Opérades en Algèbre, Géométrie et Physique-Mathématique

Bruno VALLETTE

(Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn et Université de Nice Sophia-Antipolis)

Colloquium Algèbre-Géométrie-Logique

23 novembre 2009

Plan

Plan

Introduction

- **Opérade**=Opérations + Monade
- **Théorie des représentations :** V espace vectoriel

$$G \to \mathrm{Hom}(V,V) \quad \text{ou} \quad A \to \mathrm{Hom}(V,V)$$

avec G groupe ou A algèbre associative

$\mathrm{Hom}(V,V)$: ensemble des opérations linéaires agissant sur V

- **Théorie des représentations "multilinéaires" :**

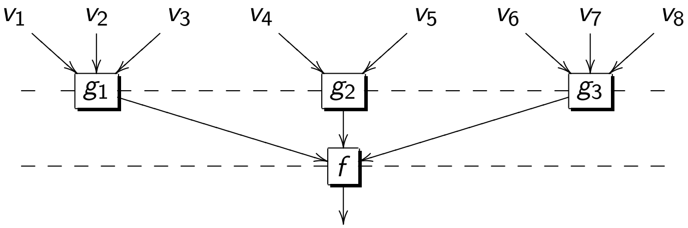
$$\mathrm{End}_V := \{Hom(V^{\otimes n}, V)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

ensemble de toutes les opérations multilinéaires agissant sur V

$$??? \to \mathrm{End}_V$$

Opérade des endomorphismes

- **Collection :** $\mathrm{End}_V := \{Hom(V^{\otimes n}, V)\}_{n \in \mathbb{N}}$
- **Compositions :**
  $Hom(V^{\otimes k}, V) \otimes Hom(V^{\otimes i_1}, V) \otimes \cdots \otimes Hom(V^{\otimes i_k}, V) \to Hom(V^{\otimes i_1 + \cdots + i_k}, V)$
  $(f; g_1, \ldots, g_k) \mapsto f \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k)$



Associatives et unitaires

Ceci est une opérade

Définition : Opérade non symétrique

Définition

- **Collection** : $P := \{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $P(n)$: espace vectoriel
- $$(\mathbf{P} \circ \mathbf{Q})(\mathbf{n}) := \bigoplus_{k\geq 1,\ n=i_1+\cdots+i_k} P(k)\otimes Q(i_1)\otimes\cdots\otimes Q(i_k)$$

Proposition

La catégorie des collections $(Collection, \circ, I=(0,\mathbb{K},0,\ldots))$ *est une catégorie monoïdale.*

Définition

Une **opérade non symétrique** $\mathcal{P}$ est un monoïde $\mathcal{P}=(P,\gamma,\eta)$ dans cette catégorie monoïdale.

Définition : Opérade

- **Composition :** $\gamma : P \circ P \to P$ associative

$$\begin{tikzcd}
(P \circ P) \circ P \cong P \circ (P \circ P) \arrow[r, "\mathrm{Id}_P \circ \gamma"] \arrow[d, "\gamma \circ \mathrm{Id}_P"] & P \circ P \arrow[d, "\gamma"] \\
P \circ P \arrow[r, "\gamma"] & P
\end{tikzcd}$$

- **Unité :** $\eta : I \to P$

$$\begin{tikzcd}
I \circ P \arrow[r, "\eta \circ \mathrm{Id}_P"] \arrow[dr, "\cong"] & P \circ P \arrow[d, "\gamma"] & P \circ I \arrow[l, "\mathrm{Id}_P \circ \eta"'] \arrow[dl, "\cong"'] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

Exemples :
End_V, A algèbre associative unitaire $\Leftrightarrow P = (0, A, 0, \ldots)$ opérade concentrée en arité 1.

$\mathcal{P}$-algèbres

Définition (Morphisme d'opérades)

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$: famille d'applications linéaires $f_n : P(n) \to Q(n)$ telles que

$$\begin{tikzcd} P \circ P \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{P}}"] \arrow[d, "f \circ f"] & P \arrow[d, "f"] \\ Q \circ Q \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{Q}}"] & Q \end{tikzcd}$$

Définition ($\mathcal{P}$-algèbre)

Une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur V est un morphisme d'opérades

$$\mathcal{P} \to \mathrm{End}_V .$$

C'est une représentation de $\mathcal{P}$.

