Université Sorbonne Paris Nord

MASTER 2 : THÉORIES HOMOTOPIQUES 4 JANVIER 2022

EXAMEN

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. Seuls les notes de cours et les documents papier sont autorisés. Tout le reste, dont les appareils électroniques, est interdit.

Exercice 1 (Groupe fondamental de SO(3)). On rappelle que l'espace euclidien canonique $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ est isomorphe à l'espace euclidien

$$\mathfrak{h} := \left\{ M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid M = -{}^t\overline{M}\,, \mathrm{tr}\, M = 0 \right\}$$

des matrices anti-hermitiennes de trace nulle muni du produit scalaire $< M, N > := \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(M^t\overline{N}\right)$, via l'application $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}$. Le *groupe spécial unitaire* est défini par

$$\mathrm{SU}(2) := \left\{ M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid M^t\overline{M} = I_2\,, \det M = 1 \right\}\ ,$$

où I_2 est la matrice identité ; il admet une topologie induite de celle des matrices.

(1) Montrer que l'action par conjugaison $(M, H) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathfrak{h} \mapsto MHM^{-1} \in \mathfrak{h}$ définit un morphisme continu de groupes $\Phi \colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

(2) Calculer le groupe fondamental de $\mathrm{SO}(3)$.
INDICATION. On pourra admettre que le morphisme $\Phi \colon \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3)$ est surjectif.

(3) L'espace topologique SO(3) est-il homotopiquement équivalent à $S^1 \times S^2$?

(4) Montrer que la variété S^2 n'admet pas de champ de vecteurs tangents continu qui ne s'annulent jamais.

Exercice 2 (CW-complexe relatif). Soit (X, A) un CW-complexe relatif.

(1) Soit Y un espace topologique connexe par arcs tel que $\pi_{n-1}(Y) \cong 0$, pour tout $n \geqslant 1$ tel que $X \backslash A$ a une cellule en dimension n . Montrer que toute application continue $f : A \to Y$ s'étend en une application continue $F : X \to Y$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\exists F"'] & \end{tikzcd}.$$

(2) Montrer que X se rétracte sur A lorsque A est contractible.

(3) Montrer que la projection canonique $X \twoheadrightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie lorsque A est contractible.
INDICATION. On pourra utiliser le fait que l'inclusion $A \rightarrowtail X$ est une cofibration.

Exercice 3 (Joint). Le *joint* de deux catégories C, D est la catégorie $\mathsf{C} \star \mathsf{D}$ dont les objets

$$\mathrm{Obj}(\mathsf{C} \star \mathsf{D}) := \mathrm{Obj}(\mathsf{C}) \sqcup \mathrm{Obj}(\mathsf{D})$$

sont ceux de C et de D et dont les morphismes sont les suivants :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{D}}(x, y) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)\,, & \text{pour } x, y \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})\,, \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(x, y)\,, & \text{pour } x, y \in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})\,, \\ \{*\}\,, & \text{pour } x \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})\,, y \in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})\,, \\ \emptyset\,, & \text{pour } x \in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})\,, y \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})\,. \end{cases}$$

La composition des morphismes est induite par celle de C et de D .

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la catégorie $\mathsf{Cat}[n] \coloneqq \{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$ associée à l'ensemble partiellement ordonné $[n] \coloneqq \{0 < 1 < \cdots < n\}$. Que vaut $\mathsf{Cat}[m] \star \mathsf{Cat}[n]$?

On note Cat la catégorie des petites catégories et on se fixe D une petite catégorie. On considère la catégorie D/Cat des *catégories sous* D dont les objets sont les foncteurs de $\mathrm{F} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ de D vers une catégorie C et dont les morphismes entre $\mathrm{F} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ et $\mathrm{F}' : \mathsf{D} \to \mathsf{C}'$ sont les foncteurs $\mathrm{G} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ tels que $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} = \mathrm{F}'$. Comme la catégorie D est une sous-catégorie pleine du joint $\mathsf{C} \star \mathsf{D}$, ce dernier est canoniquement une catégorie sous D via inclusion $\mathsf{D} \to \mathsf{C} \star \mathsf{D}$.

