CORRIGÉ

EXAMEN DU MERCREDI 19 DÉCEMBRE 2018

✍

Exercice 1 (Type d'homotopie d'un produit).

(1) Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, il existe une bijection canonique

$$\pi_n\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0) ,$$

qui est un isomorphisme de groupes pour $n \geqslant 1$.

Il suffit de considérer le fibré trivial

$$(X, x_0) \to \big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \to (Y, y_0)$$

et de lui appliquer la longue suite exacte d'homotopie.

On rappelle que *l'espace projectif réel* est défini par

$$\mathbb{P}^d\mathbb{R} := \Big\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \backslash \{0\}\Big\} / \sim ,$$

où la relation d'équivalence est donnée par $x \sim \lambda.x$, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

(2) Montrer que, pour tout $d \geqslant 1$, il existe un revêtement de la forme

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{S}^d \to \mathbb{P}^d\mathbb{R} .$$

On utilise la définition de la sphère S^d donnée par

$$\mathrm{S}^d = \Big\{(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \ \mid \ x_1^2 + \cdots + x_{d+1}^2 = 1\Big\}$$

A chaque fois, seuls les deux éléments $(x_1, \ldots, x_{d+1})$ et $(-x_1, \ldots, -x_{d+1})$ donnent le même élément via la composée

$$\mathrm{S}^d \rightarrowtail \mathbb{R}^{d+1} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^d\mathbb{R} .$$

---

(3) Comparer les groupes d'homotopie $\pi_n\left(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}\right)$ et $\pi_n\left(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La question (1) est la longue suite exacte d'homotopie associée au revêtement de la question (2) donnent

$$\begin{aligned}
&\pi_0\left(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}\right) \cong \pi_0\left(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}\right) \cong \{*\} ,\\
&\pi_1\left(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}\right) \cong \pi_1\left(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}\right) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ , and}\\
&\pi_n\left(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}\right) \cong \pi_n\left(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}\right) \cong \pi_n\left(\mathrm{S}^2\right) \times \pi_n\left(\mathrm{S}^3\right) \text{ , for } n \geqslant 2 .
\end{aligned}$$

---

(4) Est-ce que les deux espaces $S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $S^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ sont homotopiquement équivalents ?

INDICATION. On pourra utiliser les calculs suivants des groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, & \text{pour } * = 0, n\,, \\ 0\,, & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

$$\mathrm{H}_*(\mathbb{P}^3\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, & \text{pour } * = 0, 1, 2, 3\,, \\ 0\,, & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

$$\mathrm{H}_*(\mathbb{P}^2\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, & \text{pour } * = 0, 1, 2\,, \\ 0\,, & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

L'homologie est un invariant homotopique, donc si $S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $S^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ étaient homotopiquement équivalents, ils auraient des groupes d'homologie isomorphes. Or, la formule de Künneth

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{S}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{H}_*(\mathbb{P}^3\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$
$$\mathrm{H}_*(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{S}^3, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{H}_*(\mathbb{P}^2\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

donne

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \neq \mathrm{H}_2(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

---

(5) Qu'est-ce que cet exemple nous dit par rapport au théorème de Whitehead ?

Le théorème de Whitehead nous dit que deux CW complexes, comme $S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $S^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, reliés par une application continue qui est une équivalence d'homotopie faible, sont homotopiquement équivalents. L'exemple donné ici montre que l'hypothèse qu'il existe une application continue dans l'énoncé de ce théorème est essentielle.

✍

Exercice 2 (Compatibilité entre la suite de fibre et la suite de cofibre).

(1) Décrire l'unité $\eta : X \to \Omega\Sigma X$ et la counité $\varepsilon : \Sigma\Omega X \to X$ de l'adjonction Σ-Ω dans la catégorie des espaces topologiques pointés.

Cette exercice est "corrigé" au chapitre 8 section 7 du livre de Peter J. May "A concise course in algebraic topology".

---

(2) Soit $f : X \to Y$ une application continue pointée. Montrer que la formule suivante

$$(x, \varphi) \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & \text{for } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\,, \\ (x, 2(1-t) & \text{for } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\,, \end{cases}$$

définit une application continue pointée

$$\tilde{\eta} : \mathrm{Path}(f) \to \Omega\mathrm{Cone}(f)\,.$$

(3) Décrire l'application adjointe

$$\tilde{\varepsilon} : \Sigma\mathrm{Path}(f) \to \mathrm{Cone}(f)\,.$$

(4) Montrer que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\Omega\mathrm{Path}(f) \arrow[r, "\Sigma\Omega f^1"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\Omega X \arrow[r, "\Sigma\Omega f"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\Omega Y \arrow[r, "\Sigma i(f)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\mathrm{Path}(f) \arrow[r, "\Sigma f_1"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
\Omega Y \arrow[r, "i(f)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Path}(f) \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "\tilde{\eta}"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"] & Y \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "p(f)"] \arrow[d, "\eta"] & \Sigma X \\
\Omega Y \arrow[r, "i(f)"] & \Omega\mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "f^1"] & \Omega\Sigma X \arrow[r, "f"] & \Omega\Sigma Y \arrow[r, "f_1"] & \Omega\Sigma\mathrm{Cone}(f) &
\end{tikzcd}$$

