Rappels d'intgration et formulaire pour le M1

Francis Nier

1 Densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

Tout ce dont on a besoin ici est la propriété suivante de la mesure de Lebesgue : Pour tout ensemble mesurable E de $\mathbb{R}^n$

$$|E| = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compact}}} |K| = \inf_{\substack{E \subset \Omega \\ \Omega \text{ ouvert}}} |\Omega| . \qquad (|E| = \text{mesure de} E = \int 1_E(x)dx.)$$

Remarque 1.1. *On rappelle que la tribu borélienne sur un espace topologique est la famille de parties stable par union dénombrable et passage au complémentaire engendrée par les ouverts. Une mesure étant fixée (ici la mesure de Lebesgue dx), on complète cette tribu en rajoutant tous les ensembles de mesure nulle. Ici une partie mesurable signifie élément de la tribu complétée (i.e. tribu de Lebesgue) mais on peut se restreindre pour bien des raisonnements aux parties boréliennes (voir cours de théorie de la mesure et intégration).*

La démonstration qui se fait en trois étapes est rappelée ci-dessous.

a) *Une fonction caractéristique de compact peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions continues*
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, on prend $f^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{d(x,K)}{\varepsilon} & \text{si } d(x,K) < \varepsilon \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
On note $\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x,K) < \varepsilon\}$ et on a pour tout $\varepsilon > 0$, $1_K(x) \leq f^\varepsilon(x) \leq 1_{\Omega^\varepsilon}(x)$. On en déduit

$$\|1_K - f^\varepsilon(x)\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x) - 1_K(x)\, dx \leq 1_{\Omega^\varepsilon}(x) - 1_K(x)\, dx = |\Omega^\varepsilon| - |K| \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

puisque $|K| = \inf_{\substack{K \subset \Omega \\ \Omega \text{ ouvert}}} |\Omega| = \inf_{\varepsilon > 0} |\Omega^\varepsilon|$.

b) *La fonction caractéristique d'une partie mesurable de mesure finie peut-être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une famille de fonctions caractéristiques de compact.* On écrit tout simplement pour une partie mesurable E : $|E| = \sup_{\substack{K \in E \\ K \text{ compact}}} |K|$. Pour $K \subset E$, la norme $\|1_E - 1_K\|_{L^1}$ n'est autre que $|E| - |K|$ qui est arbitrairement petit.
En conséquence, *une fonction caractéristique de partie mesurable de mesure finie peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions continues.* Par linéarité, il en est de même de toute combinaison linéaire finie, i.e. *toute fonction étagée $\sum_{k=1}^N \lambda_k 1_{E_k}(x)$, avec $|E_k| < +\infty$, peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions continues.*

c) *Toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ est limite d'une suite de fonctions étagées.* On suppose d'abord que $\operatorname{supp} f$ est compact. En fait on fixe un représentant toujours noté f qui est une fonction mesurable intégrable. En écrivant $f = f_+ - f_-$, on se ramène au cas $f \geq 0$. On prend alors

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} . 1_{f^{-1}\left([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[\right)}(x) + n.1_{f^{-1}([n,+\infty])}(x).$$

On a alors $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$ et $s_n(x) \to f(x)$ presque partout. Le théorème de Lebesgue (convergence dominée) donne alors $\|f - s_n\|_{L^1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$.
Pour $\operatorname{supp} f$ non compact, on approche f dans L^1 par $1_{K_k} f$, où $\cup_{k\in\mathbb{N}} K_k = \mathbb{R}^n$, (convergence dominée). CQFD.

2 Autres rappels sur les L^p

Definition 2.1. *Pour $1 \leq p \leq +\infty$,*

a) *$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, dx)$ désigne l'espace des fonctions mesurables f telles que :*

$$p < +\infty : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < +\infty; \qquad p = +\infty : \ \exists C_f > 0, \ |f(x)| \leq C_f.$$

b) *$L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, dx)$ par la relation d'équivalence $(f \sim g) \Leftrightarrow (f(x) = g(x)$ p.p.$)$. Il est muni de la norme*

$$p < +\infty : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} ; \qquad p = +\infty : \|f\|_\infty = Sup\ ess\, |f(x)| .$$

Remarque 2.2. **a)** *$L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ est un espace de Banach, ce qui signifie que $\| \ \|_p$ est bien une norme (elle vérifie l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkovski) ; $\|f\|_p$ ne s'annule que si le vecteur f est nul) et que $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ avec cette norme est complet. Par le théorème de densité précédent, c'est d'ailleurs le complété de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.*

b) *Nécessité de passer au quotient : $\| \ \|_p$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. En effet la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ aurait une norme nulle. Dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, on n'a plus ce problème puisque une telle fonction s'identifie au vecteur nul.*

On rappelle sans démonstration l'inégalité de Hölder et les propriétés liées.