Exemples As et uAs

- **Algèbres associatives :** $\mu : V^{\otimes 2} \to V$,

$$\mu(\mu(a,b),c) = \mu(a,\mu(b,c))$$

Posons $As(0) = 0, As(1) = \mathbb{K}, As(2) = \mathbb{K}, As(3) = \mathbb{K}, \ldots$

- **Composition opéradique :**

$$\gamma : As(k) \otimes As(i_1) \otimes \cdots \otimes As(i_k) \to As(i_1 + \cdots + i_k)$$

$$(\lambda; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda\lambda_1 \ldots \lambda_k$$

Exercice

1. Il s'agit d'une opérade non symétrique.
2. $\{$algèbres associatives$\} = \mathcal{A}s$-algèbres
3. Pour coder les algèbres associatives unitaires, considérer $uAs(0) = \mathbb{K}, uAs(1) = \mathbb{K}, \ldots$.

Définition : Opérade symétrique

Le **groupe symétrique** $\mathbb{S}_n$ agit sur $\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$.

Définition

- **$\mathbb{S}$-module** : $P := \{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $P(n)$: $\mathbb{S}_n$-module
- $(\mathbf{P} \circ \mathbf{Q})(\mathbf{n}) :=$

$$\bigoplus_{k \geq 1} \bigoplus_{n = i_1 + \cdots + i_k} P(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} Q(i_1) \otimes \cdots \otimes Q(i_k)\right)$$

Proposition

La catégorie $(\mathbb{S}\text{-modules}, \circ, I)$ est une catégorie monoïdale.

Définition

Une **opérade symétrique** $\mathcal{P}$ est un monoïde $\mathcal{P} = (P, \gamma, \eta)$ dans cette catégorie monoïdale.

Exemples *Com* et *uCom*

- **Algèbres commutatives et associatives :** $\mu : V^{\otimes 2} \to V$,

$$\mu(\mu(a,b),c) = \mu(a,\mu(b,c)), \quad \mu(a,b) = \mu(b,a)$$

$Com(0) = 0, Com(1) = \mathbb{K}, Com(2) = \mathbb{K}, Com(3) = \mathbb{K}, \ldots$
avec la représentation triviale du groupe symétrique.

- **Composition opéradique :**

$$\gamma : Com(k) \otimes Com(i_1) \otimes \cdots \otimes Com(i_k) \otimes \mathbb{K}[\mathbb{S}_n] \to Com(n)$$

$$(\lambda; \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \sigma) \mapsto \lambda\lambda_1 \ldots \lambda_k$$

Exercice

1. Il s'agit d'une opérade symétrique.
2. $\{$algèbres commutatives et associatives$\}$ = *Com*-algèbres
3. Pour coder les algèbres commutatives et associatives unitaires, considérer $uCom(0) = \mathbb{K}, uCom(1) = \mathbb{K}, \ldots$.

Générateurs et relations

Adjonction : $\mathcal{T}$: $\mathbb{S}$-modules $\leftrightharpoons$ Opérades : Oubli

$\longrightarrow$ $\mathcal{T}$ est l'opérade libre

Proposition

Pour tout $\mathbb{S}$-module M,

$$\mathcal{T}(M)(n) = \bigoplus_{t\,:\,arbre\ \grave{a}\ n\ feuilles} t(M),$$

$t(M)$: arbre t avec les sommets indicés par les éléments de M.