Exercice 3 (Espaces d'Eilenberg-MacLane simpliciaux).
Soit $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe qui est supposé abélien lorsque $n \geqslant 2$. Un *espace d'Eilenberg–MacLane* de type $K(G, n)$ est un espace topologique connexe X tel que

$$\pi_k(X) \cong \begin{cases} G\,, & \text{pour } k = n\,, \\ 0\,, & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

(1) Donner un exemple d'espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$, de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, de type $K(\mathbb{Z}^2, 1)$, et de type $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Le cercle S^1 est un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$.
L'espace projectif réel $\mathbb{P}^\infty\mathbb{R}$ est un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.
Le tore cercle $T = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ est un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}^2, 1)$.
L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ est un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 2)$.

On rappelle que le *nerf* $\mathrm{B}G$ d'un groupe $(G, \cdot, \mathbb{1})$ est un ensemble simplicial défini par

$$(\mathrm{B}G)_n \coloneqq G^{\times n}$$

avec pour faces et dégénérescences

$$\begin{aligned}
d_i[g_1|\dots|g_n] &\coloneqq \begin{cases} [g_2|\dots|g_n]\,, & \text{pour } i = 0\,, \\ [g_1|\dots|g_i g_{i+1}|\dots|g_n]\,, & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1\,, \\ [g_1|\dots|g_{n-1}]\,, & \text{pour } i = n\,, \end{cases} \\
s_i[g_1|\dots|g_n] &\coloneqq [g_1|\dots|g_i|\mathbb{1}|g_{i+1}|\dots|g_n] \quad \text{et} \quad s_0(*) \coloneqq [\mathbb{1}]\,.
\end{aligned}$$

(2) Calculer les groupes d'homotopie simpliciaux du nerf $\mathrm{B}G$.

La définition des groupes d'homotopie simpliciaux donne directement

$$\pi_0(\mathrm{B}G) \cong \{*\},\ \pi_1(\mathrm{B}G) \cong G,\ \text{et } \pi_n(\mathrm{B}G) \cong 0,\ \text{pour } n \geqslant 2\,.$$

---

(3) Montrer que $|\mathrm{B}G|$ est un CW-complexe d'Eilenberg–MacLane de type $K(G, 1)$.

On sait que la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un CW-complex. On a aussi un isomorphisme $\pi_n(|\mathrm{B}G|) \cong \pi_n(\mathrm{B}G)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut donc avec le résultat de la question précédente.

À chaque groupe $(G, \cdot, \mathbb{1})$, on associe la collection d'ensembles $(\mathrm{E}G)_n \coloneqq G^{n+1}$ munis des faces et dégénérescences suivantes

$$\mathrm{d}_i(g_0, \dots, g_n) \coloneqq (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{s}_i(g_0, \dots, g_n) \coloneqq (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n)\,.$$

On note cette donnée par $\mathrm{E}G$.

(4) **Montrer que $\mathrm{E}G$ définit un foncteur de la catégorie des groupes vers celle des ensembles simpliciaux.**

Ceci se démontre facilement à la main : on vérifie rapidement les relations simpliciales (du même type que les simplexes standards Δ^n) et les axiomes d'un foncteur. On peut aussi voir que cette donnée correspond à l'ensemble simplicial défini par

$$(\mathrm{E}G)_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ens}}([n], G)\ .$$

Une autre manière consiste à remarquer que $\mathrm{E}G$ est le nerf de la catégorie dont les objets sont les éléments de G avec un seul morphisme entre deux objets.

