

Stage de fin d'études
Du 2 Avril au 27 Septembre 2013

Projection de champs d'un maillage quelconque vers un maillage tétraédrique



Electricité de France
Division R&D
Département THEMIS

LAMHATTAT EL MEHDI

Encadrant

- Jean Yves ROGER
- Olivier MOREAU

Appui

- Antoine JOURNAUX
- Karim BEDDECK

Remerciements

Je remercie mon tuteur, Mr Jean-Yves ROGER pour son accueil chaleureux, son aide précieuse et surtout de m'avoir permis de participer à ce projet

Mes plus vifs remerciements aussi à tous les membres du département THEMIS pour leurs présences et le respect qu'ils portent à leurs stagiaires de manière générale

Finalement je tiens à remercier toute personne ayant participé de loin ou de près à la réussite de ce projet.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Présentation générale	4
2.1	Présentation du groupe EDF	4
2.1.1	Organisation et structure	4
2.1.2	EDF à travers le monde	4
2.2	La division Recherche et Développement	5
2.2.1	Organisation générale	5
2.2.2	Le site des Renardières	6
2.2.3	Le site de Chatou	6
2.2.4	Le site de Clamart	6
2.3	Le département THEMIS	6
2.4	Présentation du sujet	7
2.5	Présentation du code _Interpol	8
3	Chaînage de codes	8
3.1	Introduction	8
3.2	Maillage	9
3.3	Principe de projection	10
4	Les éléments de Whitney	10
4.1	Historique	11
4.2	Outils de bases	11
4.3	Complexe de Whitney	12
4.4	Notion d'élément de référence	14
5	Méthode de projection orthogonale	15
6	Assemblage de la matrice M_{TD}	18
6.1	Quadrature de GAUSS	18
6.1.1	Génération de points de gauss sur l'élément de référence du maillage cible	19
6.1.2	Calcul de la matrice (M_T)	20
6.1.3	Calcul des coordonnées des points de gauss dans l'élément réel du maillage cible	20
6.1.4	Localisation des points de gauss dans le maillage source	21
6.1.5	Calcul des coordonnées des points de gauss dans l'élément de référence du maillage source	22
6.1.6	Interpolation des valeurs de u_D aux points de quadrature	23
6.1.7	Calcul de la matrice (M_{TD})	23
6.1.8	Calcul de la solution u_T	23
6.2	Intersection de volumes	24
7	Orientation	24
7.1	Orientation des éléments	24
7.1.1	Orientation d'un tétraèdre	24
7.1.2	Orientation d'un hexaèdre	25
7.2	Normales sortantes d'un élément	26
8	Application numérique	27
8.1	Éléments finis nodaux	28

8.2	Eléments finis volumiques	32
9	Conclusion	36
10	Bibliographie	37

1 Introduction

Les sciences nous apportent dans les domaines de la mécanique, de la thermique et de l'électromagnétisme un ensemble de lois physiques qui peuvent être modélisées mathématiquement sous la forme d'équations aux dérivées partielles. Cependant dans un univers assez complexe ces différents domaines de la physique interviennent souvent de manière couplée. C'est dans ce cadre ci que s'inscrit mon stage de fin d'études de six mois au sein du département THEMIS de la division recherche et développement d'EDF à Clamart, j'ai eu à travailler dans le domaine du couplage multiphysique, qui de part la pluralité des disciplines qui y sont représentées, reste un sujet à explorer.

Pour le groupe EDF, la compréhension du fonctionnement, la prédiction du comportement et l'estimation de la durée de vie des machines électriques (alternateurs et transformateurs) est un enjeu important, tant technologique qu'économique. Par nature ces machines font intervenir des physiques souvent séparées dans les études comme dans la simulation, l'électromagnétisme et la thermique par exemple. Or la puissance des calculateurs actuels permet d'envisager des études multiphysiques pouvant rendre compte de toute la complexité de ces machines. Plutôt que de créer des codes de calculs plus complexes, on envisage de coupler entre eux les codes existants. Cette technique permet d'une part de conserver les performances de chacun des codes, mais également de travailler sur des maillages différents pour tenir compte des spécificités des différents domaines.

