



Stage de Fin d'Études :

Résolution numérique en 2D d'un
problème de surface minimale par
capture d'interface

Ndiaye Mouhamadou Souleymane

12 novembre 2009

Encadrants :

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE

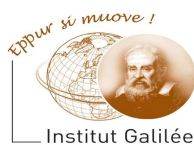
Stéphane DELLACHERIE - Yohan PENEL

OFFICE NATIONAL D'ÉTUDES ET RECHERCHES AÉROSPATIALE

Juliette RYAN - Michel BORREL

SUPGALIÉE

Emmanuel AUDUSSE



Remerciements

Je tiens à remercier Dellacherie Stéphane pour sa patience, pour ses conseils, et surtout pour l'opportunité qu'il m'a donnée d'effectuer mon Stage de Fin d'Études au commissariat à l'Énergie Atomique (centre de Saclay). Son aide et son soutien m'ont permis d'effectuer ce travail malgré de nombreuses difficultés.

Je souhaite également exprimer toute ma reconnaissance envers Juliette Ryan, Michel Borrel, Yohan Penel et Anouar Mekkas pour l'aide qu'ils m'ont accordé tout au long de ce stage.

Je remercie également Olivier Lafitte pour son soutien, et les professeurs de l'Institut Galilée pour l'enseignement qu'il m'ont fourni durant mes années de formation d'ingénieur.

Table des matières

1	Problématique	6
1.1	Déplacement de l'interface	6
1.2	Le problème de surface minimale	7
1.2.1	Calcul du champ de vitesse	8
2	Résolution de l'équation d'advection linéaire avec le schéma antidissipatif de Després & Lagoutière	9
2.1	Quelques rappels sur l'équation d'advection	10
2.2	Stabilité et convergence	11
2.3	Conditions suffisantes de convergence	14
2.4	Construction du schéma décentré aval sous les contraintes de convergence	15
2.5	Extension du schéma Després & Lagoutière	16
3	Calcul des normales et des courbures	17
3.1	Algorithme de Brackbill	17
3.1.1	Calcul de la normale	18
3.1.2	Calcul de la courbure locale	20
4	Régularisation de la fonction Heaviside par le calcul de la fonction distance à l'interface	22
4.1	Méthode de Hamilton-Jacobi pour le calcul de la fonction distance à l'interface	23
4.2	Régularisation du cercle	23
4.3	Validations sur le cercle	26
4.3.1	Calcul de la courbure moyenne du cercle	26
5	Résolution du problème de surface minimale avec une régularisation par Hamilton-Jacobi	28
5.1	Cas test de l'ellipse	28
5.2	Étude numérique de la diffusion en fonction de la régularité du champ de vitesse	31
6	Régularisation par convolution	33
6.1	Principe de construction des fonctions de base spline	34
6.2	Calcul des courbures locales pour le cercle en fonction du support des fonctions de base	38
7	Résolution du problème de surface minimale avec une régularisation par convolution	40
7.1	Analyse de la conservation de la surface (volume en 3D) et de la décroissance de la circonférence (surface en 3D) :	43
7.1.1	Algorithme conservatif en volume	44
8	Conclusions et perspectives	46
	Bibliographie	47

Introduction

Dans un Réacteur à Eau sous Pression (R.E.P) en fonctionnement normal, l'eau est sous forme liquide. Cependant, dans le cadre des études de sûreté, il est important d'étudier l'apparition de la phase vapeur. En effet, la phase vapeur perturbe les échanges de chaleur entre les crayons et le fluide caloporteur.

L'écoulement dans le cœur du réacteur qui est alors diphasique, est étudié avec des simulations numériques discrétisant des systèmes de type *Navier-Stokes* diphasiques moyennés : les systèmes sont moyennés au sens où l'interface liquide-vapeur n'est pas explicitement décrite. Le caractère diphasique de l'écoulement est alors pris en compte via des relations de fermeture.

Ces relations de fermeture peuvent être justifiées ou améliorées via des simulations numériques à **l'échelle des bulles de vapeur**. Ainsi c'est pour ces bulles que **l'interface liquide-vapeur est explicitement discrétisée**. On parle de **simulation numérique directe**.

Ces simulations numériques directes nous conduisent à nous intéresser aux **effets des tensions de surface qui s'exercent à l'interface séparant les deux phases**. Ces effets sont directement liés à la **valeur de la courbure locale de l'interface**.

Le but du sujet est de se **concentrer sur le calcul de cette courbure en résolvant numériquement l'évolution d'une surface fermée $\Sigma(t)$ (courbe en 2D ; surface en 3D) induite par un problème géométrique dit problème de surface minimale** via l'algorithme de capture d'interface de Desprès-Lagoutière [3]

Le présent rapport s'articule autour de sept parties. La première, est une description du procédé utilisé afin de résoudre *le problème de surface minimale*. En effet, la méthodologie choisie consiste à coupler une technique de déplacement par capture d'interface avec un algorithme de calcul du champ de vitesse induit par le problème de surface minimale.

La seconde partie de ce rapport détaille le procédé que nous avons choisis parmi d'autres pour simuler numériquement l'évolution d'une surface fermée soumise à un champ de vitesse.

Dans troisième partie, on s'intéresse aux méthodes de calcul des normales et de la courbure locale, tirées de la modélisation continue des effets de la tension de surface à l'interface par Brackbill. Ainsi ceci nous permet d'avoir des formules d'approximations pour chaque élément du champ de vitesse induit par le problème de surface minimale.

La quatrième et la sixième partie présentent deux méthodes de régularisation. Cette régularisation, nécessaire au calcul du champ de vitesse, est l'un des points sensibles de notre étude. Ainsi, dans un premier temps, pour chacune des méthodes, on présentera les techniques respectives puis leur précision. Ensuite, la cinquième et la septième partie nous permettent de mettre en évidence les résultats de la résolution du problème de surface minimale, en utilisant l'une et l'autre méthode de régularisation.

Enfin, en dernier lieu, nous ferons un bilan de cette étude à travers les conclusions

sur la précision de l'algorithme de calcul de la courbure locale et les moyens d'améliorer la résolution du problème de surface minimale .

1 Problématique

Dans ce sujet il faut distinguer deux questions indépendantes :

- *Comment faire évoluer la surface fermée avec une technique précise de repérage d'interface pour un champ de vitesse donné ?*
- *Quel est le champ de vitesse qui permet de déformer la bulle pour résoudre le problème de surface minimale et comment calculer ce champ de vitesse de façon précise ?*

La première question a été traitée par Bruno Després et Frédéric Lagoutière dans le cadre de leur thèse sur *la modélisation mathématique et la résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants* (voir [3]). Ainsi, nous allons tout d'abord faire un bref rappel des techniques de déplacement d'interface afin de justifier le choix de cette méthode pour déplacer et repérer l'interface. Ensuite, on exposera le problème de surface minimale dont il est question.

1.1 Déplacement de l'interface

Pour simuler numériquement la déformation d'une interface, il existe deux grandes familles de procédés pour déplacer les interfaces :

- a) les techniques où l'interface est décrite **explicitement** via un **maillage mobile** : *Arbitrary Lagrangian Eulerian* et *interface tracking* ou *front tracking*,
- b) les techniques où l'interface est décrite **implicitement** sur un **maillage fixe** : capture d'interface via *le transport d'une fonction régulière* ou via *le transport d'une Heaviside*.

Les deux premières méthodes explicites sont précises lorsque les déformations sont peu importantes mais elles nécessitent un remaillage ou une redistribution des noeuds dès que les déformations sont importantes. D'autre part bien qu'elles aient fait leurs preuves, ces méthodes sont délicates à programmer en 2D et en 3D.

Ainsi pour notre problème, on utilisera la seconde méthode afin de pouvoir résoudre le problème de surface minimale sur des bulles de formes quelconques. Cette méthode consiste à résoudre l'équation de transport suivante :

$$\partial_t Y + u(Y) \cdot \nabla Y = 0, \quad (1)$$

où la fonction Heaviside est telle que :

$$Y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit par ailleurs $\Omega_1(t)$ tel que $\partial\Omega_1(t) = \Sigma(t)$. En pratique la surface de discontinuïté de Y représente alors l'interface $\Sigma(t)$. Ainsi pour bien repérer l'interface il nous faut un schéma précis qui **ne crée pas de diffusion numérique**. C'est là qu'intervient le schéma de Bruno Després et Frédéric Lagoutière. En effet, il s'agit d'un schéma très simple à programmer et le passage du 2D au 3D est naturel. Mais surtout cet algorithme ne crée pas de diffusion numérique supplémentaire au sens où **l'épaisseur de l'interface** est de l'ordre de **2 ou 3 mailles**, en 2D, quelle que soit l'importance des déformations et le temps d'intégration.

1.2 Le problème de surface minimale

On cherche à étudier numériquement la déformation d'une surface fermée $\Sigma(t)$ induite par le champ de vitesse normal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V_{\Sigma(t)} & = & [\Gamma_{\Sigma(t)} - \gamma_{\Sigma(t)}(x)] \quad \mathbf{n}(x), \\ \gamma_{\Sigma(t)}(x) & = & \text{courbure locale} , \\ \Gamma_{\Sigma(t)} & = & \frac{\int_{\Sigma(t)} \gamma_{\Sigma(t)}(x) \, d\sigma}{\int_{\Sigma(t)} d\sigma} = \text{courbure moyenne} , \\ \Sigma(t=0) & = & \Sigma^0, \end{array} \right. \quad (2)$$

où $\mathbf{n}(x)$ est la normale unitaire extérieure à $\Sigma(t)$. L'aire et le volume intérieur de la surface $\Sigma(t)$ sont respectivement notés $\mathcal{A}_{\Sigma(t)}$ et $\mathcal{V}_{\Sigma(t)}$ et qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}_{\Sigma(t)} & := & \int_{\Sigma(t)} d\sigma = \int_{\Omega} |\nabla Y| \, dx, \\ \mathcal{V}_{\Sigma(t)}(x) & := & \int_{\Omega} Y \, dx. \end{array} \right.$$

On a $|\nabla Y| = \delta_{\Sigma(t)}$ qui est un dirac surfacique.

La surface $\Sigma(t)$ déformée par ce champ de vitesse converge en temps long ($t \rightarrow +\infty$) vers une **sphère**. Cette déformation se fait à volume constant et la surface atteint son minimum sous cette forme géométrique. Ainsi résoudre le problème (2) revient à résoudre un problème de *surface minimale* [4] lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Ces résultats s'obtiennent en remarquant que $\Sigma(t)$ solution de (2) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{d-1} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_{\Sigma(t)} & = & - \int_{\Sigma(t)} (\Gamma_{\Sigma(t)} - \gamma_{\Sigma(t)})^2 \, d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{V}_{\Sigma(t)} & = & 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

où d ($= 2$ ou 3) est la dimension dans laquelle on résoud le problème.

La première équation sur $\mathcal{A}_{\Sigma(t)}$ montre que la variation de l'aire de la bulle est **décroissante et qu'à l'équilibre** $\Gamma_{\Sigma(t)} = \gamma_{\Sigma(t)}$. Ceci prouve que la surface $\Sigma(t = +\infty)$ est donc un cercle, en 2D, de rayon :

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{V}'(t=0)}{\Pi}},$$

et en 3D une sphère de rayon :

$$R = \left(\frac{3}{4} \frac{\mathcal{V}'(t=0)}{\Pi}\right)^{1/3}.$$

La solution en temps long de (2) est donc la solution du problème de minimisation :

" Trouver Σ qui minimise \mathcal{A}_Σ sous la contrainte $\mathcal{V}_\Sigma = \text{constante}$ " .

Notre démarche pour résoudre ce problème consiste alors à résoudre l'équation de transport (1), via le schéma anti-dissipatif de Després et Lagoutière, en utilisant le champ de vitesse $u(Y(t, x))$ défini sur l'interface par :

$$u(Y(t, x \in \Sigma(t))) = V_{\Sigma(t)}.$$

Ceci consiste à déformer la surface $\Sigma(t)$ avec le champ de vitesse (2) qui permet de résoudre la problème de surface minimale. Ainsi on répond donc aux deux questions a) et b).

1.2.1 Calcul du champ de vitesse

Le champ de vitesse s'écrit :

$$u(Y)(t, x) = \mathcal{U}[\phi(Y)(t, x)],$$

avec $\phi(Y)(t, x)$ étant une régularisation de $Y(t, x)$ dont la ligne de niveau zéro est confondue avec la surface de discontinuété du Heaviside. Le champ de vitesse devient alors :

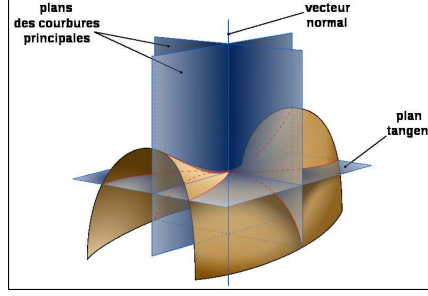
$$\mathcal{U}[\phi(Y)(t, x)] = [\Gamma(\phi) - \gamma(\phi)] \mathbf{n}(\phi),$$

où $\mathbf{n}(\phi)$ est la normale unitaire extérieure. Elle s'obtient par la formule :

$$\mathbf{n}(\phi) = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}.$$

On notera $g = \nabla\phi$.