Proposition 2.3. **a)** *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) \, dx \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

b) *Pour $1 \leq p < +\infty$, le dual topologique de $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. (Faux pour $p = +\infty$.)*

c) *Si pour $i = 1 \ldots N$ on a $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n, dx)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N} \leq 1$, alors le produit $f_1 \ldots f_N$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^n, dx)$ avec*

$$\|f_1 \ldots f_N\|_r \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{p_i} .$$

Le résultat suivant est utile. L'argument de sa démonstration est similaire à celui utilisé pour montrer la complétude de $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Proposition 2.4. *Si $p < +\infty$, de toute suite convergeant vers u dans $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout vers u.*

Preuve : Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ si et seulement si $\| |u_n - u|^p \|_1 \to 0$ il suffit de le démontrer pour $p = 1$. Pour $p = 1$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\left\| u_{n_{k+1}} - u_{n_k} \right\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. En choisissant pour chaque k un représentant de u_{n_k}, on peut dire que la fonction $\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| u_{n_{k+1}} - u_{n_k} \right| (x)$ est une fonction mesurable positive d'intégrale ≤ 2 (Lemme de Fatou). On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la suite

$$u_{n_k}(x) = u_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} u_{n_{i+1}}(x) - u_{n_i}(x)$$

converge absolument. Notons $v(x)$ cette limite ponctuelle (p.p.), en posant $v(x) = 0$ pour l'ensemble de mesure nulle où la série ne converge pas. Le lemme de Fatou donne alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - u_{n_k}(x)| \, dx \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x) \right| \, dx \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En conséquence v est également limite de $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et s'identifie donc à u. En conclusion, la sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers $u(x)$. $\square$

Remarque 2.5. *Il est important de noter que la convergence presque partout n'est vraie qu'en extrayant une sous-suite. On pourra s'en convaincre en considérant la suite u_n définie de la façon suivante : On prend l'unique $l \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{l(l+1)}{2} \leq n < \frac{(l+1)(l+2)}{2}$ et on pose $u_n(x) = 1_{\left[\frac{n}{l+1} - \frac{l}{2}, \frac{n+1}{l+1} - \frac{l}{2}\right]}(x)$.*

On termine ce paragraphe par les inégalités pour le produit de convolution

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy.$$

Proposition 2.6. **a)** *Pour* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$*, on a* $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ *avec*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

b) *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ *alors on a* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n, dx)$ *avec*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}\right).$$

Preuve : On rappelle brièvement la démonstration de a). Après avoir pris des représentants, on vérifie avec le changement de variables $u = x - y$, $v = y$ que l'intégrale positive

$$\int\int |f(x-y)g(y)| \; dxdy = \int\int |f(u)| \, |g(v)| \; dudv$$

vaut $\|f\|_1 \|g\|_1$ qui est fini. Le théorème de Fubini dit alors deux choses : 1) L'intégrale $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \; dy$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$; 2) On a l'inégalité $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
Pour le b), il est commode de considérer $\int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)h(x) \; dx$ et d'utiliser la dualité entre L^r et L^{r*}. □

3 Formules de Leibnitz et de Taylor avec reste intégral

On rappelle ces deux formules écrites à l'ordre quelconque ici pour des fonctions f et g supposées $\mathcal{C}^\infty$. Pour les retrouver le plus simple est de commencer par le cas à une variable.

3.1 Fonction d'une variable

a) Formule de Leibnitz $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\partial_x^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!} \partial_x^\beta f \partial_x^{\alpha - \beta} g = \sum_{\alpha^1 + \alpha^2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^1!\alpha^2!} \partial_x^{\alpha^1} f \partial_x^{\alpha^2} g.$$

b) Formule de Taylor avec reste intégral $m \in \mathbb{N}$: Elle s'obtient par intégration par parties utilisant $(1-t)^k = \left(\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right)'$:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + \int_0^1 f'(t) \; dt = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) \; dt \\ &= \sum_{k \leq m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + (m+1) \int_0^1 (1-t)^m \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) \; dt. \end{aligned}$$