Proposition

$$As \cong \mathcal{T}(M)/(R)$$

avec $\quad M = (0, 0, \curlyvee, 0, \ldots) \quad$ *et* $\quad R = (0, 0, 0, \quad - \quad, 0, \ldots)$

Plan

Opérades topologiques

Changer la catégorie de base :

$$(\mathit{Vect}, \otimes) \to (\mathit{dg}\text{-}\mathit{Mod}, \otimes),\ (\mathit{Ens}, \times) \text{ ou } (\mathit{Top}, \times)$$

Définition (Opérade des petits disques D_2)

$D_2(n) := \{$Configurations de n disques dans le disque unité$\}$

Proposition (Principe de reconnaissance (B-V. May))

- $X = \Omega^2(Y) = \mathit{Top}_*(S^2, Y)$: D_2-*algèbre.*
- X : D_2-*algèbre* $\Rightarrow X \sim \Omega^2(Y)$.

Opérades topologiques $\longrightarrow$ Opérade linéaires

Pour $\mathbb{K}$ un corps : $H_\bullet(X \times Y) \cong H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y)$ [Künneth].

$$\Rightarrow H_\bullet(D_2) \text{ : opérade linéaire}$$

Proposition (Arnold, Cohen)

$$H_\bullet(D_2) \cong \mathcal{T}\left(\bullet \ ,\ [\ ,\ ] \right)/(R),$$

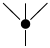
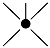
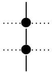
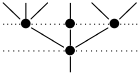
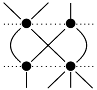
$$R = \{Assoc(\bullet), Jacobi([\ ,\ ]), Leibniz(\bullet, [\ ,\ ])\}$$

Proposition (Gerstenhaber)

Cohomologie de Hochschild $HH^\bullet(A, A)$: $H_\bullet(D_2)$-algèbre.

$\longrightarrow$ Conjecture de Deligne ($CH^\bullet(A, A)$: $C_\bullet(D_2)$-algèbre), Quantification par déformation des variétés de Poisson [Kontsevich].

Autres types d'opérades

Opérations			
Composition			
Categorie monoïdale	$(\mathrm{Vect}, \otimes)$	$(\mathbb{S}\text{-}\mathrm{Mod}, \circ)$	$(\mathbb{S}\text{-}\mathrm{biMod}, \boxtimes)$
Monoïde	$A \otimes A \to A$ Algèbre associative	$\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ **Opérade**	$\mathcal{P} \boxtimes \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ **Propérade**
Représentation	Modules	Algébres	Bigébres
Exemples	$S(V), \Lambda(V), U(\mathfrak{g}), \mathcal{A}_p$	$As, Com, Lie,$ $Gerst, Prelie, BV, \ldots$	$BiAs, BiLie,$ $Frob,$
Monoïde libre	Chaînes (module tensoriel)	Arbres	Graphes connexes

- Properads $\rightsquigarrow$ *prop* [MacLane] $\xrightarrow{\text{algèbres}}$ *théories algébriques* [Lawvere].
- Opérades *colorées* $(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k)$, opérades *cycliques* et *modulaires* $(V, <\,,\,>)$, opérades *à boucles* $(\dim V < \infty$, trace).

Exemple en topologie

- **Opérations cohomologiques stables**

$$Sq^i \ : \ H^\bullet(X, \mathbb{F}_2) \to H^{\bullet+i}(X, \mathbb{F}_2), \ \ i \geq 1$$

- **Algèbre de Steenrod**

$$\mathcal{A}_2 := T(Sq^i, i \geq 1)/(Relations\ d'Adem)$$

$$Sq^i Sq^j = \binom{j-1}{i} Sq^{i+j} + \sum_{k=1}^{[\frac{i}{2}]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k$$

Pour tout espace topologique X, $\mathcal{A}_2 \to End_{H^\bullet(X, \mathbb{F}_2)}$

- **Applications :** Groupes d'homotopie des sphères, invariants de Kervaire [Hill-Hopkins-Ravenel, 09]

Exemple en géométrie

- **Invariants de Gromov-Witten**

  $\mathcal{M}_{g,n}$: espace de modules de courbes de genre g avec n points marqués

$$\xrightarrow{\text{Compactification [Deligne-Mumford-Gröthendieck-Knudsen]}}$$

  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$: espace de modules de courbes stables de genre g avec n points marqués $\longleftarrow$ opérade

Proposition

Les invariants de Gromov-Witten : $H_\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \to End_{H^\bullet(X)}$,
X *: variété symplectique compacte ou variété projective lisse.*

- **Définition :** nombre de courbes pseudo-holomorphes.
- **Structure d'algèbre :** relations entre les invariants de GW.