Durant la première partie de ce stage, il était essentiel de fournir un travail de documentation afin de bien comprendre les différentes méthodes de projection existante et ainsi pouvoir mettre en oeuvre les différents algorithmes dont on aura besoin, tout en essayant de bien maîtriser le code `_Interpol` existant, compte tenu du nombre important de modules existants. Durant la deuxième partie du stage, le travail s'articule principalement sur la programmation scientifique des différents algorithmes mis au point durant la première partie du stage.

Dans ce rapport on introduira tout d'abord les différentes notions mathématiques mises en jeu avant d'aborder la méthode de projection utilisée durant ce stage.

2 Présentation générale

2.1 Présentation du groupe EDF

Créée le 8 avril 1946, Electricité de France (EDF) profite de la loi de nationalisation des activités de production, transport, distribution, exportation et importation de l'électricité en France.

Forte de ce regroupement de compétences, de moyens et de réseaux, EDF est devenue aujourd'hui l'une des plus importantes entreprises françaises, réalisant en 2012 un chiffre d'affaires de 72,7 milliards d'euros pour une production d'électricité totale de 700 TWh ce qui la place au rang de premier producteur et fournisseur d'électricité dans le monde.

Ayant pour mission d'assurer en permanence la fourniture de l'énergie électrique à ses 37 millions de clients à travers le monde dans des conditions optimales de coût, de qualité du service et de sécurité d'alimentation, EDF emploie actuellement 107 333 personnes dont 2110 postes sont dédiés à la recherche et développement.

2.1.1 Organisation et structure

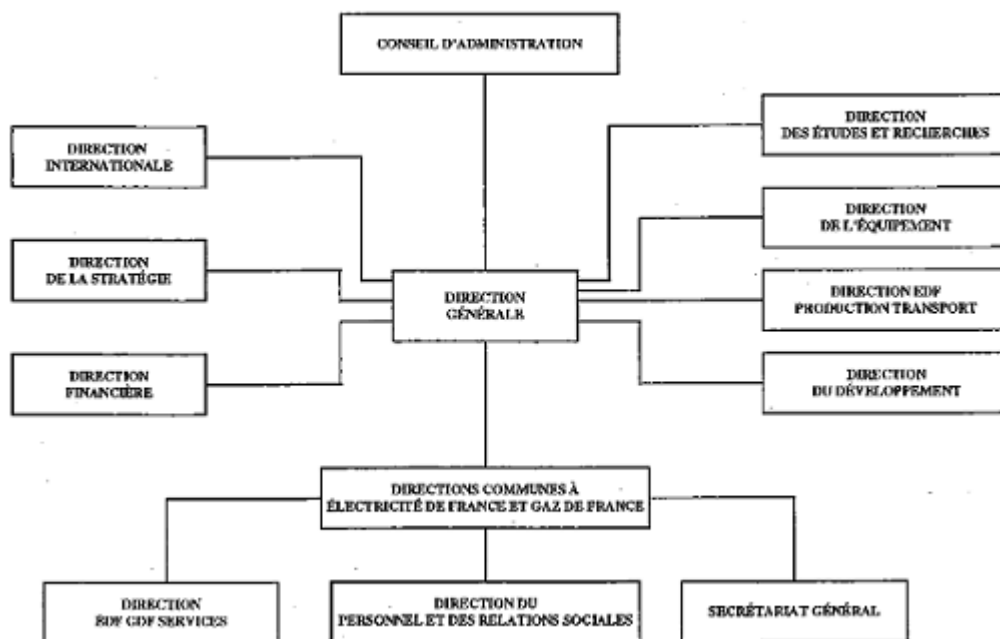


Figure 1. Organigramme du groupe EDF

2.1.2 EDF à travers le monde

Au sein de l'union européenne, EDF est le premier exportateur d'électricité. Electricité de France est attentive aux questions clés de son secteur; comme la protection de l'environnement, la croissance des besoins dans les zones à fort développement économique, l'amélioration de la sûreté des centrales nucléaires.