$\gamma(\phi)$ est la courbure locale en chaque point. Il faut préciser que cette courbure locale en 3D est en réalité une moyenne entre deux courbures principales, d'ailleurs en anglais elle est appelée "mean curvature". En effet lorsqu'on définit en un point \mathbf{x} un axe déterminé par le vecteur normale à la surface en ce point, le plan tournant sur cet axe coupe la surface en une infinité de courbes. Ceci peut s'illustrer par la figure suivante :



Pour chacune de ces courbes, on a un rayon de courbure. Ainsi c'est le minimum et le maximum de ces rayons de courbures qui permettent de déterminer la courbure locale moyenne en calculant :

$$\gamma = \frac{\gamma_{max} + \gamma_{min}}{2},$$

où $\gamma_{max} = \frac{1}{R_{max}}$ et $\gamma_{min} = \frac{1}{R_{min}}$.

En deux dimensions le problème ne se pose pas car la surface fermée devient une courbe. Cependant pour estimer cette courbure locale nous allons utiliser l'expression suivante (dont la justification détaillée est développée dans [1]) :

$$\gamma = \nabla \cdot \mathbf{n} = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right).$$

Pour finir le calcul du champ de vitesse, il nous faut calculer la courbure moyenne qui s'appelle en anglais : "average mean curvature". Ceci exprime bien le fait que ce soit la moyenne des courbures locales moyennées. Elle s'obtient en calculant :

$$\Gamma_{\Sigma(t)} = \frac{\int_{\Sigma(t)} \gamma_{\Sigma(t)}(x) d\sigma}{\int_{\Sigma(t)} d\sigma}.$$

Cependant pour calculer cette intégrale il faut situer les points appartenant à $\Sigma(t)$. On choisit alors de localiser les points de cette interface par la méthode suivante :

$$x \in \Sigma(t) \text{ si } |Y(x, t) - Y(x_{voisin}, t)| \neq 0$$

Ceci nous permet alors de marquer les points dans le voisinage de la zone de discontinuité de Y afin de situer l'interface.

2 Résolution de l'équation d'advection linéaire avec le schéma antidissipatif de Després & Lagoutière

On s'intéresse maintenant à la résolution numérique de l'équation de transport linéaire :

$$\partial_t Y + u \cdot \nabla Y = 0$$

en 2D sur maillage cartésien . Pour cela, on rappelle tout d'abord le processus de construction du schéma 1D anti-dissipatif de Després & Lagoutière [3] lorsque $u = C^{te}$. Puis, l'on explicite l'extension de ce schéma au cas u non constante.

2.1 Quelques rappels sur l'équation d'advection

Nous considérons l'équation d'advection linéaire à vitesse constante u strictement positive sur \mathbb{R} :

$$\partial_t Y + u \partial_x Y = 0 \quad (4)$$

où $u \in \mathbb{R}$ et $u > 0$ avec la condition initiale

$$Y(0, x) = Y^0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad (5)$$

Nous discrétisons cette équation sous une forme "volumes finis". Pour cela, nous introduisons un maillage régulier de \mathbb{R} de pas Δx , dont les mailles sont les intervalles $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $j \in \mathbb{Z}$ avec $x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$. D'où $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = \Delta x$.

On introduit également le pas de temps Δt et on pose $\lambda = \Delta t / \Delta x$. La condition initiale discrète pour Y est définie par

$$Y_j^0 = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{Y^0(x)}{\Delta x} dx \quad (6)$$

d'où l'utilité de l'hypothèse $Y^0(x) \in L^1_{loc}$. L'équation discrète associée à (4) est

$$\frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} + u \frac{Y_{j+1/2}^n - Y_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0$$

Soit encore

$$Y_j^{n+1} = Y_j^n - u\lambda(Y_{j+1/2}^n - Y_{j-1/2}^n). \quad (7)$$

Les nombres $Y_{j\pm 1/2}$ sont des flux aux interfaces, et peuvent être considérés comme les valeurs de Y aux bords de la maille j de sorte que

$$\partial_x Y(n\Delta t, j\Delta x) \simeq \frac{Y_{j+1/2}^n - Y_{j-1/2}^n}{\Delta x}$$

Le choix de l'approximation des flux détermine donc le type de schéma adopté. On peut citer deux choix possibles :

- le premier correspond au schéma décentré amont d'ordre 1 (schéma Upwind) qui consiste à calculer les flux de la manière suivante :

$$Y_{i+1/2}^n = \begin{cases} Y_i^n & \text{si } u \geq 0, \\ Y_{i+1}^n & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

La solution numérique obtenue par le schéma décentré amont est caractérisée par son étalement par rapport à la solution exacte. Ce phénomène est appelé diffusion numérique. Pour comprendre ce phénomène, on suppose tout d'abord que la solution exacte Y de (4) est régulière. Puis nous effectuons les développements de Taylor suivants :

$$\begin{cases} \partial_t Y(n\Delta t, j\Delta x) = \frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \partial_{t,t}^2 Y(n\Delta t, j\Delta x) + O(\Delta t^2), \\ \partial_x Y(n\Delta t, j\Delta x) = \frac{Y_j^n - Y_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \partial_{x,x}^2 Y(n\Delta t, j\Delta x) + O(\Delta x^2). \end{cases}$$

En utilisant le fait que Y est solution de (4) c'est-à-dire $\partial_{t,t}^2 Y = u^2 \partial_{x,x}^2 Y$, on obtient

$$\frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} + u \frac{Y_j^n - Y_{j-1}^n}{\Delta x} = u \frac{\Delta x}{2} (1 - u\lambda) \partial_{x,x}^2 Y_j^n + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$$

On a donc

$$\partial_t Y + u \partial_x Y = u \frac{\Delta x}{2} (1 - u\lambda) \partial_{x,x}^2 Y + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2).$$

Le terme $u \frac{\Delta x}{2} (1 - u\lambda) \partial_{x,x}^2 Y + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$ est appelé erreur de troncature. On constate qu'on ne résout plus une équation de convection mais plutôt une équation de convection-diffusion avec pour coefficient de diffusion $u \frac{\Delta x}{2} (1 - u\lambda)$ qui est positif sous la condition CFL $u\lambda < 1$. C'est pour cela qu'on parle de **diffusion numérique** ou encore de **dissipation numérique**.

- le deuxième choix correspond au schéma décentré aval d'ordre 1 qui consiste à calculer les flux de la manière suivante :

$$Y_{i+1/2}^n = \begin{cases} Y_{i+1}^n & \text{si } u \geq 0, \\ Y_i^n & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Ce type de schéma brille par son caractère anti-diffusif mais, malheureusement, il est inconditionnellement instable (non convergence).

Les méthodes classiques pour diminuer la diffusion numérique consistent à augmenter l'ordre du schéma numérique, au risque cependant de voir apparaître un phénomène de dispersion. L'idée de Després & Lagoutière a alors été de construire un schéma 1D dans le cas où $u(x) \equiv u$ qui soit :

- un “*peu*” décentré amont “*mais pas trop*” pour ne pas diffuser ;
- un “*peu*” décentré aval “*mais pas trop*” pour converger.

Nous verrons dans la section suivante l'extension au cas $u(x) \neq C^{ste}$ et au cas 2D sur maillage cartésien.

2.2 Stabilité et convergence

Nous rappelons quelques définitions qui vont servir dans la suite pour la construction du schéma décentré aval sous les contraintes de convergence :

Définition 1.

Le schéma (7) est explicite s'il existe un entier k et une fonction réelle g à $2k$ variables réelles tels que :

$$Y_{j+1/2}^n = g(Y_{j-k+1}^n, Y_{j-k+2}^n, \dots, Y_j^n, \dots, Y_{j+k}^n) \quad (8)$$

Définition 2.

Un schéma de la forme (7)(8) est consistant si la fonction de la définition 1 vérifie :

$$Y = g(Y, Y, \dots, Y).$$

Définition 3.

Le schéma de la forme (7) est stable L^∞ s'il existe un réel C indépendant de n et de Δt tel que :

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} |Y_j^n| \leq C \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Définition 4.

La variation totale à l'étape en temps n de la solution discrète Y_j^n est définie avec

$$VT^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |Y_{j+1}^n - Y_j^n|. \quad (9)$$

Le schéma (7) est à variation totale décroissance (VTD) si pour toute donnée $(Y_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ on a

$$VT^{n+1} \leq VT^n$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |Y_{j+1}^{n+1} - Y_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |Y_{j+1}^n - Y_j^n|.$$

Définition 5. On définit $BV(\mathbb{R})$ comme étant l'espace des fonctions de $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ dont la variation totale est bornée :

$$BV(\mathbb{R}) = \{f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}); VT(f) < +\infty\}$$

où

$$VT(f) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x) \Phi'(x) dx, \Phi \in C_0^1(\mathbb{R}), \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}. \quad (10)$$

Notons que la définition de (10) est équivalente à (9) lorsque f est constante par morceau sur chaque intervalle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$.

Notation 1.

Pour simplifier les énoncés de la définition suivante ainsi que des théorèmes de convergence, nous notons

$$Y^{\Delta t, \Delta x}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} Y_j^n \mathbf{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}(x) \mathbf{1}_{[n\Delta t, (n+1)\Delta t[}(t), \quad (11)$$

les Y_j^n étant données par le schéma (6), (7).

Définition 6. Un schéma de la forme (6), (7) avec λ fixé converge vers $Y(t, x)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ s'il existe une suite $(\Delta x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta x_m = 0$;
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \|Y^{\Delta t_m, \Delta x_m}(t, \cdot) - Y(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, Δt_m étant défini par $\Delta t_m = \lambda \Delta x_m$.

On a le résultat de convergence suivant :

Théorème 1. Supposons que $Y^0(x) \in BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

On considère un schéma explicite de la forme (6)(7),

consistant, stable L^∞ et VTD dont les flux sont localement lipschitziens.

Alors, il est converge dans $L^1(\mathbb{R})$ vers la solution $Y(t, x) = Y^0(x - ut)$ de (4)(5).

Ce résultat nous incite à essayer de trouver des conditions facilement exploitables sous lesquelles un schéma 1D est stable L^∞ et VTD. Pour cela, on introduit le critère de Harten via :

Lemme 1.

Un schéma de type (6), (7) est stable L^∞ et VTD lorsque

$$\min(Y_{j-1}^n, Y_j^n) \leq Y_j^{n+1} \leq \max(Y_{j-1}^n, Y_j^n). \quad (12)$$

L'encadrement (12) est appelé **critère de Harten** dans la littérature.

Afin de simplifier les calculs dans la suite, posons pour tout entier relatif j :

$$\begin{cases} m_{j-1/2}^n = \min(Y_{j-1}^n, Y_j^n), \\ M_{j-1/2}^n = \max(Y_{j-1}^n, Y_j^n). \end{cases}$$

Maintenant, dans l'encadrement (12), on remplace Y_j^{n+1} par son expression (7) faisant intervenir les flux aux interfaces :

$$m_{j-1/2}^n \leq Y_j^n - u\lambda(Y_{j+1/2}^n - Y_{j-1/2}^n) \leq M_{j-1/2}^n. \quad (13)$$

En développant l'encadrement (13), on obtient une inégalité sur le flux $Y_{j+1/2}^n$ faisant intervenir $Y_{j-1/2}^n$:

$$\frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - M_{j-1/2}^n) + Y_{j-1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq \frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - m_{j-1/2}^n) + Y_{j-1/2}^n. \quad (14)$$

Nous appellerons **contrainte de Harten** l'encadrement (14). Cependant, cette contrainte n'est pas constructive car les bornes d'encadrement dépendent du flux $Y_{j-1/2}^n$. Il faudrait donc connaître les valeurs des flux $Y_{i-1/2}^n$ avec $i \leq j$ pour déterminer les bornes de stabilité pour $Y_{j+1/2}^n$.

Nous verrons dans la suite comment obtenir un encadrement du flux $Y_{j+1/2}^n$ exploitable indépendamment du flux $Y_{j-1/2}^n$.

2.3 Conditions suffisantes de convergence

On remarque que pour qu'un schéma de type (7) soit consistant, il suffit que

$$m_{j+1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n \quad (15)$$

Nous appellerons **contrainte de consistance** l'inégalité (15).

Il paraît maintenant judicieux de remplacer le flux $Y_{j-1/2}^n$ dans la contrainte de Harten (14) par $\max(Y_{j-1}^n, Y_j^n)$ pour la borne inférieure et par $\min(Y_{j-1}^n, Y_j^n)$ pour la borne supérieure et d'imposer la consistance des flux par la contrainte de consistance (15). On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - M_{j-1/2}^n) + M_{j-1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq \frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - m_{j-1/2}^n) + m_{j-1/2}^n \\ m_{j+1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n \end{cases} \quad (16)$$

Nous appellerons **contrainte de Harten relaxée** la première inégalité de (16). La contrainte de Harten relaxée (16) permet de choisir des flux assurant la stabilité du schéma sans connaître au préalable les flux dans les mailles voisines.