Exemple en physique-mathématique

- **Surfaces de Riemann :**

  Surface de Riemann $\mathcal{R}_{g,n,m}$ de genre g avec $n+m$ disques paramétrés $\longleftarrow$ propérade

- **Théorie conforme des champs**

Définition (Segal-Getzler)

Théorie de champs conformes ou *CFT* : algèbre sur $\mathcal{R}_{g,n,m}$.
Théorie topologique de champs conformes ou *TCFT* : algèbre sur $C_\bullet(\mathcal{R}_{g,n,m})$.

- **Applications :** Algèbres vertex [Huang], topologie et théorie des cordes [Cohen, Costello, Godin, Sullivan].

Plan

Algèbre + Homotopie

- **Homotopie :** équivalence de complexes de chaînes

$$
\begin{tikzcd}
(W, d_W) \arrow[loop left, "h'"] \arrow[r, shift left, "i"] & (V, d_V) \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[loop right, "h"]
\end{tikzcd}
$$

$$ip - \mathrm{Id}_V = d_V h + h d_V, \quad pi - \mathrm{Id}_W = d_W h' + h' d_W$$

- **Algèbre :** $\nu : V^{\otimes 2} \to V$ produit associatif.
- **Homotopie + Algèbre :** Transfert sur W

$$\mu := p\,\nu\,i^{\otimes 2}$$

- **Question :** μ associatif ? Non, mieux que cela.

Algèbre associative à homotopie près

Définition (A_∞-algèbre)

Famille d'opérations $\{\mu_n : W^{\otimes n} \to W\}_{n\geq 2}$, $|\mu_n| = n-2$,

$$\sum_{\substack{2\leq k\leq n-1\\ 1\leq i\leq k}} \pm\, \mu_k \circ \left(\mathrm{id}^{\otimes(i-1)} \otimes \mu_{n-k+1} \otimes \mathrm{id}^{\otimes(k-i)}\right) = \partial(\mu_n)$$

dans $\mathrm{Hom}(W^{\otimes n}, W)$, pour tout $n \geq 2$.

Algèbre associative $\Leftrightarrow$ A_∞-algèbre avec $\mu_n = 0$, $n \geq 3$.

Théorème (Kadeishvili, Merkulov, Kontsevich-Soibelman, ...)

Toute structure d'A_∞-algèbre sur V se transfert en une structure de A_∞-algèbre sur W telle que $\mu_2 = \mu$.

▷ Formules explicites en termes d'arbres [Kontsevich-Soibelman].

Produits de Massey supérieurs

- **Application :** A algèbre associative différentielle graduée

  Décomposition de Hodge : $$W = H_\bullet(A) \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A = V \circlearrowleft h$$

Définition

opérations A_∞ sur $H_\bullet(A)$ = produits de Massey supérieurs

- **Exemple :** $A = (C^\bullet_{\mathrm{Sing}}(X), \cup)$
  $\Rightarrow$ produits de Massey supérieurs "classiques" sur $H^\bullet_{\mathrm{Sing}}(X)$
  produit de Massey μ_3 : anneaux borroméens.

- **Homotopie :** Reconstruction du type d'homotopie de A.

Algèbres à homotopie près

- **Remplacer**

$$As = \underbrace{\mathcal{T}(\curlyvee)/\left(\curlyvee\!\!\!\curlyvee\; - \;\curlyvee\!\!\!\curlyvee\right)}_{\text{quotient}} \xleftarrow{\sim} A_\infty := \underbrace{\left(\mathcal{T}(\bullet\!\!\curlyvee \oplus \bullet\!\!\psi \oplus \cdots), d\right)}_{\color{red}{\text{quasi}-\text{libre}}}.$$

- **Propriété :** quasi-libre $\Rightarrow$ *cofibrante* [Quillen] (="projective")

$$\begin{array}{ccccc} \text{une opérade } \mathcal{P} & \xleftarrow{\quad\sim\quad} & \mathcal{P}_\infty & : & \text{remplacement cofibrant} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{catégorie d'algèbres} & \hookrightarrow & \text{catégorie d'algèbres } \color{blue}{\text{à homotopie près}} & & \end{array}$$

- **Intérêt :** $\mathcal{P}_\infty$ cofibrant $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_\infty$-algèbres ont des bonnes propriétés homotopiques (Transfert, etc.).

