

EXAMEN

4 JANVIER 2022

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. Seuls les notes de cours et les documents papier sont autorisés. Tout le reste, dont les appareils électroniques, est interdit.



Exercice 1 (Groupe fondamental de $SO(3)$). On rappelle que l'espace euclidien canonique $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ est isomorphe à l'espace euclidien

$$\mathfrak{h} := \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M = -{}^t \overline{M}, \text{tr } M = 0\}$$

des matrices anti-hermitiennes de trace nulle muni du produit scalaire $\langle M, N \rangle := \frac{1}{2} \text{tr}(M {}^t \overline{N})$, via l'application $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix}$. Le *groupe spécial unitaire* est défini par

$$SU(2) := \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid M {}^t \overline{M} = I_2, \det M = 1\},$$

où I_2 est la matrice identité; il admet une topologie induite de celle des matrices.

- (1) Montrer que l'action par conjugaison $(M, H) \in SU(2) \times \mathfrak{h} \mapsto MHM^{-1} \in \mathfrak{h}$ définit un morphisme continu de groupes $\Phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$.

L'action par conjugaison s'interprète comme un morphisme de groupes $SU(2) \rightarrow GL(\mathfrak{h})$, dont chaque image préserve le produit scalaire :

$$\langle MHM^{-1}, MKM^{-1} \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(MHM^{-1} {}^t \overline{MKM^{-1}}) = \frac{1}{2} \text{tr}(H {}^t \overline{K}) = \langle H, K \rangle.$$

On a donc un morphisme continu de groupes $SU(2) \rightarrow O(3)$. Comme le groupe spécial unitaire est formé des matrices de la forme

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\},$$

il est homéomorphe à la sphère $SU(2) \cong S^3$ de dimension 3. Il est donc connexe et l'image du morphisme précédent vit dans la composante connexe de l'identité de $O(3)$, c'est-à-dire $SO(3)$.

- (2) Calculer le groupe fondamental de $SO(3)$.

INDICATION. On pourra admettre que le morphisme $\Phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$ est surjectif.

En utilisant la base suivante

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

de \mathfrak{h} , on voit que le noyau de Φ se réduit à $\ker \Phi = \{I_2, -I_2\}$. Avec l'indication, on a que $SU(2)$ est un revêtement à deux feuillets de $SO(3)$. Comme $SU(2)$ est homéomorphe à la sphère S^3 qui est connexe par arcs et simplement connexe, la longue suite exacte d'homotopie associée à ce revêtement donne

$$\pi_1(SU(2)) \cong \{0\} \rightarrow \pi_1(SO(3)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \pi_0(SU(2)) \cong \{0\}.$$

REMARQUE. Comme $SU(2)$ est simplement connexe, il s'agit du revêtement universel de $SO(3)$.

(3) L'espace topologique $SO(3)$ est-il homotopiquement équivalent à $S^1 \times S^2$?

On commence déjà par remarquer que $S^2 \rightarrow S^1 \times S^2 \rightarrow S^1$ est un fibré (trivial) de fibre S^2 et de base S^1 . La longue suite exacte induite au niveau des groupes d'homotopie donne

$$\pi_1(S^2) \cong \{0\} \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^2) \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_0(S^2) \cong \{0\}.$$

Si $SO(3)$ était homotopiquement équivalent à $S^1 \times S^2$ alors ils partageraient le même groupe fondamental, ce qui n'est pas le cas par la question précédente.

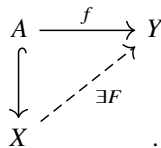
(4) Montrer que la variété S^2 n'admet pas de champ de vecteurs tangents continu qui ne s'annulent jamais.

Supposons par l'absurde qu'il existe un tel champ de vecteurs ne s'annulant jamais, c'est-à-dire une application $\tau: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ telle que $\langle x, \tau(x) \rangle = 0$, pour tout $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$. En considérant $\frac{\tau(x)}{\|\tau(x)\|}$, on peut supposer sans perte de généralité que $\tau(x)$ est unitaire, pour tout $x \in S^2$. L'application $S^2 \rightarrow SO(3)$ définie par $x \mapsto (x, \tau(x), x \wedge \tau(x))$, où \wedge représente le produit vectoriel, est une application continue. Au final, on considère l'application $S^1 \times S^2 \rightarrow SO(3)$ qui associe à (θ, x) la rotation d'axe x et d'angle θ mesuré entre $\tau(x)$ et $x \wedge \tau(x)$. Il est facile de voir que cette application décrit un homéomorphisme. Or ceci entre en contradiction avec le résultat de la question précédente.

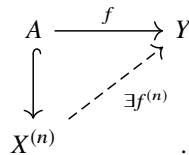


Exercice 2 (CW-complexe relatif). Soit (X, A) un CW-complexe relatif.

