarrow$ complexe de Kan

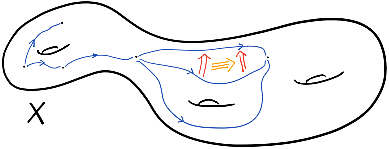
Théorème fondamental de la théorie de la déformation

Définition (Problème de modules formels)

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$ une algèbre de Lie différentielles graduées :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}} : \text{dg anneaux artiniens} & \to & \infty\text{- groupoïdes} & \text{s.t. [...]} \\ \mathfrak{R} \cong \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m} & \mapsto & (\mathrm{MC}_{\bullet}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}), G) & \end{array}$$

- ∞-groupoïde $\leftrightarrow$ espaces topologiques $\leftrightarrow$ complexe de Kan



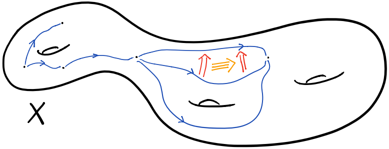
Théorème fondamental de la théorie de la déformation

Définition (Problème de modules formels)

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,], \mathrm{d})$ une algèbre de Lie différentielles graduées :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}} : \text{dg anneaux artiniens} & \to & \infty\text{- groupoïdes} & \text{s.t. [...]} \\ \mathfrak{R} \cong \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m} & \mapsto & (\mathrm{MC}_{\bullet}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}), G) & \end{array}$$

- ∞-groupoïde $\leftrightarrow$ espaces topologiques $\leftrightarrow$ complexe de Kan



Théorème ([Pridham–Lurie 2010])

car $\mathbb{K} = 0 \Longrightarrow$ *équivalence d'∞-catégories :*

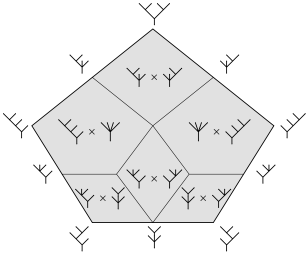
$$\boxed{\text{problèmes de modules formels} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \text{algèbres de Lie dg}}$$

Inventaire à la Prévert (Paroles)

Une triperie, deux pierres
Trois fleurs, un oiseau
Vingt-deux fossoyeurs, un amour
Le raton laveur, une madame untel
Un citron, un pain
Un grand rayon de soleil
[...]

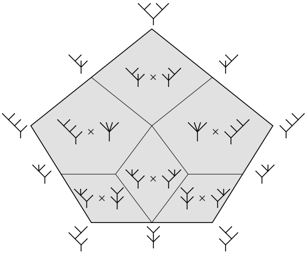
Inventaire à la Prévert (Paroles)

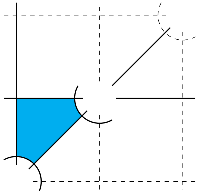
Une triperie, deux pierres
Trois fleurs, un oiseau
Vingt-deux fossoyeurs, un amour
Le raton laveur, une madame untel
Un citron, un pain
Un grand rayon de soleil
[...]



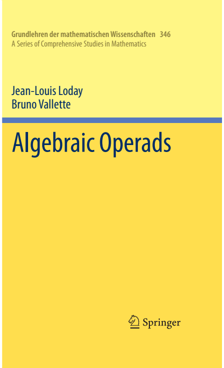
Inventaire à la Prévert (Paroles)

Une triperie, deux pierres
Trois fleurs, un oiseau
Vingt-deux fossoyeurs, un amour
Le raton laveur, une madame untel
Un citron, un pain
Un grand rayon de soleil
[...]

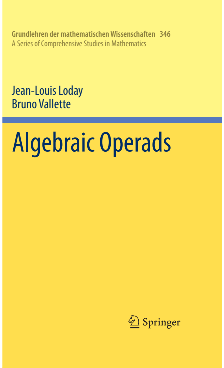


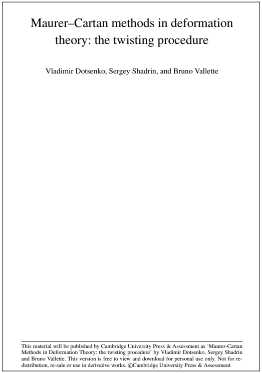


Références


Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 346
A Series of Comprehensive Studies in Mathematics
Jean-Louis Loday
Bruno Vallette
Algebraic Operads
Springer

Références



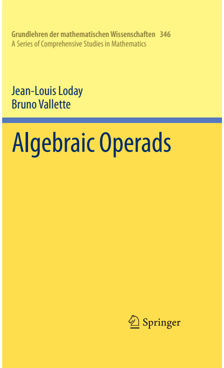


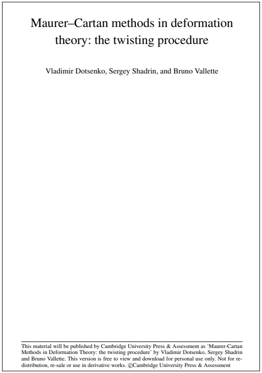
Maurer–Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure

Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin, and Bruno Vallette

This material will be published by Cambridge University Press & Assessment as 'Maurer-Cartan Methods in Deformation Theory: the twisting procedure' by Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin and Bruno Vallette. This version is free to view and download for personal use only. Not for re-distribution, re-sale or use in derivative works. ©Cambridge University Press & Assessment

Références





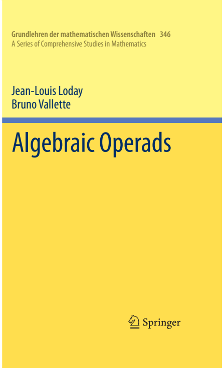
Maurer–Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure

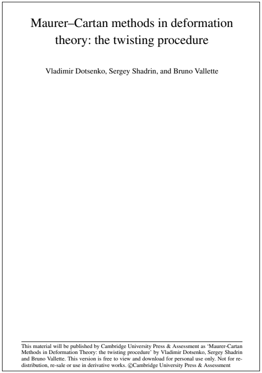
Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin, and Bruno Vallette

This material will be published by Cambridge University Press & Assessment as 'Maurer-Cartan Methods in Deformation Theory: the twisting procedure' by Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin and Bruno Vallette. This version is free to view and download for personal use only. Not for re-distribution, re-sale or use in derivative works. ©Cambridge University Press & Assessment

www.math.univ-paris13.fr/∼vallette/

Références




Maurer–Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure

Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin, and Bruno Vallette

This material will be published by Cambridge University Press & Assessment as 'Maurer-Cartan Methods in Deformation Theory: the twisting procedure' by Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin and Bruno Vallette. This version is free to view and download for personal use only. Not for re-distribution, re-sale or use in derivative works. ©Cambridge University Press & Assessment

www.math.univ-paris13.fr/∼vallette/