Dualité de Koszul

Définition (Opérade duale de Koszul)

$$\mathcal{P} = \mathcal{T}(M)/(R) \longrightarrow \mathcal{P}^! = \mathcal{T}(M^\vee)/(R^\perp)$$

Proposition

$$(\mathcal{P}^!)^! \cong \mathcal{P}$$

- **Candidat :** $\left(\mathcal{T}(\underbrace{\mathcal{P}^{!*}}_{\text{Syzygies opéradiques}}), \underbrace{d}_{\gamma_{\mathcal{P}^!}}\right) \xrightarrow{?\sim?} \mathcal{P}$
- **Dualité de Koszul [P, G-K, V.] :** critère pour $\xrightarrow{\sim}$.

Transfert

Théorème ((B-M, F), V.)

Toute structure de $\mathcal{P}_\infty$-algébre sur V se transfert en une structure de $\mathcal{P}_\infty$-algèbre sur W telle que $\mu_2 = \mu$.

Démonstration. Démonstration conceptuelle et formules explicites. □

Exemples de dualité de Koszul des algèbres

- $\mathbf{S(V)}^! = \mathbf{\Lambda(V^*)}$:

  Correspondance BGG [Bernstein-Gelfand-Gelfand] (géométrie algébrique, cohomologie équivariante).

- $\mathbf{U}(\mathfrak{g})^! = (\mathbf{\Lambda^c}(\mathfrak{g}), \mathbf{d_{CE}})^*$:

  Homologie des algèbres (groupes) de Lie [Koszul, Cartan-Chevalley-Eilenberg].

- $\mathcal{A}_2^! = (\mathbf{\Lambda}\text{-algèbre}, \mathbf{d})$:

  opérations homotopiques stables $\leftrightarrow \pi_n(S^k)$

  Calculs effectifs : $H_\bullet(\Lambda, d) = E^2_{\mathrm{Adams}}$.

Exemples de dualité de Koszul des opérades

- **$\mathrm{As}^!$ = As :**

  Homologie de Hochschild et l'homologie cyclique,

  dualité : suspension $\sum \leftrightarrow$ lacet Ω, en topologie algébrique.

- **$\mathrm{Com}^!$ = Lie :**

  Homotopie rationnelle [Quillen, Sullivan],
  Théorie de la déformation [Deligne, Gröthendieck],
  (L_∞-algèbres).

- **$\mathrm{PreLie}^!$ = Perm :**

  Renormalisation en Physique-Mathématique,
  [Connes-Kreimer, Chapoton-Livernet].

  dualité dérivation-intégration [Uchino 08]
  (via les produits de Manin [G-K, V.].)

Exemples de dualité de Koszul d'autres types d'opérades

- $\mathbf{H}_\bullet(\mathcal{M}_{\mathbf{0,n}})^! = \mathbf{H}_\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{0,n}})$ **:**

  Invariants de Gromov-Witten de genre 0, cohomologie quantique, homologie de Floer, variétés de Frobenius [Kontsevich, Manin, Getzler, ...]

- $\mathbf{Frob}^! = \mathbf{invBiLie}$ **:**

  bigèbres de Frobenius : $2 - TQFT$ [Abrams 97] $\longleftrightarrow$ bigèbre de Lie involutive : $\mathbb{H}_\bullet^{S^1}(LM)$ topologie des cordes [Chas-Sullivan 99].