EDF développe une politique internationale hors UE fondée sur des investissements, des prises de position par le biais du holding EDF Internationale SA créée en 1992 et la vente de services. Elle s'appuie sur des partenariats solides avec des électriciens, des industriels et des investisseurs. Aux côtés de ses partenaires, EDF est ainsi présente de manière significative dans un ensemble de sociétés représentant environ 1,5 milliards d'euros d'actifs, 11 000 MWe de puissance installée dans la production d'électricité et près de 4 millions de clients.

La consommation d'électricité en Europe, comme dans les autres pays à haut niveau de vie ayant tendance à marquer un palier, c'est au sein de régions en plein développement comme l'Asie du sud est qu'EDF devrait augmenter rapidement son développement à l'international.

2.2 La division Recherche et Développement

2.2.1 Organisation générale

La division Recherche et Développement (EDF R&D) a pour mission d'apporter une expertise et des compétences scientifiques pour résoudre les problèmes techniques que posent la conception, la réalisation ou encore l'exploitation des réseaux et des centrales de production. EDF R&D étudie également de nouveaux matériels, l'utilisation des énergies nouvelles ou encore l'amélioration de la qualité du produit, de sa fourniture, le tout en liaison avec les autres divisions d'EDF, le CNRS, le CEA et les laboratoires de recherche universitaires et industriels, français et internationaux.

Pour mener à bien cette mission, EDF R&D dispose d'un effectif d'environ 2600 personnes et d'un budget annuel de 500 millions d'euros.



Figure 2. Présence géographique d'EDF R&D en France

Depuis janvier 2012, EDF R&D est organisée de façon matricielle, une direction des programmes (nucléaire, commercial, distribution) établit la stratégie à moyen terme et arbitre les budgets annuels ou pluriannuels des actions de recherche et projets intégrés. La direction des laboratoires, regroupant 16 départements, fournit les compétences pour mener à bien ces projets.

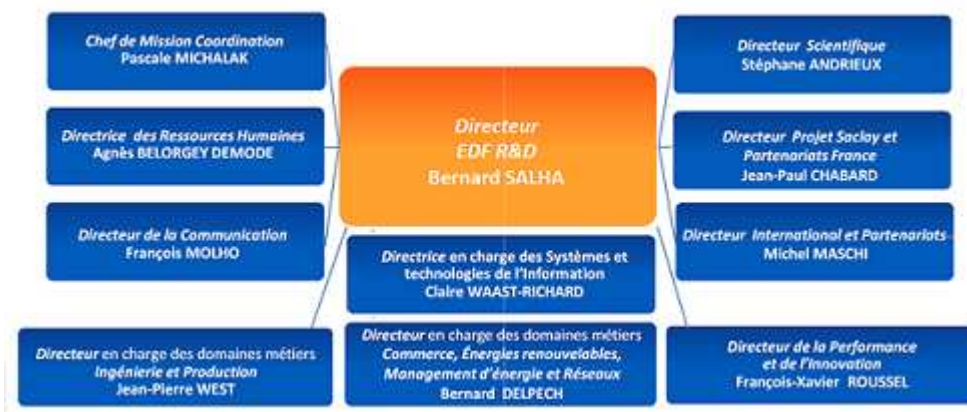


Figure 3. Organigramme EDF R&D

2.2.2 Le site des Renardières

Les domaines de recherche des 600 chercheurs et techniciens s'étendent de l'efficacité énergétique au vieillissement des matériaux des installations thermiques et nucléaires, en passant par le développement des énergies renouvelables. Il s'agit notamment de s'assurer des performances des matériels utilisés sur les réseaux, de développer des techniques nouvelles d'utilisation de l'électricité dans l'habitat et l'industrie et de faire face aux défis liés à l'exploitation dans la durée des installations nucléaires d'EDF. Le site des Renardières (Seine et Marne) abrite aujourd'hui des laboratoires d'avant garde, dont certains en partenariat avec les plus grands énergéticiens mondiaux.