Nous verrons dans la suite qu'il est possible de trouver un flux qui vérifie la contrainte de Harten relaxée (16). Ceci revient à démontrer que les deux intervalles donnés par (16) sont d'intersection non vide.

Afin de simplifier les calculs dans la suite, on pose pour tout entier relatif j :

$$\begin{cases} b_j^n = \frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - M_{j-1/2}^n) + M_{j-1/2}^n, \\ B_j^n = \frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - m_{j-1/2}^n) + m_{j-1/2}^n. \end{cases} \quad (17)$$

Théorème 2. *On considère un schéma de type (6)(7) avec une vitesse $u > 0$. On suppose que la condition de type CFL $u\lambda \leq 1$ est vérifiée alors*

$$Y_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n] \cap [b_j^n, B_j^n] \neq \emptyset. \quad (18)$$

On suppose de plus que les flux $(Y_{j+1/2}^n)_{j \in \mathbf{Z}}$ vérifient $(\forall j \in \mathbf{Z})$

$$\begin{cases} b_j^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq B_j^n, \\ m_{j+1/2}^n \leq Y_{j+1/2}^n \leq M_{j+1/2}^n. \end{cases} \quad (19)$$

Alors le schéma de type (6), (7) avec une vitesse $u > 0$ est :

- stable L^∞ et VTD ;
- convergent si les flux sont localement lipschitziens (théorème 1).

Démonstration

Il est évident que $Y_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n]$ (cf. notations (11)). Donc pour montrer (18), il suffit de montrer que $Y_j^n \in [b_j^n, B_j^n]$. D'après la condition CFL, on a $(\frac{1}{u\lambda} - 1) \geq 0$ $\forall j \in \mathbf{Z}$. Par la définition de $m_{j-1/2}^n$, on a $(Y_j^n - m_{j-1/2}^n) \geq 0$. D'où

$$\left(\frac{1}{u\lambda} - 1\right)(Y_j^n - m_{j-1/2}^n) \geq 0.$$

En développant l'inégalité précédente, on obtient

$$B_j^n = \frac{1}{u\lambda}(Y_j^n - m_{j-1/2}^n) + m_{j-1/2}^n \geq Y_j^n.$$

De la même manière, on montre que $b_j^n \leq Y_j^n$. On a donc $Y_j^n \in [m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n] \cap [b_j^n, B_j^n]$. Il est donc possible de trouver un flux $Y_{j+1/2}^n$ vérifiant les inégalités (19).

2.4 Construction du schéma décentré aval sous les contraintes de convergence

L'idée principale de Després & Lagoutière est de décentrer le flux " le plus possible " vers l'aval sous la contrainte de Harten relaxée (19) pour obtenir la stabilité. Le flux retenu peut être vu comme la solution du problème de minimisation sous contrainte :

$$Y_{i+1/2}^n \quad \text{minimise} \quad |Y_{i+1/2}^n - Y_{i+1}^n|$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \frac{Y_i^n - M_{i-1/2}}{u\Delta t/\Delta x} + M_{i-1/2} \leq Y_{i+1/2}^n \leq \frac{Y_i^n - m_{i-1/2}}{u\Delta t/\Delta x} + m_{i-1/2}, \\ \text{(contrainte de Harten relaxée)} \\ m_{i+1/2} \leq Y_{i+1/2}^n \leq M_{i+1/2}. \\ \text{(contrainte de consistance)} \end{cases} \quad (20)$$

La contrainte (20) est linéaire et le flux ne peut prendre que trois valeurs :

$$\begin{cases} Y_{j+1/2}^n = \max(b_j^n, m_{j+1/2}^n) & \text{si } Y_{j+1}^n \leq \max(b_j^n, m_{j+1/2}^n), \\ Y_{j+1/2}^n = Y_{j+1}^n & \text{si } \max(b_j^n, m_{j+1/2}^n) \leq Y_{j+1}^n \leq \min(B_j^n, M_{j+1/2}^n), \\ Y_{j+1/2}^n = \min(B_j^n, M_{j+1/2}^n) & \text{si } \max(B_j^n, M_{j+1/2}^n) \geq Y_{j+1}^n. \end{cases} \quad (21)$$

Le flux $Y_{j+1/2}^n$ déterminé par (21) s'écrit également de la façon suivante :

Lemme 2.

La valeur prise par le flux déterminé par (21) est :

$$\begin{cases} Y_{j+1/2}^n = b_j^n & \text{si } Y_{j+1}^n \leq b_j^n, \\ Y_{j+1/2}^n = Y_{j+1}^n & \text{si } b_j^n \leq Y_{j+1}^n \leq B_j^n, \\ Y_{j+1/2}^n = B_j^n & \text{si } B_j^n \geq Y_{j+1}^n. \end{cases} \quad (22)$$

Enfin, on a le résultat important :

Théorème 3 ([3]).

Le schéma défini via les formules de flux (17)-(22) est convergent sous le critère CFL $\Delta t < u \cdot \Delta x$ et diffuse tout Heaviside sur au plus une seule maille (i.e. contrôle uniforme en temps de la diffusion numérique!).

2.5 Extension du schéma Després & Lagoutière

Nous nous intéressons tout d'abord à l'extension du schéma Després & Lagoutière au cas où la vitesse $u(x) \neq C^{ste}$. Ensuite, on proposera une extension du schéma en dimension deux.

Lorsque la vitesse $u(x) \neq C^{ste}$, on définit pour cela des flux locaux ainsi qu'une vitesse u_i propre à la maille i avec les formules suivantes (cas où $u(x) \geq 0$) :

$$Y_{i+1/2,G}^n = \begin{cases} b_i^n(u_i) & \text{si } Y_{i+1}^n \leq b_i^n(u_i), \\ Y_{i+1}^n & \text{si } b_i^n(u_i) < Y_{i+1}^n < B_i^n(u_i), \\ B_i^n(u_i) & \text{si } B_i^n(u_i) \leq Y_{i+1}^n, \end{cases}$$

et

$$Y_{i+1/2,D}^n = \begin{cases} b_i^n(u_{i+1}) & \text{si } Y_{i+1}^n \leq b_i^n(u_{i+1}), \\ Y_{i+1}^n & \text{si } b_i^n(u_{i+1}) < Y_{i+1}^n < B_i^n(u_{i+1}), \\ B_i^n(u_{i+1}) & \text{si } B_i^n(u_{i+1}) \leq Y_{i+1}^n, \end{cases}$$

où $b_i^n(u)$ et $B_i^n(u)$ sont donnés par (17). En suivant cette démarche, on peut démontrer la proposition suivante qui nous assure la stabilité L^∞ , le caractère *VTD* et anti-diffusif du schéma :

Proposition 1.

Le schéma numérique (non conservatif!)

$$Y_i^{n+1} = Y_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2,G}^n - f_{i-1/2,D}^n)$$

où

$$f_{i+1/2,G}^n = u_i \cdot Y_{i+1/2,G}^n \quad \text{et} \quad f_{i-1/2,D}^n = u_i \cdot Y_{i-1/2,D}^n$$

est consistant, stable L^∞ et diffuse tout Heaviside sur au plus une seule maille sous le critère $\Delta t < \Delta x / \max_i |u_i|$.

On s'intéresse maintenant à l'équation d'advection en dimension 2D :

$$\partial_t Y + u \partial_x Y + v \partial_y Y = 0$$

où $u = u(x, y)$ avec la condition initiale

$$Y(0, x, y) = Y^0(x, y) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2).$$

Nous introduisons un maillage régulier de \mathbb{R}^2 de pas Δx et Δy dont les mailles sont les intervalles

$$M_{j,k} = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [y_{k-1/2}, y_{k+1/2}], \quad (j, k) \in \mathbb{Z}^2$$

avec $x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$ et $y_{k\pm 1/2} = (k \pm 1/2)\Delta y$. Donc $x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = \Delta x$ et $y_{k+1/2} - y_{k-1/2} = \Delta y$.

La condition initiale discrète pour Y est définie par

$$Y_{j,k}^0 = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{Y^0(x,y)}{\Delta x \Delta y} dx dy.$$

La résolution numérique utilise la technique classique de la décomposition directionnelle (dit aussi splitting directionnel). Cela consiste à résoudre alternativement les deux équations d'advection 1D :

$$\partial_t Y + u \partial_x Y = 0$$

et

$$\partial_t Y + v \partial_y Y = 0.$$

D'un point de vue discrèt, cette approche consiste à résoudre à chaque pas de temps

$$Y_{j,k}^{n+1} = Y_{j,k}^{n+1/2} - v \lambda_y (Y_{j,k+1/2}^{n+1/2} - Y_{j,k-1/2}^{n+1/2})$$

avec $Y_{j,k}^{n+1/2}$ une solution temporaire intermédiaire entre $Y_{j,k}^n$ et $Y_{j,k}^{n+1}$. En effet cette solution est calculée de la manière suivante :

$$Y_{j,k}^{n+1/2} = Y_{j,k}^n - u \lambda_x (Y_{j+1/2,k}^n - Y_{j-1/2,k}^n)$$

où $\lambda_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et $\lambda_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$

3 Calcul des normales et des courbures

3.1 Algorithme de Brackbill

Nos méthodes de calcul des normales et des courbures locales s'inspirent de celles utilisées dans [1]. Cet article expose un nouveau procédé de modélisation des tensions de surface. Les tensions de surface sont des forces qui s'exercent à l'interface entre deux fluides. Ces forces sont dues aux forces d'attractions moléculaires.

Dans les méthodes précédentes de modélisation du mouvement d'une interface induit par les tensions de surface, les effets de la tension de surface étaient pris en compte en tant que conditions aux limites. Ces méthodes ne sont pas adaptées à l'étude des interfaces avec une topologie complexe. La méthode de Brackbill modélise les tensions de surface en les considérant comme des effets continus à travers l'interface.

En effet la nouveauté dans la méthode de Brackbill est dans le fait de prendre en compte les effets de la tension de surface non plus dans les conditions aux limites, mais avec un terme source qui est alors une force surfacique.

Pour calculer cette force surfacique Brackbill a exposé des méthodes qui permettent d'approcher les courbures locales et les normales. La description mathématique de la bulle est à peu de chose près la même que la nôtre ainsi nous pouvons utiliser ces méthodes d'approximations.

3.1.1 Calcul de la normale

On utilise la méthode dite de "ALE" qui permet d'obtenir la normale unitaire de façon indirect en calculant d'abord des normales aux sommets des mailles. On utilise d'abord la formule suivante pour approcher le gradient de ϕ au sommet droit de la face supérieure d'une maille :

$$\begin{cases} \partial_x \phi_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\phi_{(i+1,j)} + \phi_{(i+1,j+1)} - \phi_{(i,j)} - \phi_{(i,j+1)}}{2\Delta x} \\ \partial_y \phi_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\phi_{(i,j+1)} + \phi_{(i+1,j+1)} - \phi_{(i,j)} - \phi_{(i+1,j)}}{2\Delta y} \end{cases}$$

Après avoir calculer $\nabla\phi$ aux autres sommets de la maille, on obtient le gradient de ϕ au centre de la maille i, j en faisant la moyenne de ces quantités par la formule suivante :

$$\mathbf{g}_{i,j} = \frac{1}{4}(\mathbf{g}_{i+1/2,j+1/2} + \mathbf{g}_{i+1/2,j-1/2} + \mathbf{g}_{i-1/2,j+1/2} + \mathbf{g}_{i-1/2,j-1/2})$$

Il suffit alors de normaliser pour obtenir les normales unitaires extérieures avec la formule :

$$\mathbf{n}_{i,j} = \frac{-\mathbf{g}_{i,j}}{|\mathbf{g}_{i,j}|}$$

On désire déterminer la précision de ces approximations. Pour cela on effectue les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} \phi_{(i+1,j)} &= \phi_{(i+1/2,j+1/2)} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/2} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} \\ &\quad + \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} + O(\Delta x^3) + O(\Delta y^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{(i+1,j+1)} &= \phi_{(i+1/2,j+1/2)} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j+1/2} + \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/2} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} \\ &\quad + \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} + O(\Delta x^3) + O(\Delta y^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{(i,j)} &= \phi_{(i+1/2,j+1/2)} - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j+1/2} - \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/2} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} \\ &\quad + \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} + O(\Delta x^3) + O(\Delta y^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{(i,j+1)} &= \phi_{(i+1/2,j+1/2)} - \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j+1/2} + \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/2} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} \\ &\quad + \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{i+1/2,j+1/2} + O(\Delta x^3) + O(\Delta y^3) \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\phi_{(i+1,j)} + \phi_{(i+1,j+1)} - \phi_{(i,j)} - \phi_{(i,j+1)} = 2\Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2,j+1/2} + O(\Delta x^3)$$

d'où :

$$\frac{\phi_{(i+1,j)} + \phi_{(i+1,j+1)} - \phi_{(i,j)} - \phi_{(i,j+1)}}{2\Delta x} = \partial_x \phi_{i+1/2,j+1/2} + O(\Delta x^2)$$

On peut alors dire que la formule d'approximation pour $\partial_x \phi$, donnée par Brackbill est d'ordre 2. Le procédé est le même pour l'approximation de $\partial_y \phi$.