Algèbres de Batalin-Vilkovisky à homotopie près

Théorème (Drummond-Cole-V.)

$$BV_\infty = (\mathcal{T}(H_\bullet(\mathcal{M}_{0,n}) \oplus \mathbb{K}[\hbar]), d_\infty) \ : \ \textit{Modèle minimal}$$

$BV = H_\bullet(fD_2)$, fD_2 : opérade des petits disques paramétrés
$fD_2 \sim \mathcal{R}_{0,n,1} \longleftrightarrow \mathcal{M}_{0,n}$ et $\mathbb{K}[\hbar]$ (résolution de $H_\bullet(S^1)$).

Théorème (GC-T-V.)

- *Y : espace topologique avec action de S^1.*
  $H_\bullet(\Omega^2 Y)$: BV_∞-algèbre *(relève la structure BV de Getzler).*
- *A algèbre de Frobenius,*
  $CH^\bullet(A, A)$: BV_∞-algèbre *[Conjecture de Deligne cyclique].*
- **$TCFT_{g=0}$: BV_∞-algèbre.**
- **Algèbre vertex topologique : BV_∞-algèbre**
  [Conjecture : réciproque aussi vraie]

Applications du théorème de transfert

- **Conjecture de la bigèbre de Lie quantique**

Théorème (Chas-Sullivan 99, Sullivan 09)

$$\mathbb{H}_\bullet^{S^1}(LM)\ :\ \textit{invBiLie}_\infty\textit{-algèbre}$$

invariants homotopiques sur les cordes : intersection, etc.
Exemples : produit de Goldman et coproduit de Turaev.

- **Formalisme BV** [Losev, Mnev, Merkulov] :
  Actions = bigèbres de Lie unimodulaires à homotopie près
  Diagramme de Feynman ⇔ Théorème de transfert
- **Formalité de Kontsevich**

Théorème (Calaque-V.)

∃ ∞-quasi-isomorphisme de BV_∞-algèbres

$$\left(T_{\mathrm{poly}}\mathbb{K}^n, \mathrm{div}_\omega, \wedge, [,]_S\right) \xrightarrow{\sim} \left(D_{\mathrm{poly}}\mathbb{K}^n, m_r^{l_1,\ldots,l_k}\right)$$

Plan

Opérades en algèbre et combinatoire algébrique

Ensemble partiellement ordonné :
$\Pi_n :=$ (partititons de $\{1, 2, \ldots, n\}$; $\{1,3\}\ \{2,4\} \leq \{1,2,3,4\}$)

$$\mathbb{S}_n \text{ agit sur } \Pi_n \Rightarrow \mathbb{S}_n \text{ agit sur } H_\bullet(\Pi_n)$$

Proposition (Stanley, Björner, ...)

$$H_\bullet(\Pi_n) \cong Lie(n)^* \otimes sgn_{\mathbb{S}_n}$$

Proposition (V.)

$$\mathcal{P} \mapsto \Pi_n^{\mathcal{P}} \ \textit{et}\ H_\bullet(\Pi_n^{\mathcal{P}}) = (\mathcal{P}(n)^!)^* \otimes sgn_{\mathbb{S}_n}$$

$$\mathcal{P}\ \textit{Koszul} \Leftrightarrow \{\Pi_n^{\mathcal{P}}\}_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{Cohen-Macaulay}$$

Applications : étude des arrangements d'hyperplans [Chapoton-V.] et opérades sur un groupe de Coxeter quelconque [Bellier]

Opérades en informatique théorique et en logique

- Généralisation des **bases de Poincaré-Birkhoff-Witt** et **de Gröbner** aux opérades.
  $\longrightarrow$ systèmes de réécriture, informatique théorique
  [Burroni, Guiraud, Lafont, Malbos].

- **Théorie des catégories (supérieures)**
  [Baez-Dolan, Leinster, Lurie]

- En **logique :**
  logique linéaire [Girard, Hyland, Kelly, Street]
  sémantique des jeux (Monoïde libre [V.], lois de distributivité)
  [Curien, Mèllies, Tabareau]

Références

- Yu. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli Space*, AMS.
- J.-L. Loday-B.V., *Algebraic operads*, livre en préparation.
- *Propérades en algèbre, topologie, géométrie et physique mathématique*, Habilitation à diriger des recherches (Juin 2009).

http ://math.unice.fr/∼brunov/

Merci pour votre attention !