(1) Soit Y un espace topologique connexe par arcs tel que $\pi_{n-1}(Y) \cong 0$, pour tout $n \geq 1$ tel que $X \setminus A$ a une cellule en dimension n . Montrer que toute application continue $f: A \rightarrow Y$ s'étend en une application continue $F: X \rightarrow Y$:



Par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}$ du squelette de X , on montre qu'il existe une application continue $f^{(n)}: X^{(n)} \rightarrow Y$ qui étende f :



Pour $n = 0$, il suffit de faire des choix arbitraires d'images pour $X^{(0)} \setminus A$, si ce dernier n'est pas vide. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$ et montrons le au rang n . Si X ne contient aucune cellule de dimension n , alors c'est fini car $X^{(n-1)} = X^{(n)}$. Dans le cas contraire, on obtient le n -squelette de X de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{j \in J_n} \varphi_n^j} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{j \in J_n} D^n & \xrightarrow{\coprod_{j \in J_n} \Phi_n^j} & X^{(n)} \end{array}$$

Comme $\pi_{n-1}(Y) \cong 0$, chaque composée $f^{(n-1)} \circ \varphi_n^j$ est homotope à l'application constante. Ceci est équivalent à la donnée d'une application continue $D^n \cong \text{Cone}(S^{n-1}) \rightarrow Y$ qui coïncide avec $f^{(n-1)} \circ \varphi_n^j$ sur S^{n-1} . La propriété universelle de la somme amalgamée donne l'application continue $f^{(n)}$ recherchée. Au final, on obtient la fonction f par passage à la colimite.

(2) Montrer que X se rétracte sur A lorsque A est contractible.

Il suffit d'appliquer la question précédent à $Y = A$ et à l'application $f = \text{id}_A$ identité de A .

- (3) Montrer que la projection canonique $X \rightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie lorsque A est contractible.

INDICATION. On pourra utiliser le fait que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration.

Comme A est contractile, il existe un point a de A et une application continue $\bar{h}: A \times I \rightarrow A$ telle que $\bar{h}(-, 0) = \text{id}_A$ est l'application identité et $\bar{h}(-, 1) = \text{cst}_a$ est égale à la fonction constante de valeur a . On considère l'application $h: A \times I \rightarrow X$ obtenue en composant \bar{h} avec l'inclusion naturelle $A \hookrightarrow X$. Comme cette dernière est une cofibration, l'application h s'étend en une application continue $H: X \times I \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \\
 & \searrow \text{id}_X & \downarrow \exists H \\
 & & X
 \end{array}$$

Comme $H(A, t) = h(A, t) \subset A$, pour tout $t \in I$, il existe une application continue $\mathcal{H}: X/A \times I \rightarrow X/A$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 X \times I & \xrightarrow{H} & X \\
 \downarrow \pi \times \text{id}_I & & \downarrow \pi \\
 X/A \times I & \xrightarrow{\mathcal{H}} & X/A
 \end{array}$$

Comme $H(A, 1) = \{a\}$, il existe une application continue $\iota: X/A \rightarrow X$ telle que $\iota \circ \pi = H(-, 1)$. On voit rapidement que l'application ι vérifie aussi $\pi \circ \iota = \mathcal{H}(-, 1)$ car

$$(\pi \circ \iota)(\pi(x)) = \pi(H(x, 1)) = \mathcal{H}(\pi(x), 1).$$

Au final, l'application H est une homotopie entre id_X et $\iota \circ \pi$ et l'application \mathcal{H} est une homotopie entre $\text{id}_{X/A}$ et $\pi \circ \iota$.



Exercice 3 (Joint). Le *joint* de deux catégories C, D est la catégorie $C \star D$ dont les objets

$$\text{Obj}(C \star D) := \text{Obj}(C) \sqcup \text{Obj}(D)$$

sont ceux de C et de D et dont les morphismes sont les suivants :

$$\text{Hom}_{C \star D}(x, y) := \begin{cases} \text{Hom}_C(x, y), & \text{pour } x, y \in \text{Obj}(C), \\ \text{Hom}_D(x, y), & \text{pour } x, y \in \text{Obj}(D), \\ \{*\}, & \text{pour } x \in \text{Obj}(C), y \in \text{Obj}(D), \\ \emptyset, & \text{pour } x \in \text{Obj}(D), y \in \text{Obj}(C). \end{cases}$$

La composition des morphismes est induite par celle de C et de D .

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la catégorie $\text{Cat}[n] := \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\}$ associée à l'ensemble partiellement ordonné $[n] := \{0 < 1 < \dots < n\}$. Que vaut $\text{Cat}[m] \star \text{Cat}[n]$?