Afin de verifier ces ordres de précision on se donne comme cas test la fonction :

$$\phi(x,y) = \exp(x \cdot y)$$

Le calcul de la normale unitaire extérieure nous donne :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_x &= \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathbf{n}_y &= \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Le tracé pour ce cas test de l'erreur relative en norme l^2 qui s'écrit :

$$\frac{\| \mathbf{n} - \mathbf{n}_{exacte} \|_{l^2(\Omega)}}{\| \mathbf{n}_{exacte} \|_{l^2(\Omega)}}$$

nous donne l'allure suivante :

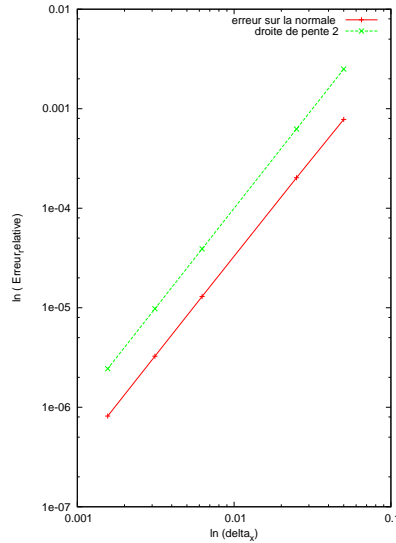


FIG. 1 – Erreur relative sur la normale en norme l^2

Cette étude pratique nous permet d'affirmer que les formules d'approximations, utilisées par Brackbill pour approcher la normale au centre d'une maille, sont **d'ordre 2**. Il s'agit maintenant de faire le même type d'étude pour la courbure locale.

3.1.2 Calcul de la courbure locale

La courbure locale calculée dans [1] est obtenue par la formule suivante :

$$\gamma = (\nabla \cdot \mathbf{n})$$

Algorithme de Brackbill

Cette méthode de calcul proposée dans [1], permet de définir une courbure locale en un point positive lorsque le centre de cercle osculateur se trouve dans le domaine Ω_1 . Pour notre problème, nous souhaitons conserver cette définition de la courbure locale. On l'obtient par la formule ci-dessous :

$$\gamma = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)$$

Ce qui se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) &= -[\nabla \phi \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\nabla \phi|} \right) + \frac{1}{|\nabla \phi|} \nabla \cdot (\nabla \phi)] \\ &= -[-\nabla \phi \cdot \frac{\nabla |\nabla \phi|}{|\nabla \phi|^2} + \frac{1}{|\nabla \phi|} \nabla \cdot (\nabla \phi)] \\ &= -\frac{1}{|\nabla \phi|} [-\nabla \phi \cdot \frac{\nabla (|\nabla \phi|)}{|\nabla \phi|} + \nabla \cdot (\nabla \phi)] \\ &= -\frac{1}{|\nabla \phi|} [\mathbf{n}_x \cdot \partial_x |\nabla \phi| + \mathbf{n}_y \cdot \partial_y |\nabla \phi| + \nabla \cdot (\nabla \phi)] \end{aligned}$$

Ce qui se ré-écrit :

$$\gamma = -\frac{1}{|\nabla \phi|} [(\mathbf{n} \cdot \nabla) |g| + \nabla \cdot (g)],$$

car on a $g = \nabla \phi$. Il s'agit alors d'approcher $\nabla \cdot g$ au centre d'une maille par la formule suivante :

$$(\nabla \cdot g)_{i,j} = \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} \right)_{i,j} + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y} \right)_{i,j}$$

avec :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{g_{x(i+1/2,j+1/2)} + g_{x(i+1/2,j-1/2)} - g_{x(i-1/2,j+1/2)} - g_{x(i-1/2,j-1/2)}}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial g_y}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{g_{y(i+1/2,j+1/2)} + g_{y(i-1/2,j+1/2)} - g_{y(i+1/2,j-1/2)} - g_{y(i-1/2,j-1/2)}}{2\Delta y} \end{cases}$$

on a d'autre part :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla |g|)_{i,j} = \mathbf{n}_{ij}^x \left(\frac{\partial |g|}{\partial x} \right)_{i,j} + \mathbf{n}_{ij}^y \left(\frac{\partial |g|}{\partial y} \right)_{i,j}$$

Pour le calcul de $\left(\frac{\partial |g|}{\partial x} \right)_{i,j}$, étant donné que l'on dispose déjà des quantités : $g_{i+1/2,j+1/2}$, $g_{i+1/2,j-1/2}$, $g_{i-1/2,j+1/2}$, $g_{i-1/2,j-1/2}$, on calcule les normes de chacun de ces vecteurs puis on utilise la même technique que Brackbill, en posant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial |g|}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{|g_{i+1/2,j+1/2}| + |g_{i+1/2,j-1/2}| - |g_{i-1/2,j+1/2}| - |g_{i-1/2,j-1/2}|}{2\Delta x} \\ \left(\frac{\partial |g|}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{|g_{i+1/2,j+1/2}| - |g_{i+1/2,j-1/2}| - |g_{i-1/2,j+1/2}| + |g_{i-1/2,j-1/2}|}{2\Delta y} \end{cases}$$

Autre Algorithme

Ces formules d'approximation de la courbure locale sont calculées à partir de valeurs déjà approchées de $g = \nabla\phi$. Cela pose un problème pour l'étude de précision de la formule d'approximation de γ . Donc il paraît plus judicieux de redévelopper la formule de la courbure locale pour mettre en évidence des termes dont on peut calculer des approximations avec des formules précises. Ainsi, on peut ré-écrire la formule de la courbure locale de la façon suivante :

$$\gamma = -\frac{1}{|\nabla\phi|} [\mathbf{n}_x \cdot \partial_x |\nabla\phi| + \mathbf{n}_y \cdot \partial_y |\nabla\phi| + \Delta\phi]$$

On cherche alors à approcher chaque quantité par des formules en $O(h^2)$ (avec $h = \min(\Delta x, \Delta y)$). On sait que :

$$\Delta\phi = \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi.$$

On utilise alors les formules suivantes :

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = (\Delta\phi)_{i,j} + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$$

D'autre part, nous voulons aussi avoir une formule d'ordre deux pour les dérivées de la norme du gradient de ϕ . On a d'abord :

$$\partial_x |\nabla\phi| = \frac{1}{2} \frac{\partial_x \langle \nabla\phi, \nabla\phi \rangle}{|\nabla\phi|} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \langle \partial_x \nabla\phi, \nabla\phi \rangle}{|\nabla\phi|}$$

d'où

$$\partial_x |\nabla\phi| = \frac{\langle \partial_x \nabla\phi, \nabla\phi \rangle}{|\nabla\phi|}$$

et

$$\partial_x \nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial_x^2 \phi \\ \partial_x \partial_y \phi \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons déjà une approximation de $\partial_x^2\phi$ et pour approcher $\partial_x \partial_y \phi$ on a :

$$\frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} = \partial_x \partial_y \phi$$

La dérivée $\partial_y \nabla\phi$ s'obtient par le même procédé.

Estimation de précision

Pour déterminer la précision de ces deux méthodes de calcul de la courbure locale, on cherche à calculer l'erreur en norme l^2 relative suivante :

$$\frac{\|\gamma - \gamma_{exacte}\|_{l^2(\Omega)}}{\|\gamma_{exacte}\|_{l^2(\Omega)}}.$$

Le calcul de la courbure locale pour la fonction $\phi(x, y) = \exp(x \cdot y)$ nous donne :

$$\gamma_{exacte} = 2xy \exp(x \cdot y).$$

Les courbes d'erreur ont les allures suivantes :

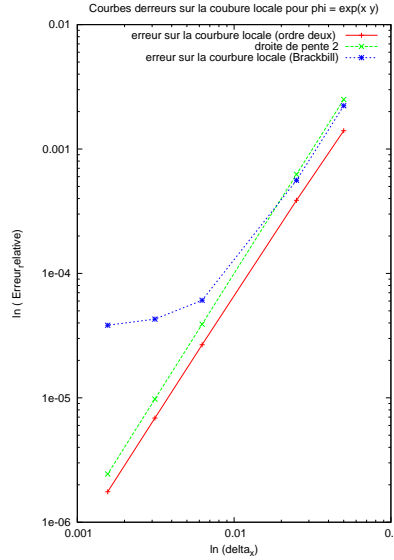


FIG. 2 – Erreur relative sur la courbure locale en norme l^2

Ainsi on vérifie bien que la méthode de calcul proposée par Brackbill a un problème de précision car le comportement de sa courbe d'erreur ne permet pas donner un ordre de précision clair. Cependant la seconde méthode a une courbe d'erreur qui est parallèle à la droite de pente 2.

Après avoir étudié l'ordre de précision des normales et des courbures locales, on peut s'intéresser à la régularisation de la fonction Heaviside.

4 Régularisation de la fonction Heaviside par le calcul de la fonction distance à l'interface

Afin de calculer le champ de vitesse nous avons besoin de régulariser la fonction Heaviside de type :

$$Y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dispose alors de deux méthodes de régularisation : la régularisation par le calcul d'une *fonction distance à l'interface* et la méthode qui consiste à utiliser la *convoluée* de $Y(x, t)$ avec une *fonction de base spline d'ordre deux ou trois*.

4.1 Méthode de Hamilton-Jacobi pour le calcul de la fonction distance à l'interface

La régularisation par la fonction distance consiste à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\begin{cases} \partial_\tau \phi - \text{sgn}(\phi^0)(1 - |\nabla \phi|) = 0, \\ \phi(x, 0) = Y(t, x). \end{cases}$$

La solution est alors la fonction distance signée :

$$\mathcal{D}(x) = \min_{y \in \Sigma} |x - y| \text{sgn}(\phi(x, 0)).$$

Dans notre problème τ est un temps fictif indépendant de t . L'existence et l'unicité de la solution sont prouvées dans [5].

Pour résoudre cette équation on utilise un schéma de type upwind qui s'écrit :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \Delta t S(\phi_{i,j}^0) G(\phi)_{i,j},$$

avec :

$$G(\phi)_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\max(a_+^2, b_-^2) + \max(c_+^2, d_-^2)} - 1 & \text{si } \phi_{i,j}^0 > 0, \\ \sqrt{\max(a_-^2, b_+^2) + \max(c_-^2, d_+^2)} - 1 & \text{si } \phi_{i,j}^0 < 0. \end{cases}$$

On a pour tout nombre réel h , $h_+ = \max(h, 0)$, $h_- = \min(h, 0)$, et :

$$\begin{cases} a = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}, \\ b = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}, \\ c = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y}, \\ d = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}. \end{cases}$$

On a aussi :

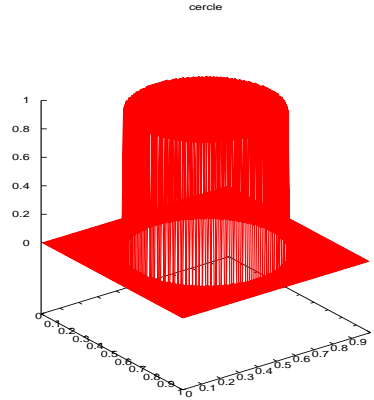
$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4.2 Régularisation du cercle

On se donne le cas test suivant afin d'illustrer les résultats de la régularisation du cercle par la méthode de Hamilton-Jacobi.

- Le domaine est une boîte de dimension $[0, 1] \times [0, 1]$.
- On utilise un cercle de centre $(0.5, 0.5)$ et de rayon 0.35 .
- Le nombre de mailles en x et en $y = 100$.
- La condition c.f.l est de 0.8 .
- La simulation est sur une durée de 0.6 s.