---

(5) **Montrer que $\mathrm{E}G$ admet un adjoint à gauche et le décrire.**

On commence par remarquer que le foncteur $\mathrm{E}G$ est représenté par le groupe cosimplicial dont le n-simplexe est le groupe libre $\mathrm{F}([n])$ à $n+1$ générateur, c'est-à-dire

$$\mathrm{E}G \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gp}}(\mathrm{F}([\bullet]), G)\ .$$

Ce dernier admet donc, par théorème du cours, un adjoint un gauche L donné par une extension de Kan à gauche le long du plongement de Yoneda. Comme le foncteur groupe libre est aussi un adjoint à gauche, il préserve les colimites, d'où

$$\mathrm{L}(\mathfrak{X}) \cong \mathrm{F}\left(\mathrm{colim}_{\mathsf{E}(\mathfrak{X})}\, [\Pi]\right)\ .$$

---

(6) **Montrer que $\mathrm{E}G$ est contractible, c'est-à-dire qu'il existe deux applications simpliciales $f : \mathrm{E}G \to *$ et $g : * \to \mathrm{E}G$ telles que $fg \sim \mathrm{id}_*$ et $gf \sim \mathrm{id}_{\mathrm{E}G}$.**

Il y a une unique application f possible. Pour l'application g, on la définit par $g_n(*) := (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})$. On a alors immédiatement que $fg = \mathrm{id}_*$. Pour montrer que $gf \sim \mathrm{id}_{\mathrm{E}G}$, on considère l'application $H : \mathrm{E}G \times \Delta^1 \to \mathrm{E}G$ définie par

$$H\big((g_0, \ldots, g_n), (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i+1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1})\big) := (g_0, \ldots, g_i, \mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})\ .$$

On vérifie qu'il s'agit d'une application simpliciale telle que

$$H\big(-, (0, \ldots, 0)\big) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}G} \quad \text{et} \quad H\big(-, (1, \ldots, 1)\big) = gf\ .$$

---

(7) **Tout n-simplexe $(\mathrm{E}G)_n = G^{n+1}$ admet une action (à gauche) du groupe G par la formule**

$$g.(g_0, \ldots, g_n) := (gg_0, \ldots, gg_n)\ .$$

Montrer que cela munit $\mathrm{E}G$ d'une structure de G-module simplicial.

Il suffit de constater que les faces et dégénérescences commutent à l'action de G.

---

(8) **On considère les orbites sous ces actions avec les faces et dégénérescences induites**

$$\mathrm{E}G/G := \left((\mathrm{E}G)_n/G = G^{n+1}/G, \bar{\mathrm{d}}_i, \bar{\mathrm{s}}_i\right)\ .$$

Montrer que $\mathrm{E}G/G$ est un ensemble simplicial isomorphe au nerf $\mathrm{B}G$.

La question précédente montre que les faces et dégénérescences induites sont bien définies. Comme elles viennent d'applications qui vérifient les relations simpliciales, elles munissent $\mathrm{E}G/G$ d'une structure d'ensemble simplicial. (Ce résultat est aussi une conséquence directe de ce qui suit). A n fixé, les deux applications suivantes

$$\mathrm{B}G \ni [g_1|\ldots|g_n] \mapsto \overline{(1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2\cdots g_n)} \in \mathrm{E}G/G \quad \text{et}$$

$$\mathrm{E}G \ni \overline{(g_0, g_1, \ldots, g_n)} \mapsto [g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|\ldots|g_{n-1}^{-1}g_n] \in \mathrm{E}G/G$$

sont des bijections inverses l'un de l'autre. On remarque que, dans leur ensemble, elle commutent aux différentes faces et dégénérescences.

---

(9) **Montrer que l'application simpliciale $\mathrm{E}G \twoheadrightarrow \mathrm{E}G/G \cong \mathrm{B}G$ est un fibration de Kan.**

TBC

---

(10) **Calculer la fibre de cette fibration $\mathrm{E}G \twoheadrightarrow \mathrm{B}G$.**

Si on note cette fibration par $p : \mathrm{E}G \twoheadrightarrow \mathrm{B}G$, alors $p_n^{-1}(\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1}) = \{(g, \ldots, g) \,|\, g \in G\}$, c'est-à-dire $p^{-1}(*) = \mathrm{cst}(G)$, l'ensemble simplicial constant G.

---

(11) **Donner une autre démonstration du fait que $|\mathrm{B}G|$ est un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(G, 1)$.**

On utilise la longue suite exacte des groupes d'homotopie simpliciaux associée à la fibration $\mathrm{cst}(G) \to \mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$. Comme $\mathrm{E}G$ est contractible, alors tous ses groupes d'homotopie simpliciaux sont triviaux. On peut facilement voir que $\pi_0\big(\mathrm{cst}(G)\big) \cong G$ et $\pi_n\big(\mathrm{cst}(G)\big) \cong 0$. D'où, on déduit que

$$\pi_0\big(\mathrm{B}G\big) \cong \{*\}, \ \pi_1\big(\mathrm{B}G\big) \cong G, \ \text{ et } \pi_n\big(\mathrm{B}G\big) \cong 0, \ \text{ pour } n \geqslant 2 \ .$$

Et on conclut comme à la question (3).