On voit que

$$\begin{aligned}
 \text{Cat}[m] \star \text{Cat}[n] &= \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 0' \rightarrow 1' \rightarrow \dots \rightarrow m\} \\
 &\cong \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow n+1 \rightarrow n+2 \rightarrow \dots \rightarrow m+n+1\} \\
 &\cong \text{Cat}[m+n+1].
 \end{aligned}$$

On note Cat la catégorie des petites catégories et on se fixe D une petite catégorie. On considère la catégorie D/Cat des *catégories sous* D dont les objets sont les foncteurs de $F: D \rightarrow C$ de D vers une catégorie C et dont les morphismes entre $F: D \rightarrow C$ et $F': D \rightarrow C'$ sont les foncteurs $G: C \rightarrow C'$ tels que $G \circ F = F'$. Comme la catégorie D est une sous-catégorie pleine du joint $C \star D$, ce dernier est canoniquement une catégorie sous D via inclusion $D \rightarrow C \star D$.

- (2) Montrer que le foncteur $- \star D : C \mapsto C \star D$ est adjoint à gauche du foncteur $\text{Cone} : (F : D \rightarrow C) \mapsto \text{Cone}(F)$:

$$- \star D : \text{Cat} \xrightleftharpoons[\perp]{} D/\text{Cat} : \text{Cone} .$$

Soit C une petite catégorie et soit $F : D \rightarrow E$ une (petite) catégorie sous D . Montrons qu'il existe une bijection naturelle

(A) $\text{Hom}_{D/\text{Cat}}(D \rightarrow C \star D, F : D \rightarrow E) \cong \text{Hom}_{\text{Cat}}(C, \text{Cone}(F)) .$

Un morphisme à gauche est un foncteur $G : C \star D \rightarrow E$ tel que

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \swarrow & \searrow F \\ C \star D & \xrightarrow{G} & E . \end{array}$$

Une telle donnée est équivalente à celle

(a) d'un foncteur $\bar{G} : C \rightarrow E$, obtenu par la composition $C \rightarrow C \star D \xrightarrow{G} E$,

(b) et d'une collection de morphismes $\bar{G}(c) \rightarrow F(d)$ de E , pour toute paire d'objets c de C et d de D . La compatibilité du foncteur G avec la composition des morphismes du joint $C \star D$ est alors équivalente à la commutativité des diagrammes

(c)
$$\begin{array}{ccc} & \bar{G}(c) & \\ & \swarrow & \searrow \\ F(d) & \xrightarrow{F(g)} & F(d') , \end{array}$$

pour tout objet c de C et tout morphisme $g : d \rightarrow d'$ de D , et

(d)
$$\begin{array}{ccc} \bar{G}(c) & \xrightarrow{G(f)} & \bar{G}(c') \\ & \searrow & \swarrow \\ & F(d) & \end{array}$$

pour tout objet d de D et tout morphisme $f : c \rightarrow c'$ de C .

Un morphisme à droite est un foncteur $\tilde{G} : C \rightarrow \text{Cone}(F)$. Une telle donnée est donc équivalente à celle d'un foncteur $\bar{G} : C \rightarrow E$, comme en (a), muni d'une collection de morphismes $\bar{G}(c) \rightarrow F(d)$ de E , pour toute paire d'objets c de C et d de D , comme en (b), tels que tous les diagrammes (c) commutent. La compatibilité du foncteur \tilde{G} avec la composition des morphismes de C est équivalente à la commutativité des diagrammes (d).

Les applications réciproques $G \longleftrightarrow \tilde{G}$ définissent la bijection (A) recherchée, dont il est automatique de voir qu'elle est naturelle.

Le joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ de deux ensembles simpliciaux $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ est défini par

$$(\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y})_n := \bigsqcup_{p+1+q=n} X_p \times Y_q ,$$

avec la convention $X_{-1} = Y_{-1} := \{*\}$, et il est muni d'applications faces et dégénérescences dont les images de $(x, y) \in X_p \times Y_q$ sont données respectivement par

$$d_i(x, y) := \begin{cases} (d_i^{\mathfrak{X}}(x), y) , & \text{pour } i \leq p , \\ (x, d_{i-p-1}^{\mathfrak{Y}}(y)) , & \text{pour } i \geq p + 1 , \end{cases} \quad \text{et} \quad s_i(x, y) := \begin{cases} (s_i^{\mathfrak{X}}(x), y) , & \text{pour } i \leq p , \\ (x, s_{i-p-1}^{\mathfrak{Y}}(y)) , & \text{pour } i \geq p + 1 , \end{cases}$$

avec la convention $d_0^{\mathfrak{X}} : X_0 \rightarrow X_{-1} = \{*\}$ et $d_0^{\mathfrak{Y}} : Y_0 \rightarrow Y_{-1} = \{*\}$.