3.2 A plusieurs variables

On rappelle les notations pour les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

a) Formule de Leibnitz $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\partial_x^\alpha (fg) = \sum_{\alpha^1 + \alpha^2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^1!\alpha^2!} \left(\partial_x^{\alpha^1} f\right) \left(\partial_x^{\alpha^2} g\right), \qquad \alpha^1 = (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \; \alpha^2 = (\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2).$$

Preuve : On écrit $\partial_x^\alpha (fg) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} (fg)$ et on applique la formule de Leibnitz en dimension 1 à chaque $\partial_{x_i}^{\alpha_i}$. □

On vérifie facilement par récurrence la généralisation

$$\partial_x^\alpha (f_1 f_2 \ldots f_k) = \sum_{\alpha^1 + \cdots + \alpha^k = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^1!\alpha^2! \ldots \alpha^k!} (\partial_x^{\alpha^1} f_1)(\partial_x^{\alpha^2} f_2) \ldots (\partial_x^{\alpha^k} f_k).$$

b) Formule de Taylor avec reste intégral $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(a) + (m+1) \int_0^1 (1-t)^m \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(a + t(b-a)) \ dt.$$

Preuve : On applique la formule en dimension 1 à la fonction $\varphi(t) = f(a + t(b-a))$ puis on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt}(t) &= \left(\left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\partial_{x_i} \right] f \right)(a + t(b-a)), \\ \frac{d^k\varphi}{dt^k}(t) &= \left(\left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\partial_{x_i} \right]^k f \right)(a + t(b-a)). \end{aligned}$$

Les opérateurs différentiels $(b_i - a_i)\partial_{x_i}$ commutent. On peut donc utiliser la formule du multinôme $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^k = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} X^\alpha$, valable dans tout anneau commutatif (Le coefficient $\frac{k!}{\alpha!}$ s'obtient en calculant la dérivée α-ième par rapport à X de chaque côté, ou bien par récurrence). On obtient

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k\varphi}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(a + t(b-a)).$$

□

4 Formule de Stokes (version Green)

4.1 Mesure surfacique

On considère une hypersurface Σ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ qui au voisinage d'un point $\sigma_0 \in \Sigma$ est donnée par le paramétrage

$$V_{\sigma_0} \cap \Sigma = \left\{ \tilde{\sigma}(u_1, \ldots, u_{n-1}),\ (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \right\}, \qquad \tilde{\sigma}(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n).$$

En un point régulier $\tilde{\sigma}(u) \in \Sigma$, la famille $\left(\partial_{u_1}\tilde{\sigma}(u), \ldots, \partial_{u_{n_1}}\tilde{\sigma}(u)\right)$ forme une base vecteurs tangents àΣ et si $\vec{n}(u)$ est un vecteur unitaire normal à Σ en $\tilde{\sigma}(u)$, on a :

$$\lambda(u) = \det\left[\vec{n}(u), \partial_{u_1}\tilde{\sigma}(u), \ldots, \partial_{u_{n-1}}\tilde{\sigma}(u)\right] \neq 0.$$

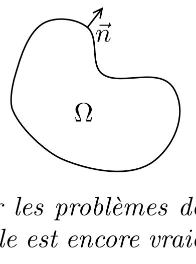
Si du désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$, la quantité $|\lambda(u)|\, du$ définit une mesure sur Σ qui est indépendante du paramétrage (choix de la fonction $\tilde{\sigma}(.)$).

Definition 4.1. *On appelle cette mesure, la mesure surfacique sur Σ. Si σ désigne un point générique de Σ, on note $d\sigma = |\lambda(u)|\, du$.*

4.2 Formule de Green

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, (i.e. dont le bord est une hypersurface $\mathcal{C}^\infty$) et soit $X(x) = (X_1(x), \ldots, X_n(x))$ un champ de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord dans Ω, $X(.) \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. La formule de Stokes s'écrit

$$\int_\Omega div\, X(x)\ dx = \int_{\partial\Omega} X.\vec{n}(\sigma)\ d\sigma \qquad \vec{n} \text{ normale SORTANTE.}$$



Remarque 4.2. *En pratique, on travaille toujours avec un paramétrage. Pour éviter les problèmes de signe, il faut orienter Σ, c'est à dire choisir un paramétrage tel que $\lambda(u) > 0$. Cette règle est encore vraie si $\vec{n}$ est le vecteur normal entrant. Deux possibilités.*