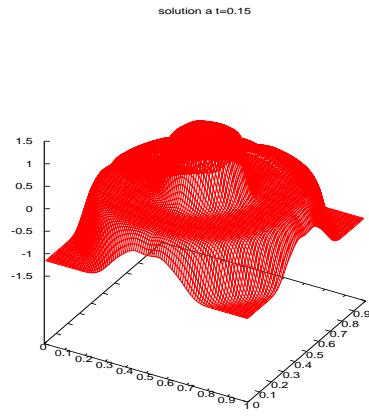
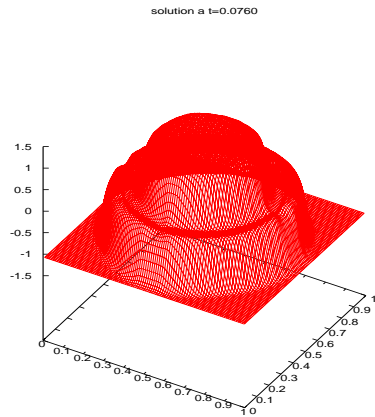
La condition initiale a le profil suivant :

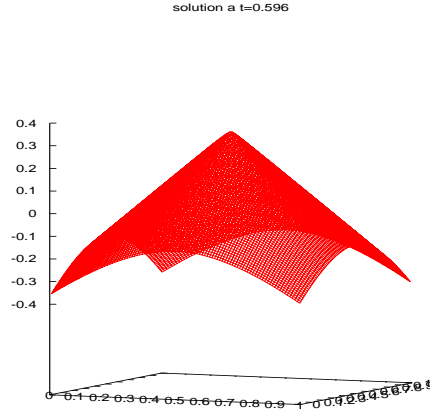
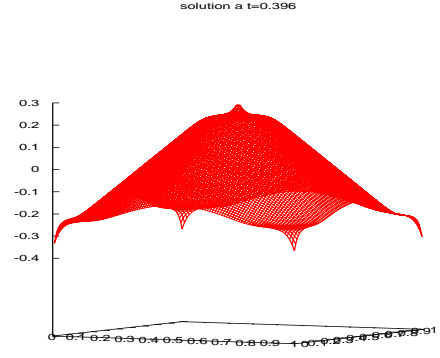
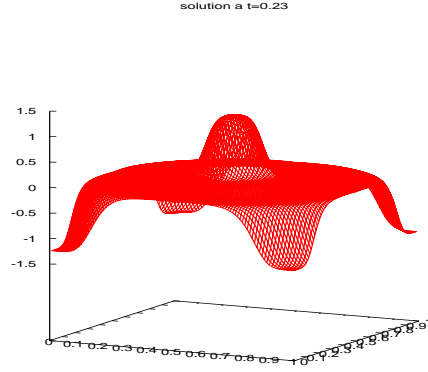


Remarque 1. La fonction Heaviside que l'on souhaite régulariser est définie avec 0 et 1. Etant donné que l'algorithme de Hamilton-Jacobi est défini avec ϕ égale à -1 et 1 , il suffit d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\phi = 2 \times Y - 1.$$

Ainsi la représentation de la solution de l'algorithme de Hamilton-Jacobi $\phi(\tau, x)$ à différentes valeurs de τ nous donne les figures suivantes :





Remarque 2. *L'algorithme converge vers une solution stationnaire pour la quelle on a :*

$$|\nabla\phi| = 1,$$

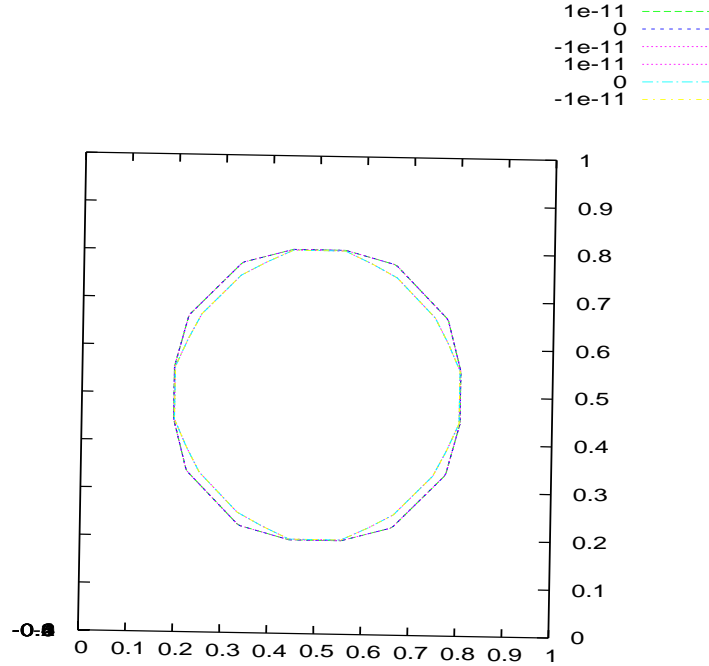
et donc on obtient :

$$\partial_\tau\phi = 0$$

On note que le profil de la régularisée obtenue présente, à cause de sa forme en pointe, au centre du cercle une singularité dans le calcul des normales à cause du gradient de ϕ .

Malgré ce défaut, notre démarche reste cohérente en utilisant cette méthode de régularisation. En effet pour notre algorithme de capture d'interface, le champ de vitesse n 'est utilisé que dans les zones où $\nabla Y \neq 0$. Ces zones sont théoriquement au voisinage de l'interface donc assez loin du centre de la bulle où il y a cette singularité.

Remarque 3. D'autre part l'algorithme de Hamilton-Jacobi a tendance à déplacer la ligne de niveau zéro comme nous le montre la figure suivante :



La ligne de niveau zéro pour la condition initiale est tracée en mauve et on voit qu'elle est décalée par rapport la ligne de niveau zéro de la solution finale.

Nous disposons maintenant d'une régularisation de la fonction Heaviside. Avant de résoudre le problème de surface minimale on cherche à estimer la précision de calcul du champ de vitesse.

4.3 Validations sur le cercle

4.3.1 Calcul de la courbure moyenne du cercle

L'objectif de cette étape est de vérifier si en couplant :

- le calcul de la régularisée de Y par la méthode de Hamilton-Jacobi,
 - le calcul des courbures locales avec les formules de Brackbill,
 - la localisation de l'interface par marquage suivant le ∇Y ,
- on arrive à approcher correctement la courbure moyenne d'un cercle.

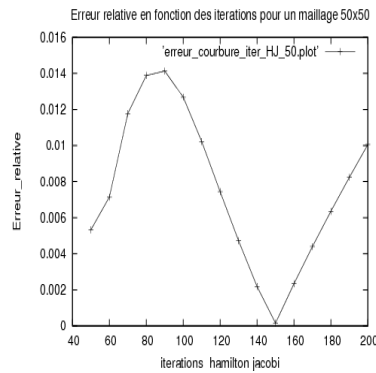
On se donne le cas test suivant :

- on choisit un cercle de centre : $(0.5, 0.5)$ et de rayon 0.35,
- le nombre de mailles en x est : 50, et le nombre de mailles en y est : 50,
- la condition c.f.l pour l'algorithme de Hamilton-Jacobi est : 0.25.

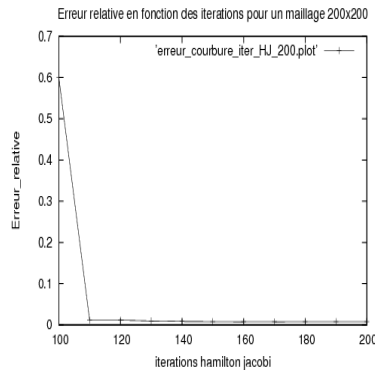
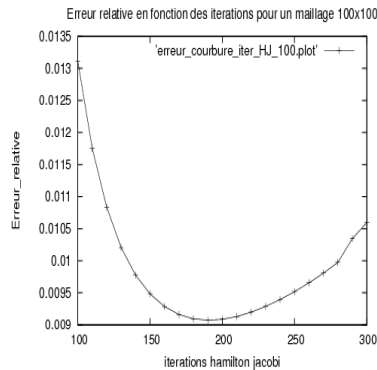
On calcul alors l'erreur relative sur la courbure moyenne suivante :

$$\frac{|\Gamma_{approx} - \frac{1}{R}|}{\frac{1}{R}}$$

Lorsqu'on étudie cette erreur en fonction des itérations de l'algorithme de Hamilton-Jacobi, on a l'allure suivante :

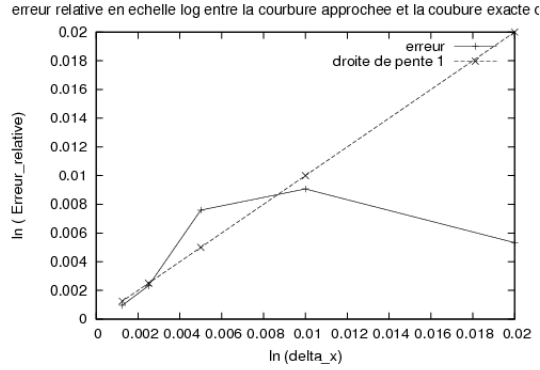


On observe qu'il y a un nombre d'itérations optimal pour avoir la plus faible erreur. Afin de confirmer cette observation on effectue le même cas test avec les maillages : 100×100 et 200×200 .



On voit que la qualité de la courbure moyenne approchée est liée au nombre d'itérations de l'algorithme de Hamilton-Jacobi pour calculer la régularisée ϕ de Y . Ainsi on s'attend à ce qu'il y ait une manque de précision sur le champ de vitesse.

On se propose alors d'étudier numériquement s'il y a quand même convergence de la courbure moyenne approchée lorsqu'on raffine le maillage. Le tracé de l'erreur relative en fonction du maillage à nombre d'itérations fixé nous donne l'allure suivante :



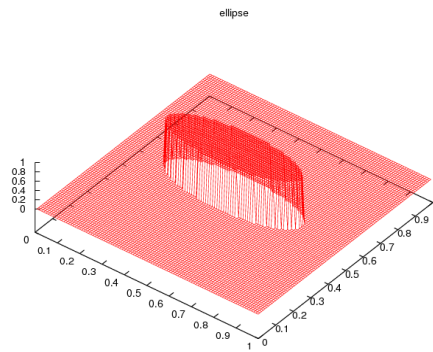
Ainsi on a décroissance de la courbe d'erreur mais sans pour autant avoir d'ordre de convergence. Cette méthode utilisant la régularisation de Hamilton-Jacobi pose des **problèmes de précision** car on arrive **pas à dégager une ligne directrice claire sur la relation entre le maillage et la qualité de la régularisée à avoir pour bien calculer la courbure moyenne**.

5 Résolution du problème de surface minimale avec une régularisation par Hamilton-Jacobi

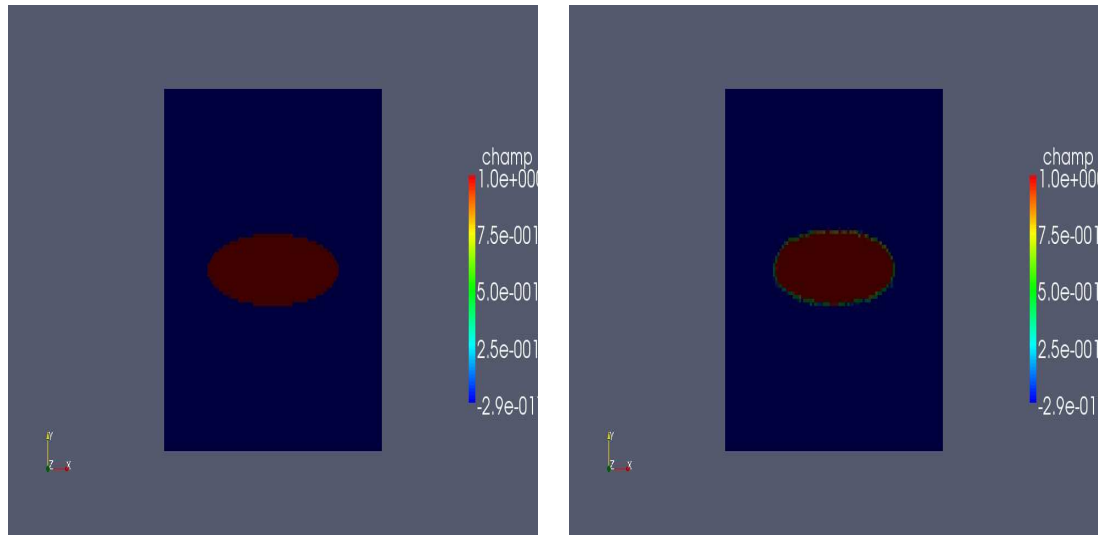
Malgré le manque de précision du champ de vitesse du au mauvais calcul des courbures, on se propose de résoudre le problème de surface minimale sur un cas test afin d'avoir une idée globale sur notre algorithme.