- (3) Montrer que le joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ forme un ensemble simplicial.

On commence par remarquer que les relations simpliciales entre les faces et les dégénérescences sont encore vraies si on prend en compte la face $d_0^{\mathfrak{X}} : X_0 \rightarrow X_{-1}$ supplémentaire : la seule relation nouvelle est $d_0^{\mathfrak{X}} d_0^{\mathfrak{X}} = d_0^{\mathfrak{X}} d_1^{\mathfrak{X}} : X_1 \rightarrow X_{-1}$. (Une telle donnée, avec un ensemble X_{-1} quelconque, est appelée une *ensemble simplicial augmenté*.)

Il reste maintenant à montrer que les relations simpliciales entre les faces et les dégénérescences du joint sont satisfaites. Soit $(x, y) \in X_p \times Y_q$. On vérifie la première relation simpliciale $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, pour $i < j$, en distinguant les trois cas suivants.

Lorsque $i < j \leq p$, on a $d_i d_j(x, y) = (d_i^x d_j^x(x), y) = (d_{j-1}^x d_i^x(x), y) = d_{j-1} d_i(x, y)$.

Lorsque $i \leq p < j$, on a $d_i d_j(x, y) = (d_i^x(x), d_{j-p-1}^y(y)) = d_{j-1} d_i(x, y)$.

Lorsque $p < i < j$, on a $d_i d_j(x, y) = (x, d_{i-p-1}^y d_{j-p-1}^y(y)) = (x, d_{j-1-p-1}^y d_{i-p-1}^y(y)) = d_{j-1} d_i(x, y)$.

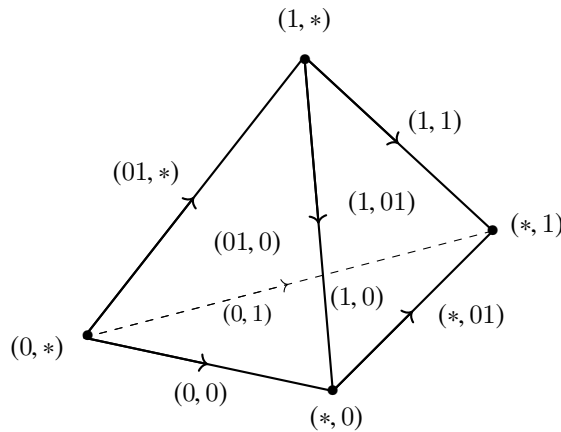
Les vérifications des autres relations simpliciales sont similaires.

- (4) Représenter $|\Delta^1 \star \Delta^1|$ et $|\Delta^0 \star \partial \Delta^2|$. Ces deux réalisations géométriques correspondent aux réalisations géométriques de quels ensembles simpliciaux classiques ?

Pour tout ensemble simplicial \mathfrak{X} , on sait qu'il existe une bijection continue depuis "la réalisation géométrique" $|\Delta^n|$ de ses simplexes non-dégénérés NX_n recollés avec les applications faces et sa réalisation géométrique $|\mathfrak{X}|$. La définition du joint de deux ensembles simpliciaux implique que les simplexes non-dégénérés de $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ sont les paires de simplexes non-dégénérés de \mathfrak{X} et de \mathfrak{Y} :

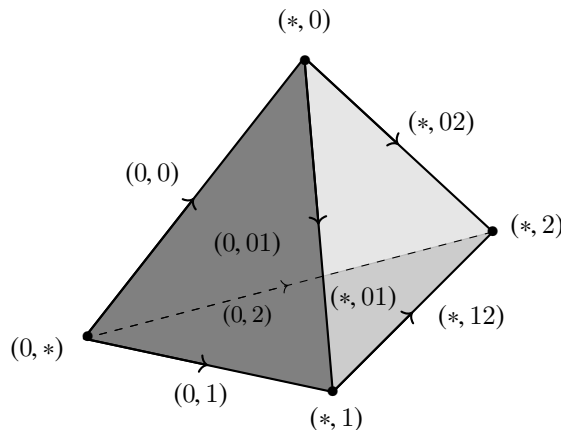
$$N(\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y})_n = \bigsqcup_{p+1+q=n} NX_p \times NY_q .$$

Dans le cas de $|\Delta^1 \star \Delta^1|$, les simplexes non-dégénérés sont les paires (x, y) , avec $x, y \in \{*, 0, 1, 01\}$, exceptée $(*, *)$. Les faces du joint donnent la représentation graphique suivante, qui correspond à celle du tétraèdre $|\Delta^3|$.