2.2.3 Le site de Chatou

Le centre de recherche de Chatou (Yvelines) regroupe près de 500 chercheurs et techniciens. Ce centre occupe l'un des premiers rangs mondiaux dans le domaine de l'hydraulique et de la mécanique des fluides. Les activités du site sont globalement centrées sur l'énergétique appliquée aux moyens de production d'électricité, qu'ils soient conventionnels (Thermique, Hydraulique, Nucléaire) ou qu'ils relèvent des énergies renouvelables (Photovoltaïque, etc ...). Enfin, une part croissante de l'activité de recherche est conduite dans le cadre de partenariats à l'échelle nationale, européenne ou internationale.

2.2.4 Le site de Clamart

Avec près de 1000 chercheurs et techniciens, le site de Clamart (Hauts de Seine) est le siège de la R&D et y abrite les fonctions centrales. Les champs d'expertise et les compétences mises en oeuvre sur le site sont variés; nucléaire, mécanique, génie logiciel, mathématiques et simulation numérique, économie de l'électricité et séminologie. On y trouve plusieurs laboratoires expérimentaux dans des domaines comme les machines tournantes, l'électronique de puissance, la qualité de l'électricité, les téléservices et la maison communicante.

2.3 Le département THEMIS

Le département THEMIS est constitué de groupes. En plus de l'antenne de gestion, 49 agents statutaires constituent le personnel permanent du département, 4 personnes non statutaires complètent l'effectif présent au département. Chaque année, le département reçoit une vingtaine de stagiaires.

Les activités assurées par le département se partagent en plusieurs catégories; activités tertiaires, activités d'essais (en laboratoire ou sur site) et expertises de matériels sur site. Pour les activités d'essais, le département THEMIS possède un laboratoire d'essais situé sur le site de Clamart (essais sur les machines tournantes).

Le département comporte 3 groupes qui travaillent sur des thématiques assez différentes :

- Groupe R21 : Disponibilité des équipements électriques; transformateurs et alternateurs.
- Groupe R22 : Mécanique et électrotechnique des entraînements, nouvelles applications et technologies ENR
- Groupe R26 : Code, Modélisation, Électromagnétisme et transitoires

A ces groupes s'ajoute l'état major du département, constitué du chef du département et son délégué, ainsi qu'une antenne de gestion. Trois personnes assurent la fonction de gestion, ainsi qu'un appui sur certaines fonctions support pour le département; informatique, gestion budgétaire et gestion RH.