5.1 Cas test de l'ellipse

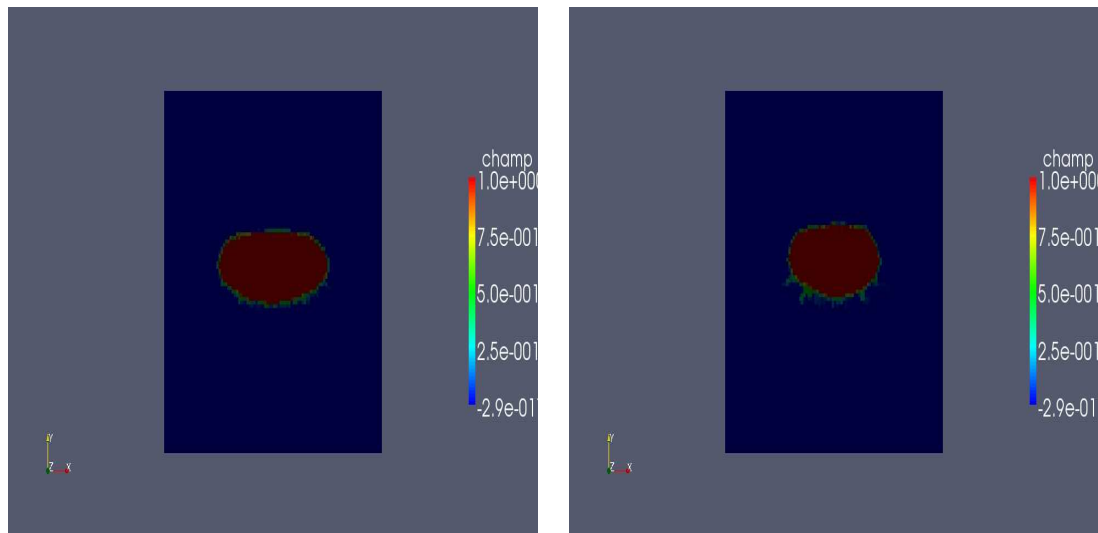
On se propose de résoudre le problème de surface minimale avec comme donnée initiale un Heaviside décrivant une ellipse. La condition initiale a le profil suivant :



On obtient les solutions suivantes :



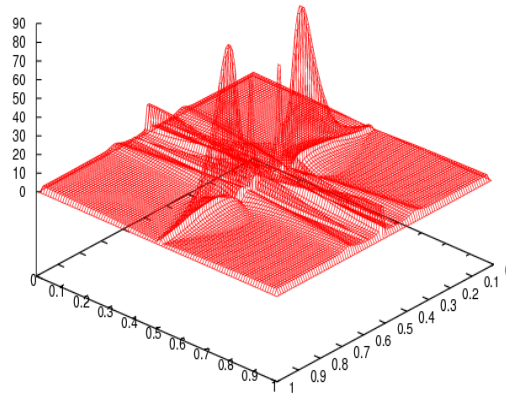
On a à droite la condition initiale sous la forme d'une ellipse et la solution à l'instant $t = 0.00152$



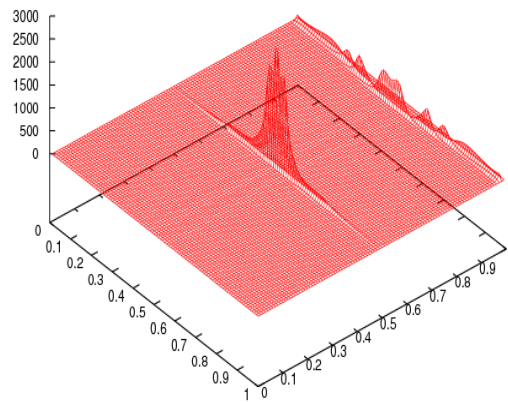
On représente là les solutions à l'instant $t = 0.00241$ (à gauche) et à $t = 0.0135$ (à droite)

Tout d'abord on observe que l'interface est mal déplacée. Cela s'explique par le fait que le champ de vitesse n'est pas bien calculé. La représentation de la norme du champ de vitesse nous donne les figures suivantes :

norme du champ de vitesse pour la condition initiale



norme du champ de vitesse pour $t=4,31 \cdot 10^{-4}$



Ainsi l'algorithme de résolution du problème de surface minimale utilisant la régularisation par calcul de la fonction distance est très imprécis car le champ de vitesse est mal calculé. En effet pour cette méthode on arrive pas établir une tendance sur le nombre d'itérations de l'algorithme de Hamilton-Jacobi pour avoir une régularisation correcte qui permet de bien calculer $u(\phi(Y)(x, t))$.

Lorsqu'on essaye de restreindre le calcul du champ de vitesse à l'interface, car ce sont ces valeurs qui nous intéressent on observe l'apparition de diffusion numérique.

Cette étude qui s'est soldé globalement par un echec nous a permis, néanmoins de mettre en évidence le comportement du schéma de Després-Lagoutière lorsqu'il est soumis à un champ de vitesse non régulier.

5.2 Étude numérique de la diffusion en fonction de la régularité du champ de vitesse

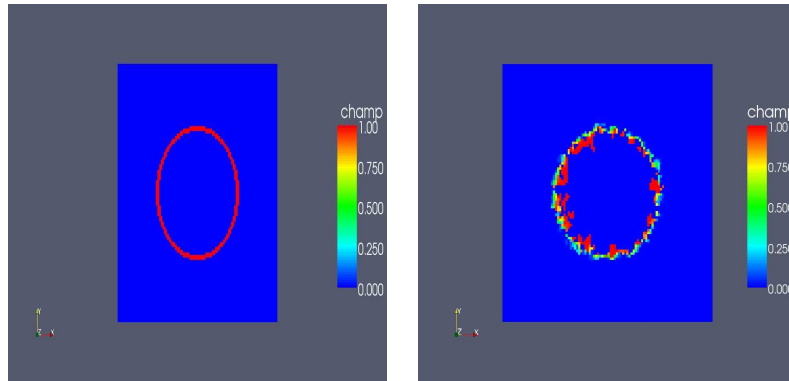
L'idée de cette étude nous est venue après avoir remarqué que le fait de restreindre le champ de vitesse créait de la diffusion numérique. Les propriétés du schéma de Després-Lagoutière ont été établies pour des champs de vitesse réguliers. Or lorsqu'on utilise un champ de vitesse qui n'est défini que sur l'interface et non plus sur tout le domaine on est plus dans le cadre de l'étude de Després-Lagoutière.

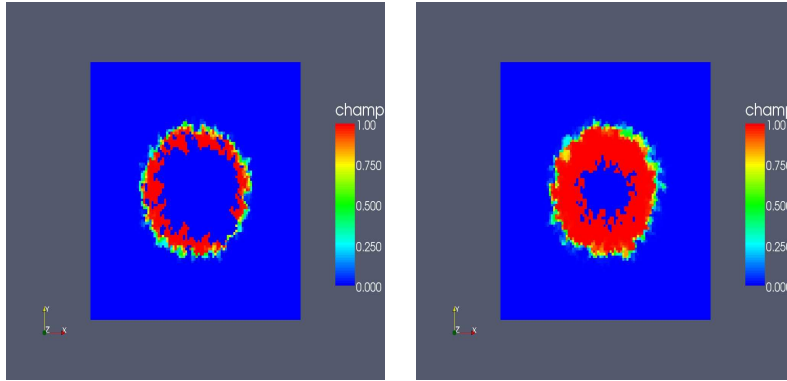
Il est difficile au niveau théorique d'établir des résultats sur le comportement du schéma avec un champ de vitesse non régulier. Dès lors une étude numérique est intéressante car elle apporte des éléments de réponse.

Ainsi on se propose d'étudier le déplacement d'une bulle décrivant un cercle avec un champ de vitesse très chahuté. On choisit alors un champ de vitesse défini selon un tirage aléatoire. Pour cela on tire deux nombres aléatoires ξ et α entre $[0, 1]$. On a alors :

$$u(x) = \begin{cases} \xi & \text{si } \alpha > 0.5 \\ -\xi & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour être plus précis dans notre diagnostic il nous faut représenter les mailles de diffusion où $0 \leq Y \leq 1$. Cependant, pour la condition initiale, on représentera les mailles où $\nabla Y \neq 0$. On obtient alors les figures suivantes :



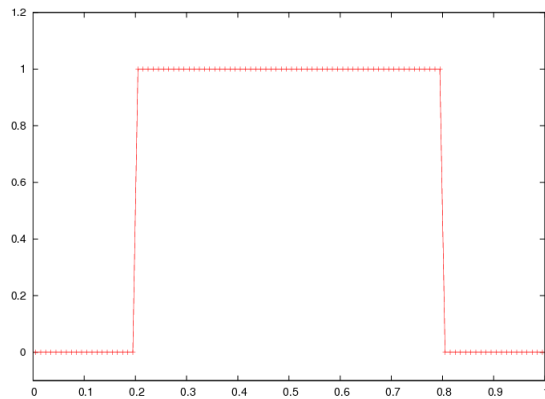


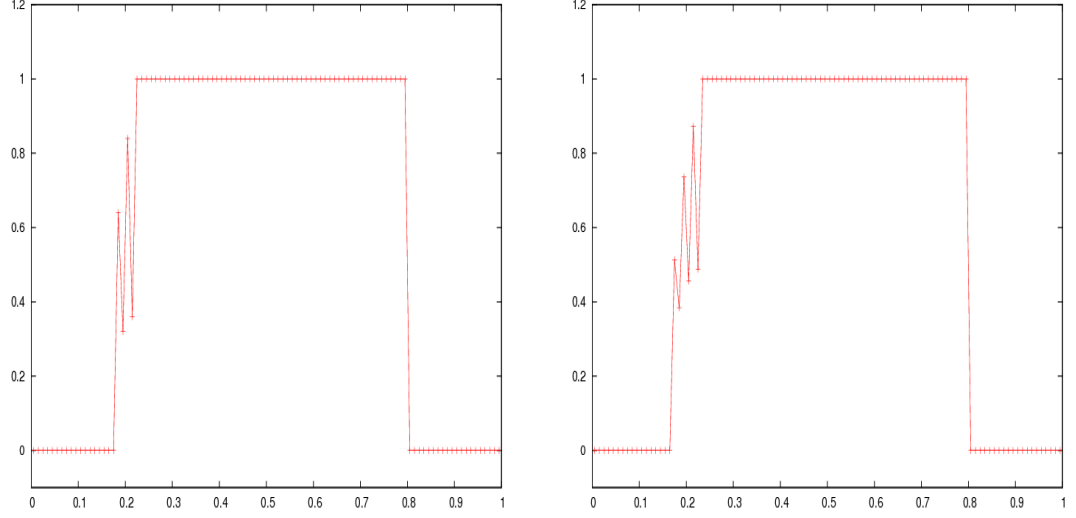
Ces figures nous montrent une progression isotrope de la diffusion numérique. En effet les valeurs représentées en rouge sont proches de $1 \text{ à } 10^{-12}$ donc cela met en défaut le fait qu'en 2D la diffusion numérique reste contrôlée à 2 ou 3 mailles.

Ainsi ceci nous permet de montrer numériquement que le schéma diffuse lorsque le champ de vitesse est non régulier. Pour confirmer ce résultat on fait le même type d'étude en 1D sur un créneau avec un champ de vitesse défini tel que :

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y = 1 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient alors les figures suivantes :





On observe ainsi que la diffusion a lieu sur plus d'une maille en 1D ce qui détruit la propriété fondamentale du schéma de Després-Lagoutière qui dit que la diffusion ne se fait que sur une maille, au plus, en 1D.

6 Régularisation par convolution

Cette nouvelle méthode de régularisation a pour objectif de **lisser la fonction Heaviside**. Cela permet d'avoir **une transition entre 0 et 1 moins brutale**, afin d'avoir une fonction régularisée **dérivable** pour pouvoir calculer les normales et les courbures locales. Cette méthode de régularisation, qu'utilise aussi Brackbill, est basée sur le calcul de la convoluée de Y avec une fonction d'interpolation. Pour calculer ϕ , on applique alors la formule de convolution suivante :

$$\phi(x) = \frac{1}{\Delta x^3} \int_{\Omega} Y(x') \mathcal{S}(x' - x) d^3 x'$$

$\mathcal{S}(x)$ doit être une fonction d'interpolation avec les propriétés suivantes :

1. Elle doit être **normalisée** au sens où on doit avoir :

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}(x) d^3 x = \Delta x^3$$

2. Elle doit être à **support borné** tel que :

$$\mathcal{S}(x) = 0 \text{ si } |x| \geq \frac{\Delta x}{2}$$

3. Elle doit être **continue, dérivable et monotone lorsque $|x|$ croît**.

Il apparaît dès lors que la dérivabilité de $\phi(x)$ dépend de celle de la fonction $\mathcal{S}(x)$ car on par exemple :

$$\nabla\phi(x) = \frac{1}{\Delta x^3} \int_{\Omega} Y(x') \nabla S(x' - x) d^3x'$$

Ainsi les fonctions de bases B-splines sont par exemple des fonctions d'interpolation qui respectent bien toutes ces propriétés.

Cependant afin de pouvoir définir le support à notre guise nous allons redéfinir $S(x)$ tel que :

$$S(x) = 0 \text{ si } |x| \geq h\Delta x$$

L'objectif est de pouvoir dilater ou rétrécir la zone de transition entre 0 et 1 car, comme le dit Brackbill, plus la zone de transition est étendue et meilleur sera le lissage de Y .

6.1 Principe de construction des fonctions de base spline

On se propose d'utiliser comme dans [1] les fonctions de base d'ordre 2. On fera aussi appel aux fonctions de base spline d'ordre 3 pour avoir plus de dérivabilité.