La face arrière de dimension 2 est indiquée par $(01, 1)$ et la face du dessous de dimension 2 est indiquée par $(0, 01)$. La face de dimension 3 est indiquée par $(01, 01)$.

Dans le cas de $|\Delta^0 \star \partial \Delta^2|$, les simplexes non-dégénérés sont les paires (x, y) , avec $x \in \{*, 0\}$ et $x, y \in \{*, 0, 1, 2, 01, 02, 12\}$, exceptée $(*, *)$. Les faces du joint donnent la représentation graphique suivante, qui correspond à celle du cornet $|\Lambda_0^3|$.



La face arrière de dimension 2 est indiquée par $(0, 02)$ et la face du dessous de dimension 2 est indiquée par $(0, 12)$.

(5) Soient deux entiers naturels $m, n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\Delta^m \star \Delta^n$?

Nous allons montrer que $\Delta^m \star \Delta^n \cong \Delta^{m+n+1}$, pour tout entier $m, n \in \mathbb{N}$. Les k -simplexes de $\Delta^m \star \Delta^n$ sont formés des paires de suites $(i_0 \cdots i_p, j_0 \cdots j_q)$, avec $k = p + 1 + q$, $0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_p \leq m$, $0 \leq j_0 \leq \cdots \leq j_q \leq n$ et en utilisant la convention $i_0 \cdots i_{-1} = *$ et $j_0 \cdots j_{-1} = *$. On considère les deux applications

$$\begin{aligned} (\Delta^m \star \Delta^n)_k &\rightarrow \Delta_k^{m+n+1} \\ (i_0 \cdots i_p, j_0 \cdots j_q) &\mapsto i_0 \cdots i_p (j_0 + m + 1) \cdots (j_q + m + 1) \\ (*, j_0 \cdots j_q) &\mapsto (j_0 + m + 1) \cdots (j_q + m + 1) \\ (i_0 \cdots i_k, *) &\mapsto i_0 \cdots i_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_k^{m+n+1} &\rightarrow (\Delta^m \star \Delta^n)_k \\ l_0 \cdots l_k &\mapsto (l_0 \cdots l_p, (l_{p+1} - m - 1) \cdots (l_k - m - 1)), \end{aligned}$$

où p est l'indice tel que $l_p \leq m$ et $l_{p+1} \geq m + 1$. Lorsque $l_k \leq m$, alors l'image de $l_0 \cdots l_k$ est $(l_0 \cdots l_k, *)$ et lorsque $l_0 \geq m + 1$, alors l'image de $l_0 \cdots l_k$ est $(*, (l_0 - m - 1) \cdots (l_k - m - 1))$. Ces deux applications sont clairement des bijections réciproques qui commutent aux faces et dégénérescences respectives.

Soit \mathfrak{X} un ensemble simplicial. Pour tout ensemble simplicial \mathfrak{Y} , on considère l'inclusion canonique $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ donnée explicitement par $X_n \rightarrow X_n \times \{*\}$. La catégorie \mathfrak{X}/sSet des *ensembles simpliciaux sous* \mathfrak{X} admet pour objets les morphismes d'ensembles simpliciaux $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ et pour morphismes entre $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ et $f' : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}'$ les morphismes $g : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Y}'$ tels que $g \circ f = f'$.

(6) Montrer que les deux foncteurs

$$\begin{array}{ccc} - \star \mathfrak{X} : \text{sSet} & \rightarrow & \mathfrak{X}/\text{sSet} \\ \mathfrak{Y} & \mapsto & \mathfrak{Y} \star \mathfrak{X} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \star - : \text{sSet} & \rightarrow & \mathfrak{X}/\text{sSet} \\ \mathfrak{Y} & \mapsto & \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \end{array}$$

sont cocontinus, c'est-à-dire qu'ils préservent les colimites.

De la même manière que les colimites d'ensembles simpliciaux sont données par les colimites ensemblistes au niveau des n -simplexes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la colimite d'un foncteur $G : D \rightarrow \mathfrak{X}/\text{sSet}$ est donnée par les colimites des foncteurs $G_n : D \rightarrow X_n/\text{Set}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $F : D \rightarrow \text{sSet}$ un foncteur. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'isomorphisme suivant d'ensembles sous X_n :

$$\begin{aligned} \left(\text{colim}_D F \right) \star \mathfrak{X} &= \bigsqcup_{p+q=n} \left(\text{colim}_D F \right)_p \times X_q \\ &\cong \{*\} \times X_n \sqcup \bigsqcup_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} \left(\text{colim}_D F \right)_p \times X_q \\ &\cong X_n \sqcup \bigsqcup_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} \left(\text{colim}_D F_p \right) \times X_q \\ &\cong X_n \sqcup \bigsqcup_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} \bigsqcup_{X_q} \left(\text{colim}_D F_p \right) \\ &\cong X_n \sqcup \text{colim}_D \left(\bigsqcup_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} \bigsqcup_{X_q} F_p \right) \\ &\cong X_n \sqcup \text{colim}_D \left(\bigsqcup_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0}} F_p \times X_q \right) \\ &\cong \text{colim}_D \left((F \star \mathfrak{X})_n \right), \end{aligned}$$

car les colimites commutent entre elles et où la dernière colimite est vue dans la catégorie X_n/Set .