(2) Montrer que le foncteur $- \star \mathsf{D} : \mathsf{C} \mapsto \mathsf{C} \star \mathsf{D}$ est adjoint à gauche du foncteur $\mathsf{Cone} : (\mathrm{F} : \mathsf{D} \to \mathsf{C}) \mapsto \mathsf{Cone}(\mathrm{F})$:
$$- \star \mathsf{D} \quad : \quad \mathsf{Cat} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathsf{D}/\mathsf{Cat} \quad : \quad \mathsf{Cone} \ .$$

Le *joint* $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ de deux ensembles simpliciaux $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ est défini par
$$(\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y})_n \coloneqq \bigsqcup_{p+1+q=n} X_p \times Y_q \ ,$$
avec la convention $X_{-1} = Y_{-1} \coloneqq \{*\}$, et il est muni d'applications faces et dégénérescences dont les images de $(x, y) \in X_p \times Y_q$ sont données respectivement par
$$d_i(x,y) \coloneqq \begin{cases} \left(d_i^{\mathfrak{X}}(x), y\right) , & \text{pour } i \leqslant p \ , \\ \left(x, d_{i-p-1}^{\mathfrak{Y}}(y)\right) , & \text{pour } i \geqslant p+1 \ , \end{cases} \quad \text{et} \quad s_i(x,y) \coloneqq \begin{cases} \left(s_i^{\mathfrak{X}}(x), y\right) , & \text{pour } i \leqslant p \ , \\ \left(x, s_{i-p-1}^{\mathfrak{Y}}(y)\right) , & \text{pour } i \geqslant p+1 \ , \end{cases}$$
avec la convention $d_0^{\mathfrak{X}} : X_0 \twoheadrightarrow X_{-1} = \{*\}$ et $d_0^{\mathfrak{Y}} : Y_0 \twoheadrightarrow Y_{-1} = \{*\}$.

(3) Montrer que le joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ forme un ensemble simplicial.

(4) Représenter $|\Delta^1 \star \Delta^1|$ et $|\Delta^0 \star \partial\Delta^2|$. Ces deux réalisations géométriques correspondent aux réalisations géométriques de quels ensembles simpliciaux classiques ?

(5) Soient deux entiers naturels $m, n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\Delta^m \star \Delta^n$?

Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble simplicial. Pour tout ensemble simplicial $\mathfrak{Y}$, on considère l'inclusion canonique $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ donnée explicitement par $X_n \to X_n \times \{*\}$. La catégorie $\mathfrak{X}/\mathsf{sSet}$ des *ensembles simpliciaux sous* $\mathfrak{X}$ admet pour objets les morphismes d'ensembles simpliciaux $\mathrm{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et pour morphismes entre $\mathrm{f} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $\mathrm{f}' : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}'$ les morphismes $\mathrm{g} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}'$ tels que $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}'$.

(6) Montrer que les deux foncteurs
$$\begin{array}{cccc} - \star \mathfrak{X} \ : & \mathsf{sSet} & \to & \mathfrak{X}/\mathsf{sSet} \\ & \mathfrak{Y} & \mapsto & \mathfrak{Y} \star \mathfrak{X} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{X} \star - \ : & \mathsf{sSet} & \to & \mathfrak{X}/\mathsf{sSet} \\ & \mathfrak{Y} & \mapsto & \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y} \end{array}$$
sont cocontinus, c'est-à-dire qu'ils préservent les colimites.

(7) Montrer que les deux propriétés données aux questions (5) et (6) caractérisent la notion de joint d'ensembles simpliciaux.

(8) Montrer que le joint $\mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ de deux ∞-catégories $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ est une ∞-catégorie.

(9) Soient C et D deux petites catégories. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'ensembles simpliciaux
$$\mathfrak{N}(\mathsf{C} \star \mathsf{D}) \cong (\mathfrak{N}\mathsf{C}) \star (\mathfrak{N}\mathsf{D}) \ ,$$
où $\mathfrak{N} : \mathsf{Cat} \to \mathsf{sSet}$ est le foncteur nerf.

(10) Soit $\mathfrak{Y}$ un ensemble simplicial. Montrer que le foncteur $- \star \mathfrak{Y} : \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X} \star \mathfrak{Y}$ admet un adjoint à droite, que l'on notera $\mathfrak{Cone} : (\mathrm{f} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}) \mapsto \mathfrak{Cone}(\mathrm{f})$:
$$- \star \mathfrak{Y} \quad : \quad \mathsf{sSet} \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathfrak{Y}/\mathsf{sSet} \quad : \quad \mathfrak{Cone} \ ,$$
et décrire explicitement les n-simplexes $\mathfrak{Cone}(\mathrm{f})_n$ ce dernier.

(11) Soit $\mathrm{F} : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ un foncteur. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'ensembles simpliciaux
$$\mathfrak{N}\mathsf{Cone}(\mathrm{F}) \cong \mathfrak{Cone}(\mathfrak{N}\mathrm{F}) \ .$$