La fonction de base spline d'ordre 2 s'écrit alors :

$$S_2(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\xi)^2 & \text{si } -1 \leq \xi \leq 0, \\ \frac{1}{2}(1+2\xi-2\xi^2) & \text{si } 0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{1}{2}(2-\xi)^2 & \text{si } 1 \leq \xi \leq 2. \end{cases}$$

Pour la fonction de base spline d'ordre 3 on a :

$$S_3(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{6}(2+\xi)^3 & \text{si } -2 \leq \xi \leq -1, \\ \frac{1}{6}(4-6\xi^2-3\xi^3) & \text{si } -1 \leq \xi \leq 0, \\ \frac{1}{6}(4-6\xi^2+3\xi^3) & \text{si } 0 \leq \xi \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2-\xi)^3 & \text{si } 1 \leq \xi \leq 2. \end{cases}$$

On vérifie bien que ces fonctions de base sont à support borné, continues et dérivables. De plus on a :

$$\int_{\Omega} S(x) d^3x = 1.$$

Ainsi la formule de convolution devient :

$$\phi(x) = \int_{\Omega} Y(x') S(x' - x) d^3x'.$$

Voici deux illustrations des fonctions de base spline d'ordre 2 et 3

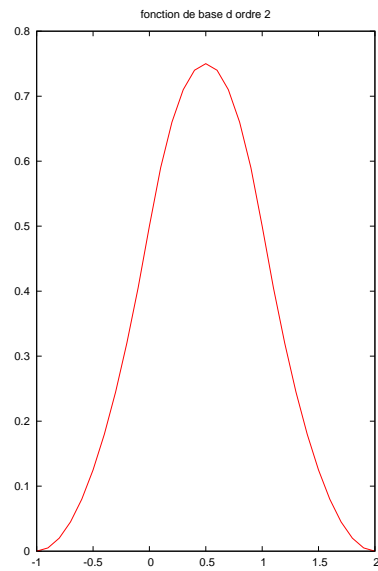


FIG. 3 – fonction de base spline d'ordre 2

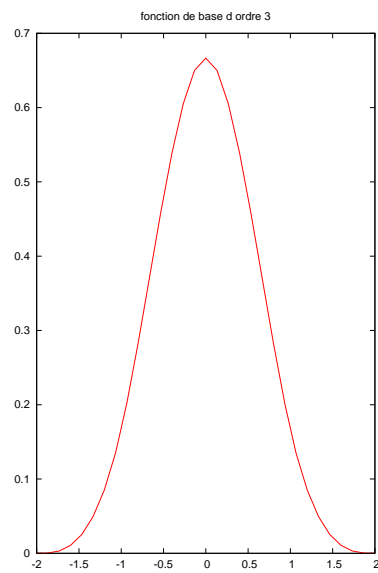


FIG. 4 – fonction de base spline d'ordre 3

Lorsqu'on dilate la spline d'ordre 2 sur un support de type $[-h\Delta x, h\Delta x]$ on obtient par exemple les représentations suivantes :

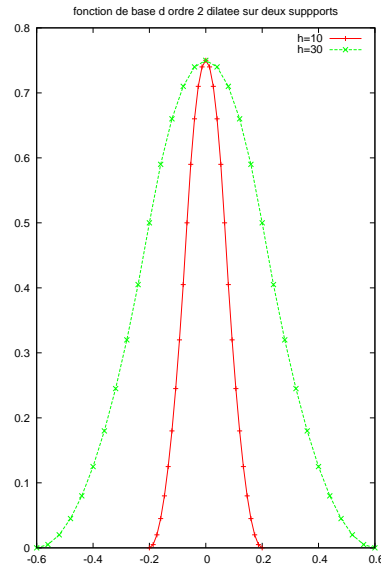


FIG. 5 – fonction de base pour $h=10$ et $h=20$ et $\Delta x = \frac{1}{50}$

Ainsi pour illustrer les effets de cette dilatation du support de la fonction de base spline, on peut calculer la régularisation de la fonction créneau sur $[0, 1]$ en 1D. On obtient alors les figures suivantes :

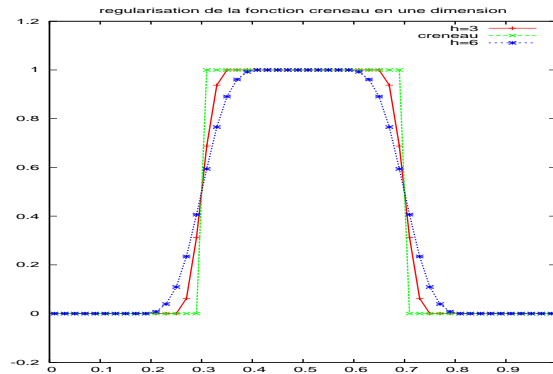


FIG. 6 – Régularisation de la fonction créneau pour $h=3$ et $h=6$

On voit bien que **lorsqu'on augmente le support de $S(x)$ la zone de transition entre $[0, 1]$ augmente**. La régularisation du cercle en deux dimensions nous donne alors les figures suivantes :

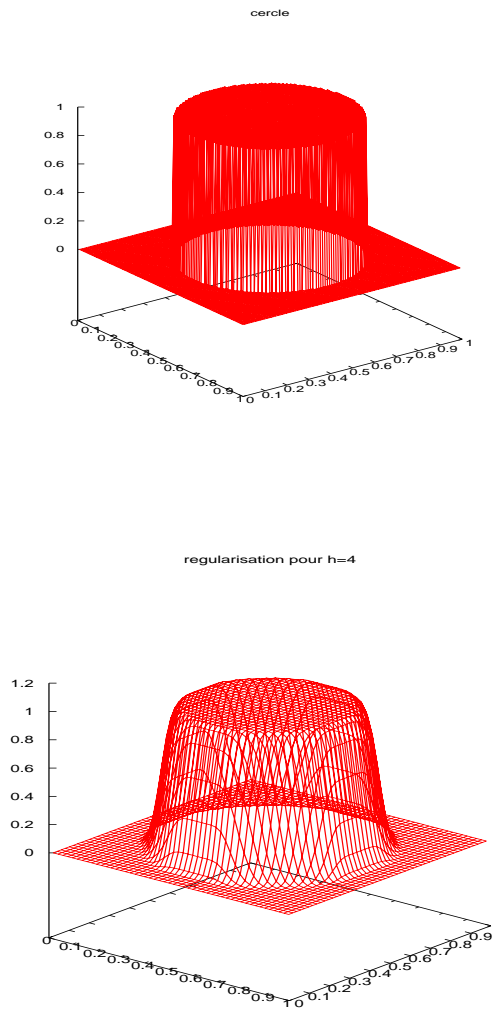


FIG. 7 – Régularisation en 2D du cercle pour une spline d'ordre 2 avec $h=4$

regularisation pour h=4 autre angle de vue

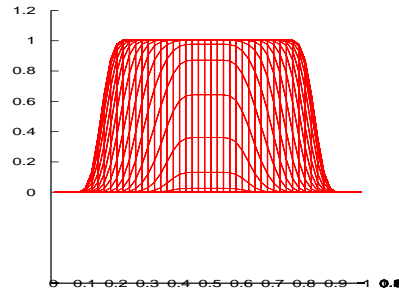


FIG. 8 – Vue de profil

6.2 Calcul des courbures locales pour le cercle en fonction du support des fonctions de base

L'objectif premier est de calculer les courbures locales sur un cercle afin de visualiser le produit des courbures locales et du rayon tel qu'on ait :

$$\gamma \times R \approx 1$$

Ce premier cas test utilise les données suivantes :

- un cercle de centre $(0.5, 0.5)$ et de rayon $\frac{1}{4}$,
- une régularisation avec une spline d'ordre 3 et $h = 8$,
- et un nombre de mailles en x et en y = 100.

La représentation du **produit $\gamma \times R$ sur l'interface** nous donne la figure suivante :

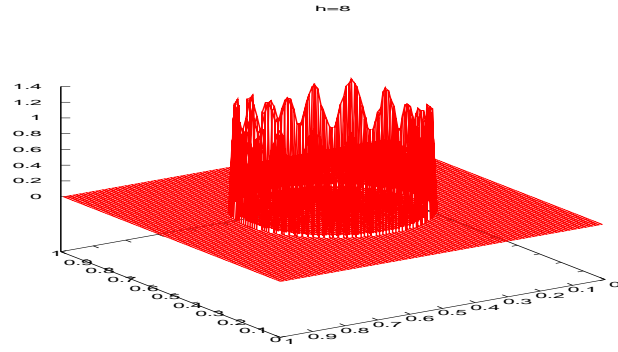


FIG. 9 – $\gamma \times R$ sur l'interface pour $h=8$

Le premier constat est que le produit $\gamma \times R$ est **chahuté**. De plus on voit qu'on a pas tout à fait $\gamma \times R \approx 1$. Ce n'est qu'en augmentant le support de la fonction de base que l'on arrive à retrouver un produit $\gamma \times R \approx 1$ et de façon uniforme sur l'interface comme le montre les figures suivantes :

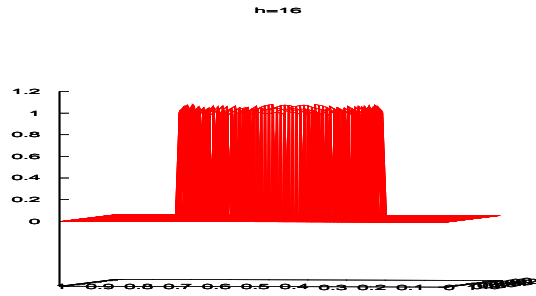


FIG. 10 – $\gamma \times R$ sur l'interface

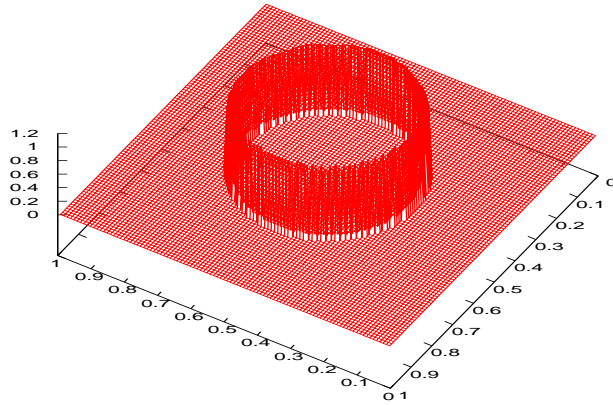


FIG. 11 – autre angle de vu

Le comportement du produit $\gamma \times R$ obtenu est en adéquation avec les résultats de Brackbill. En effet on arrive à établir que **plus zone de transition de 0 à 1 est grande, meilleur est le calcul de la courbure locale sur l'interface.**

En utilisant cette procédé technique de régularisation on arrive alors à avoir une bonne méthode pour le calcul des courbures locales.

7 Résolution du problème de surface minimale avec une régularisation par convolution

Nous allons tout d'abord observer le comportement de notre nouvelle méthode pour la résolution de (2) avec comme donnée initiale une ellipse. Le cas test étudié utilise les données suivantes :

- le domaine est du type $[0, 1] \times [0, 1]$,
- le nombre de mailles en x et en $y = 100$,
- la régularisation se fait avec une spline d'ordre 2 et $h = 3$,
- la simulation se fait pour $t \in [0, 0.0165]$.

On obtient les figures suivantes :

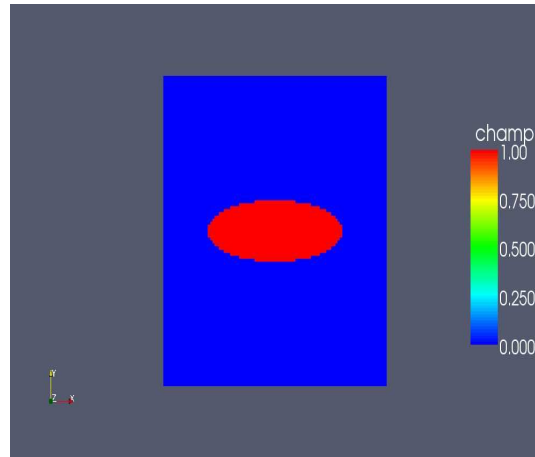
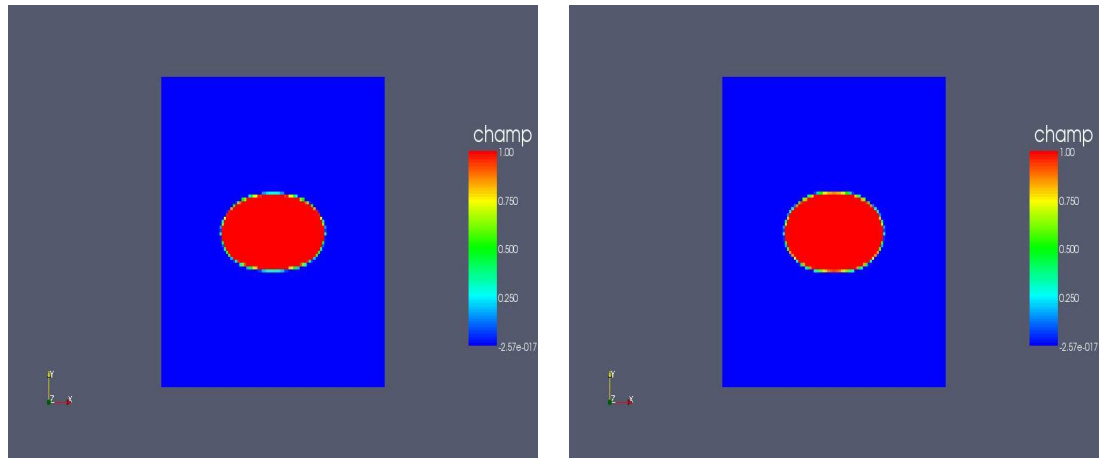


FIG. 12 – condition initiale



On a les solution à $t = 0.004s$ (à gauche) et à $t = 0.007s$ (à droite)

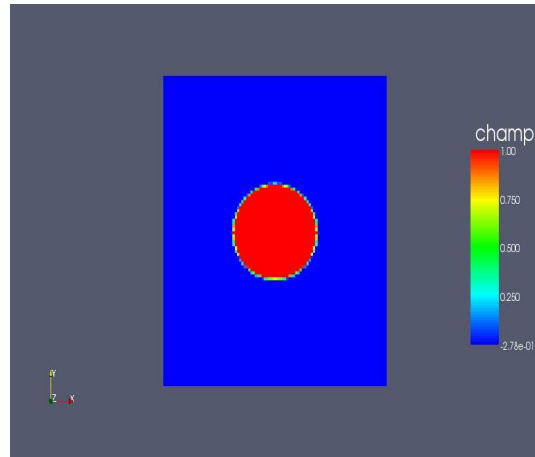


FIG. 13 – solution finale

Cette méthode donne de meilleurs résultats car notre algorithme a bien convergé vers un cercle sur une durée de $[0, 0.016]$. De plus on a aucune création de diffusion, ce qui veut dire que le champ de vitesse déforme bien l'interface aux endroits voulus pour résoudre le problème de surface minimale.