REMARQUE. Les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} - \star \mathfrak{X} : \text{sSet} & \rightarrow & \text{sSet} \\ \mathfrak{Y} & \mapsto & \mathfrak{Y} \star \mathfrak{X} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \star - : \text{sSet} & \rightarrow & \text{sSet} \\ \mathfrak{Y} & \mapsto & \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \end{array}$$

ne préservent pas les colimites car ils envoient l'ensemble simplicial initial \emptyset sur \mathfrak{X} , qui n'est initial "que" dans la catégorie \mathfrak{X}/sSet des ensembles simpliciaux sous \mathfrak{X} .

- (7) Montrer que les deux propriétés données aux questions (5) et (6) caractérisent la notion de joint d'ensembles simpliciaux.

Grâce au théorème de densité, on sait que tout ensemble simplicial \mathfrak{X} est isomorphe à la colimite

$$\mathfrak{X} \cong \operatorname{colim}_{E(\mathfrak{X})} Y \Pi .$$

sur la catégorie $E(\mathfrak{X})$ de ses éléments, où $\Pi : E(\mathfrak{X}) \rightarrow \Delta$ est la projection canonique et où $Y : \Delta \rightarrow \mathbf{sSet}$ est le plongement de Yoneda. En appliquant cette propriété, la question (6) donne

$$\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \cong \mathfrak{X} \star \left(\operatorname{colim}_{E(\mathfrak{Y})} Y \Pi \right) \cong \operatorname{colim}_{E(\mathfrak{Y})} (\mathfrak{X} \star Y \Pi) ,$$

où la dernière colimite est celle du foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \star Y \Pi & : E(\mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{X}/\mathbf{sSet} \\ y \in Y_n & \mapsto (\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \star \Delta^n) . \end{aligned}$$

En appliquant à nouveau la question (6), on voit que $\mathfrak{X} \star \Delta^n$ peut se calculer grâce à la colimite suivante

$$\mathfrak{X} \star \Delta^n \cong \left(\operatorname{colim}_{E(\mathfrak{X})} Y \Pi \right) \star \Delta^n \cong \operatorname{colim}_{E(\mathfrak{X})} (Y \Pi \star \Delta^n) ,$$

où la dernière colimite est celle du foncteur

$$\begin{aligned} Y \Pi \star \Delta^n & : E(\mathfrak{X}) \rightarrow \Delta^n/\mathbf{sSet} \\ x \in X_m & \mapsto (\Delta^n \rightarrow \Delta^m \star \Delta^n \cong \Delta^{m+n+1}) , \end{aligned}$$

grâce à la question (5).

- (8) Montrer que le joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ de deux ∞ -catégories \mathfrak{X} et \mathfrak{Y} est une ∞ -catégorie.

Soient \mathfrak{X} et \mathfrak{Y} deux ∞ -catégories et soit un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : \Lambda_k^n \rightarrow \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$. On rappelle que $(\Lambda_k^n)_d$ est formé des suites $i_0 \cdots i_d$ vérifiant $0 \leq i_0 \leq \cdots \leq i_d \leq n$, $\{i_0, \dots, i_d\} \neq [n]$, et $\{i_0, \dots, i_d\} \neq \{0, \dots, \hat{k}, \dots, n\}$. On considère l'ensemble

$$J := \{i_0 \in [n] \mid f(i_0) \in X_0 \times \{*\}\}$$

des sommets du cornet Λ_k^n envoyés sur la copie de \mathfrak{X} dans le joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$. On affirme que J est un intervalle initial de $[n]$, c'est-à-dire qu'il est de la forme $J = [j]$, pour $-1 \leq j \leq n$. Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas : il existerait alors un entier $0 \leq i \leq n-1$ tel que $f(i) \in \{*\} \times Y_0$ et $f(i+1) \in X_0 \times \{*\}$. Le 1-simplexe $i(i+1)$ de Λ_k^n est envoyé par f dans $X_1 \times \{*\}$, $X_0 \times Y_0$ ou $\{*\} \times Y_1$. Comme f est un morphisme d'ensembles simpliciaux, il doit commuter aux faces respectives. Dans les trois cas précédents, ceci est impossible.