Pour savoir si notre algorithme arrive à calculer des déformations importantes, on se propose de résoudre le problème sur une figure en forme de L (avec les données précédentes) sans se soucier pour le moment de la définition de la normale et de la courbure aux points anguleux. Ainsi on obtient les images suivantes :

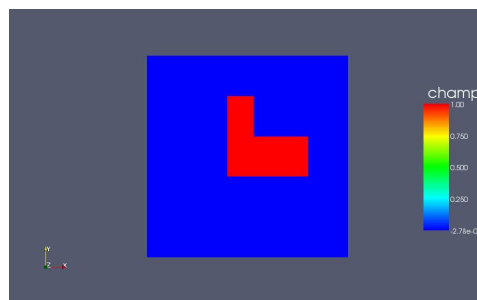
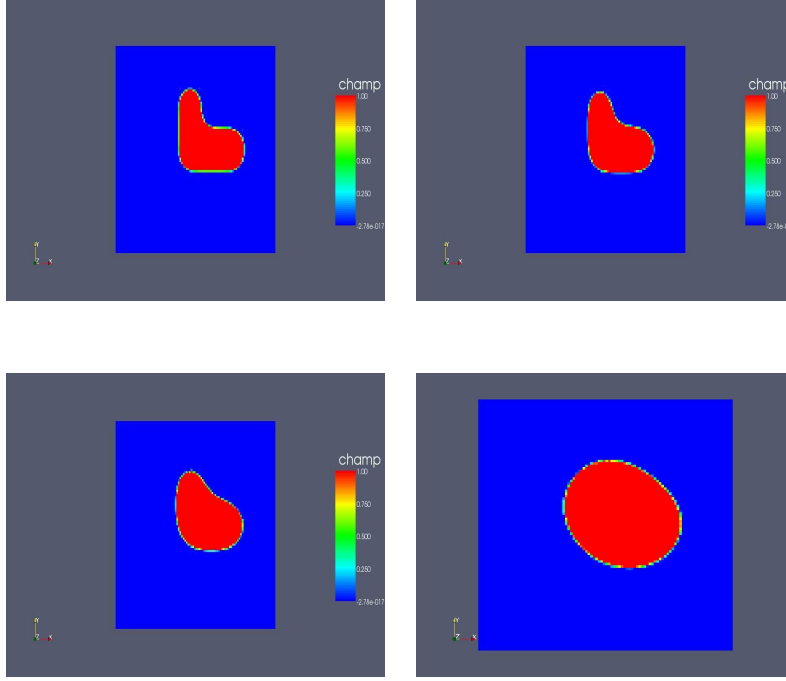


FIG. 14 – condition initiale



Ce cas test nous permet enfin de confirmer que l'algorithme calcule bien les courbures locales car on arrive à déformer correctement la bulle en forme de L. Toutefois il nous faut vérifier que la circonférence décroît et qu'on a bien conservation du volume.

7.1 Analyse de la conservation de la surface (volume en 3D) et de la décroissance de la circonférence (surface en 3D) :

Nous allons mesurer la circonférence notée \mathcal{C} par la formule suivante :

$$\mathcal{C}(t) = \int_{\Omega} |\nabla Y| \, dx$$

On reprend ainsi les cas tests de l'ellipse et du cercle. Les temps de simulation seront plus longs afin de voir si l'algorithme arrive à converger vers une solution stationnaire.

Pour tous les cas tests, on représentera la circonférence et l'aire normalisées en fonction du temps qui s'écrivent :

$$C_{norm}(t) = \frac{\mathcal{C}(t)}{2\pi R} \text{ avec } R = \sqrt{\frac{\mathcal{V}(t=0)}{\pi}}$$

$$Surf_{norm}(t) = \frac{Surf(t)}{\pi R^2}$$

Si l'algorithme converge bien vers un cercle on doit avoir :

$$C_{norm}(t) \rightarrow 1 \text{ et } Surf_{norm}(t) \approx 1$$

Lorsqu'on prend comme condition initiale l'ellipse on a alors les graphes suivants :

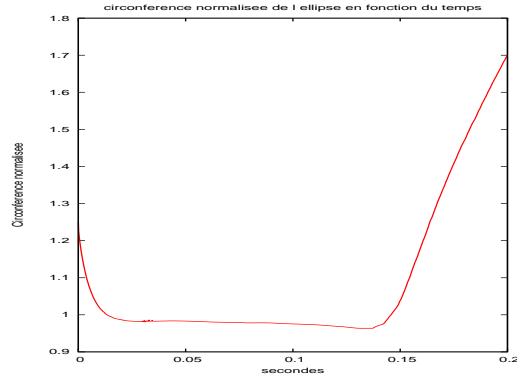


FIG. 15 – $C_{norm}(t)$ pour une ellipse

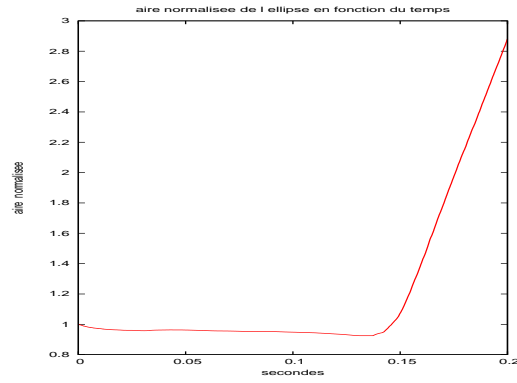


FIG. 16 – $Surf_{norm}(t)$ pour une ellipse

Malheureusement on voit que l'algorithme ne permet pas d'atteindre une solution stationnaire car bien que la circonférence décroît elle ne se stabilise pas et explose. La remarque est alors la même pour le volume de la bulle donc notre algorithme n'est pas encore conservatif en volume.

7.1.1 Algorithme conservatif en volume

On a vu que le problème de surface minimale étudié est équivalent à résoudre :

$$\partial_t Y + u(Y) \cdot \nabla Y = 0. \quad (23)$$

où $Y(t, x)$ est une fonction Heaviside tel que :

$$Y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$u(Y) = [\Gamma(\phi) - \gamma(\phi)] \mathbf{n}(\phi)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(Y)(t, x) &= Y * S(x) \\ \mathbf{n}(\phi) &= -\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \rightarrow \text{normale} \\ \gamma_{\Sigma(t)}(x) &= -\nabla \cdot \mathbf{n}(\phi) \rightarrow \text{courbure locale} \\ \Gamma_{\Sigma(t)} &= \frac{\int_{\Sigma(t)} \gamma_{\Sigma(t)}(x) d\sigma}{\int_{\Sigma(t)} d\sigma} \rightarrow \text{courbure moyenne} \end{array} \right.$$

Lorqu'on résoud l'E.D.P par splitting directionnel on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_{ij}^{n+1/2} &= Y_{ij}^n - \Delta t u_{x,ij}^n (D_x Y)_{ij,D-L}^n, \\ Y_{ij}^{n+1} &= Y_{ij}^{n+1/2} - \Delta t u_{y,ij}^{n+1/2} (D_y Y)_{ij,D-L}^{n+1/2}, \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{x,ij}^n &= (\Gamma^n - \gamma_{ij}^n) \mathbf{n}_{x,ij}^n \\ u_{y,ij}^n &= (\Gamma^{n+1/2} - \gamma_{ij}^n) \mathbf{n}_{y,ij}^n. \end{array} \right. \quad (24)$$

Les quantités $(D_x Y)_{ij,D-L}^n$ et $(D_y Y)_{ij,D-L}^{n+1/2}$ représentent le gradient de Y calculé dans le schéma Després et Lagoutière.

Pour conserver le volume il nous faut :

$$\sum_{ij} Y_{ij}^{n+1} = \sum_{ij} Y_{ij}^n. \quad (25)$$

Ce qui se ré-écrit :

$$\sum_{ij} u_{x,ij}^n (D_x Y)_{ij,D-L}^n + u_{y,ij}^{n+1/2} (D_y Y)_{ij,D-L}^{n+1/2} = 0 \quad (26)$$

En remplaçant les champs de vitesse $u_{x,ij}^n$ et $u_{y,ij}^{n+1/2}$ dans (26) on trouve que pour obtenir (25) il faut les courbures moyennes suivantes :

$$\Gamma^n = \frac{\int_{\Omega} \gamma^n d\sigma}{\int_{\Omega} d\sigma}$$

$$\Gamma^{n+1/2} = \frac{\sum_{ij} (\gamma_{ij}^n - \Gamma^n) \mathbf{n}_{x,ij}^n (D_x Y)_{ij,D-L}^n + \gamma_{ij}^n \mathbf{n}_{y,ij}^n (D_y Y)_{ij,D-L}^{n+1/2}}{\sum_{ij} \mathbf{n}_{y,ij}^n (D_y Y)_{ij,D-L}^{n+1/2}}$$

Ainsi nous avons identifié les courbures moyennes à calculer avec le splitting directionnel pour que l'algorithme soit conservatif.

8 Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons tout d'abord décrit la méthode numérique qui permet de simuler numériquement l'évolution d'une interface. Nous avons vu qu'elle consistait à résoudre une équation de transport d'un Heaviside via le schéma numérique de Després-Lagoutière. En effet c'est la précision de ce schéma qui permet de capturer implicitement l'interface par la surface de discontinuité de la fonction Heaviside.

D'autre part nous avons explicité le champ de vitesse qui permet de déformer la bulle pour résoudre un problème de surface minimale. Ainsi pour calculer ce champ de vitesse nous avons vu qu'il faut pouvoir approcher les normales à l'interface, les courbures locales et la courbure moyenne. Mais il faut surtout pouvoir bien régulariser la fonction Heaviside pour avoir un calcul précis des courbures locales.

Ainsi la régularisation de la fonction Heaviside nous a permis d'expérimenter deux méthodes : une par calcul de la fonction distance à l'interface, et l'autre par convolution avec une fonction spline. Il apparaît au bout de cette étude que la régularisation par calcul de la fonction distance via la résolution d'une E.D.P de type Hamilton-Jacobi est très imprécise. De plus, on n'arrive pas à déterminer numériquement le niveau de régularisation nécessaire en fonction du maillage pour pouvoir calculer correctement le champ de vitesse $V_{\Sigma(t)}$.

Par ailleurs cette méthode de régularisation nous a permis de mettre en évidence numériquement un comportement inattendu du schéma de Després-Lagoutière. En effet nous avons pu établir que lorsqu'on utilise un champ de vitesse non régulier le schéma crée de la diffusion numérique.

Concernant la méthode de régularisation par convolution avec les fonctions de base spline nous avons pu précisément calculer les courbures locales en observant que plus la zone de transition entre 0 et 1, pour la régularisée, est importante, meilleure est le calcul des courbures locales.

Pour finir nous avons bien réussi à déformer des bulles vers la sphère. Ceci montre que le calcul du champ de vitesse se fait bien lorsque l'on régularise par la convolution. Néanmoins notre algorithme ne nous permet pas encore de converger vers une solution stationnaire. Cependant on a observé que la difficulté réside dans le calcul de la bonne courbure moyenne. Ainsi cette problématique peut faire l'objet de futures études.

Références

- [1] Brackbill J.U, Kothe D.B et Zemach C. -*A continuum method for modeling surface tension*- J. of Com Phys., 100(2), p. 335-354, 1992
- [2] Penel Y., Mekkas A., Dellacherie S., Ryan J. et Borrel M. -*Application of an AMR strategy to an abstract bubble vibration model*- Soumis à 19th AIAA Computational Fluid Dynamics, San Antonio, Texas, 22-25 juin 2009.
- [3] Deprés B. et Lagoutière F. -*Un schéma non linéaire anti-dissipatif pour l'équation d'advection linéaire*- C.R Acad Sci., Paris, Série I, Math., 328, p. 939-944, 1999.
- [4] Escher J. et Simonett G. - *The volume preserving mean curvature flow near spheres* - Proceedings of the American Mathemaical Society, 126 (9) , p. 2789-2796, 1998.
- [5] Elisabeth Rouy et Agnès Tourin - *A viscosity solutions approach to shape from shading* SIAM J. Numer anal 29 (3), 867 (1992).