Si $j = -1$, cela signifie que $J = \emptyset$ et que tous les sommets du cornet Λ_k^n sont envoyés dans la copie de \mathfrak{Y} à l'intérieur du joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$. La définition du joint et l'argument ci-dessus montrent qu'alors le morphisme f se factorise par \mathfrak{Y} :

$$f : \Lambda_k^n \rightarrow \mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} .$$

Comme \mathfrak{Y} est une ∞ -catégorie, il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array} .$$

Le cas $j = n$ se traite de manière similaire en remplaçant \mathfrak{Y} par \mathfrak{X} .

Lorsque $0 \leq j \leq n-1$, on considère l'inclusion naturelle $\Delta^j \hookrightarrow \Lambda_k^n$. Les mêmes arguments que précédemment montrent qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $f_1 : \Delta^j \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

(i)
$$\begin{array}{ccc} \Delta^j & \hookrightarrow & \Lambda_k^n \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f \\ \mathfrak{X} & \hookrightarrow & \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} . \end{array}$$

Le décalage $i \mapsto i + j + 1$ induit une inclusion $\Delta^{n-j-1} \hookrightarrow \Lambda_k^n$. De la même manière que précédemment, il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $f_2 : \Delta^{n-j-1} \rightarrow \mathfrak{Y}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$(ii) \quad \begin{array}{ccc} \Delta^{n-j-1} & \hookrightarrow & \Lambda_k^n \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f \\ \mathfrak{Y} & \hookrightarrow & \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} . \end{array}$$

On peut alors remplir le cornet initial avec ces données de la manière suivante

$$(iii) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{f} & \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \\ \downarrow & & \uparrow f_1 \star f_2 \\ \Delta^n & \xrightarrow{\cong} & \Delta^j \star \Delta^{n-j-1} . \end{array}$$

où le morphisme du bas est celui donné à la question (5). Il reste à vérifier que ce dernier diagramme est commutatif. Le lemme de Yoneda implique que la commutativité du diagramme (i) est équivalente à $f(0 \cdots j) = (x, *)$, avec $x = f_1(0 \cdots j) \in X_j$ et que la commutativité du diagramme (ii) est équivalente à $f((j+1) \cdots n) = (*, y)$, avec $y = f_2(0 \cdots n-j-1) \in Y_{n-j-1}$. La description du cornet Λ_k^n comme coégalisateur de n simplexes standards de dimension $n-1$ et le lemme de Yoneda montrent qu'il suffit de vérifier la commutativité du diagramme (iii) pour les simplexes $0 \cdots \widehat{l} \cdots n \in \Lambda_k^n$, pour tout $l \neq k$. Traitons en détail le cas $j < l$, l'autre cas étant similaire. L'image de $0 \cdots \widehat{l} \cdots n$ par la composée de trois morphismes du bas est égale à $(x, d_{l-j-1}^{\mathfrak{Y}}(y))$. Notons $(u, v) := f(0 \cdots \widehat{l} \cdots n) \in X_p \times Y_q$, avec $p+1+q = n-1$. Comme f est un morphisme d'ensembles simpliciaux, on a

$$(x, *) = f(0 \cdots j) = f(d_{j+1}^{n-j-1}(0 \cdots \widehat{l} \cdots n)) = d_{j+1}^{n-j-1}(u, v),$$

ce qui implique $q \leq n-j-2$. De la même manière, on a

$$(*, d_{l-j-1}^{\mathfrak{Y}}(y)) = f((j+1) \cdots \widehat{l} \cdots n) = f(d_0^{j+1}(0 \cdots \widehat{l} \cdots n)) = d_0^{j+1}(u, v),$$

ce qui implique $p \leq j$. Comme $p+1+q = n-1$, cela donne $p = j$ et $q = n-j-2$. Au final, on obtient

$$d_{j+1}^{n-j-1}(u, v) = (u, *) = (x, *) \quad \text{et} \quad d_0^{j+1}(u, v) = (*, v) = (*, y),$$

ce qui conclut la démonstration.

(9) Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux petites catégories. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'ensembles simpliciaux

$$\mathfrak{N}(\mathcal{C} \star \mathcal{D}) \cong (\mathfrak{N}\mathcal{C}) \star (\mathfrak{N}\mathcal{D}),$$

où $\mathfrak{N} : \text{Cat} \rightarrow \text{sSet}$ est le foncteur nerf.

On considère la bijection

$$\mathfrak{N}(\mathcal{C} \star \mathcal{D})_n \ni \left(c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} c_{p-1} \xrightarrow{f_p} c_p \rightarrow d_0 \xrightarrow{g_1} d_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_{q-1}} d_{q-1} \xrightarrow{g_p} d_q \right) \mapsto \left(c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{p-1}} c_{p-1} \xrightarrow{f_p} c_p, d_0 \xrightarrow{g_1} d_1 \xrightarrow{g_2} \cdots \xrightarrow{g_{q-1}} d_{q-1} \xrightarrow{g_p} d_q \right) \in ((\mathfrak{N}\mathcal{C}) \star (\mathfrak{N}\mathcal{D}))_n,$$

avec $p+1+q = n$, qui préserve les faces et dégénérescences respectives.

(10) Soit \mathfrak{Y} un ensemble simplicial. Montrer que le foncteur $- \star \mathfrak{Y} : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ admet un adjoint à droite, que l'on notera $\mathfrak{Cone} : (f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}) \mapsto \mathfrak{Cone}(f)$:

$$- \star \mathfrak{Y} : \text{sSet} \xrightarrow{\perp} \mathfrak{Y}/\text{sSet} : \mathfrak{Cone},$$

et décrire explicitement les n -simplexes $\mathfrak{Cone}(f)_n$ ce dernier.

Comme la catégorie sSet des ensembles simpliciaux est localement petite et cocomplète, il en va de même de la catégorie \mathfrak{Y}/sSet des ensembles simpliciaux sous \mathfrak{Y} . Nous avons montré à la question (6) que le foncteur $- \star \mathfrak{Y}$ est cocontinu, il est donc caractérisé par les images $\Delta^n \star \mathfrak{Y}$ des simplexes standard Δ^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par théorème, on sait donc que le foncteur $- \star \mathfrak{Y}$ admet un adjoint à droite qui est le foncteur de représentation simpliciale associée à l'objet cosimplicial $\mathfrak{Y} \rightarrow \Delta^\bullet \star \mathfrak{Y}$:

$$\mathfrak{Cone} : \mathfrak{Y}/\text{sSet} \rightarrow \text{sSet} \\ f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X} \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{Y}/\text{sSet}}(\mathfrak{Y} \rightarrow \Delta^\bullet \star \mathfrak{Y}, f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}).$$

Un n -simplexe du cone $\mathbb{C}\text{one}(f)$ d'un morphisme $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ d'ensembles simpliciaux est un morphisme $g : \Delta^n \star \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que sa restriction à \mathfrak{Y} soit égale à f :

$$f : \mathfrak{Y} \hookrightarrow \Delta^n \star \mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{X} .$$

(11) Soit $F : D \rightarrow E$ un foncteur. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'ensembles simpliciaux

$$\mathfrak{N}\text{Cone}(F) \cong \mathbb{C}\text{one}(\mathfrak{N}F) .$$

On a l'isomorphisme suivant entre les n -simplexes

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\text{one}(\mathfrak{N}F)_n &\cong \text{Hom}_{\mathfrak{N}D/\mathfrak{s}\text{Set}}(\mathfrak{N}D \rightarrow \Delta^n \star \mathfrak{N}D, \mathfrak{N}F : \mathfrak{N}D \rightarrow \mathfrak{N}E) , && \text{par la question (10),} \\ &\cong \text{Hom}_{\mathfrak{N}D/\mathfrak{s}\text{Set}}(\mathfrak{N}D \rightarrow \mathfrak{N}(\text{Cat}[n] \star D), \mathfrak{N}F : \mathfrak{N}D \rightarrow \mathfrak{N}E) , && \text{par la question (9),} \\ &\cong \text{Hom}_{D/\text{Cat}}(D \rightarrow \text{Cat}[n] \star D, F : D \rightarrow E) , && \text{car le nerf est plein et fidèle,} \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}}(\text{Cat}[n], \mathbb{C}\text{one}(F)) , && \text{par la question (2),} \\ &\cong (\mathfrak{N}\text{Cone}(F))_n , && \text{par la définition du nerf .} \end{aligned}$$

dont on voit qu'il préserve les faces et dégénérescences respectives car $\mathfrak{N}(\text{Cat}[\bullet]) \cong \Delta^\bullet$ est un isomorphisme d'ensembles simpliciaux cosimpliciaux.

REMARQUE. Cet exercice montre que la notion de joint d'ensembles simpliciaux étend aux ∞ -catégories la notion de joint des catégories via le foncteur nerf. Ceci permet de définir les notions de *limites* et de *colimites* dans les ∞ -catégories comme objets *terminaux* et *initiaux* du cone simplicial d'un morphisme. Les définitions de ces deux dernières notions ne sont pas absolument triviales ; elles se formulent à l'aide de la théorie homotopique des ensembles simpliciaux (fibrations acycliques). Au passage, remarquez qu'avec le joint \star , on peut faire un cone $\Delta^0 \star \mathfrak{X}$, ce qui est plutôt inhabituel, l'inverse étant plus "commun".