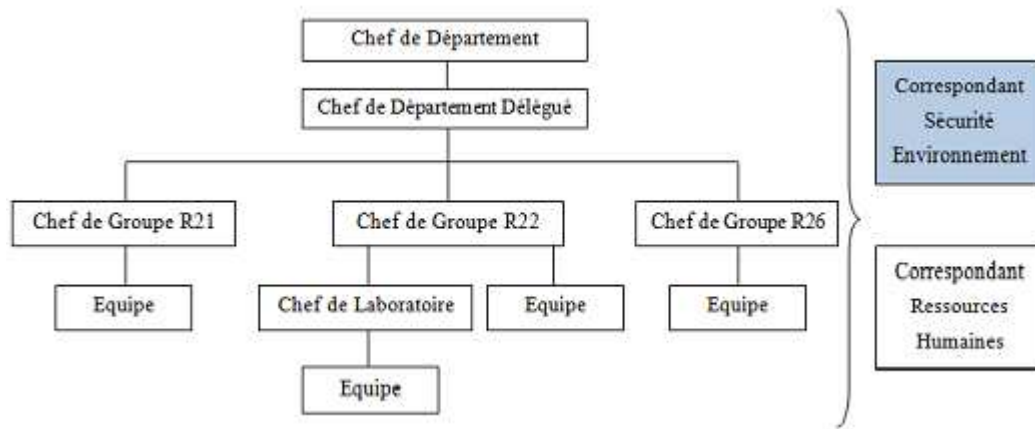


Figure 4. Organigramme du département THEMIS

2.4 Présentation du sujet

La réalisation d'un calcul numérique prenant en compte plusieurs phénomènes peut s'envisager de plusieurs façons. La première serait de travailler sur le même maillage pour les différents domaines mis en jeu. Si on a à notre disposition un maillage permettant de caractériser les données pour chacune des physiques mises en jeu, il suffirait de construire un maillage unique pour la simulation multiphysique comme étant une intersection, au sens de la densité de maille par exemple, des différents maillage.

Cependant, en utilisant cette technique, on risque de se pénaliser, en faisant croître inutilement la taille du problème à résoudre, et par conséquent le temps de calcul. Alors qu'en conservant, les maillages spécifiques à chaque domaine physique, on garantit la rapidité et la convergence de chacun des calculs. Rapidité et convergence globale, sont garanties à deux conditions; que le temps de projection entre les maillages ne soit pas pénalisant, et que la méthode employée n'entrave pas la convergence de la solution couplée.

Le couplage passe par la projection de quantités scalaires et/ou vectorielles, d'un maillage source vers un maillage cible. Cette technique a fait l'objet de plusieurs études au sein du département THEMIS, donnant ainsi naissance à l'outil Interpol, qui dans sa dernière version ne prenait en compte que des maillages de type tétraédrique.

L'objectif de ce stage de fin d'études est de généraliser la démarche à de nouveaux types d'éléments finis, et ainsi permettre de projeter des champs d'un maillage quelconque vers un maillage tétraédrique.

2.5 Présentation du code `_Interpol`

`code_Interpol` se propose d'être un outil généraliste permettant le passage d'une solution donnée à un maillage vers un autre. Ce code propose trois grands types de méthodes

- . Méthode d'interpolation
- . Méthode de projection conservative
- . Méthode de projection orthogonale

Le projet a été initié par N. Nemitz du département THEMIS, le code étant à l'origine destiné à interpoler des solutions par relocalisation de points. Cette base a permis par la suite de tester les fonctionnalités de calcul d'intersections. La version ancienne du programme prenant en charge les interpolations et les projections conservatives des fonctions scalaires discrétisées aux noeuds. L'application dédiée était alors le couplage magnéto-thermique entre `code_Aster` et `code_Carme3D`.

Dans sa version récente développée par A. Journeaux en thèse au département THEMIS, `code_Interpol` a vu s'étendre ses fonctionnalités. On peut aussi projeter des champs vectoriels en plus des champs scalaires déjà existants, tout en y retrouvant de nouvelles méthodes de projection notamment la méthode de projection orthogonale adaptative.

3 Chaînage de codes

3.1 Introduction

L'appréhension de la complexité multiphysique de certains phénomènes constitue un défi important pour la recherche et l'industrie. Celle-ci a d'ailleurs de plus en plus recours à l'outil informatique pour modéliser ces phénomènes. Une voie prometteuse est le couplage de codes de calcul qui permet de faire communiquer des outils informatiques et d'éviter de programmer dans un logiciel unique qui traite souvent qu'une seule partie du problème.

Par exemple, l'étude des machines électriques tournantes nous conduit à travailler sur deux logiciels, `code_Aster` ou `code_Syrthes` pour la modélisation de la température et `code_Carmel3D` pour la modélisation électromagnétique. Pour effectuer un calcul couplé, on fait communiquer les deux milieux à travers une interface de couplage. Le principe réside en un calcul séquentiel des deux codes avec des échanges réguliers d'informations ou plus précisément de quantités physiques sur l'interface de couplage.

Dans le cadre du couplage magnéto-thermique le `code_Aster` transmet une température à `code_Carmel3D` et reçoit des pertes de joules. Après un certain nombre d'échanges successifs, on atteint un état stationnaire couplé dans lequel le système et les quantités échangées n'évoluent plus.

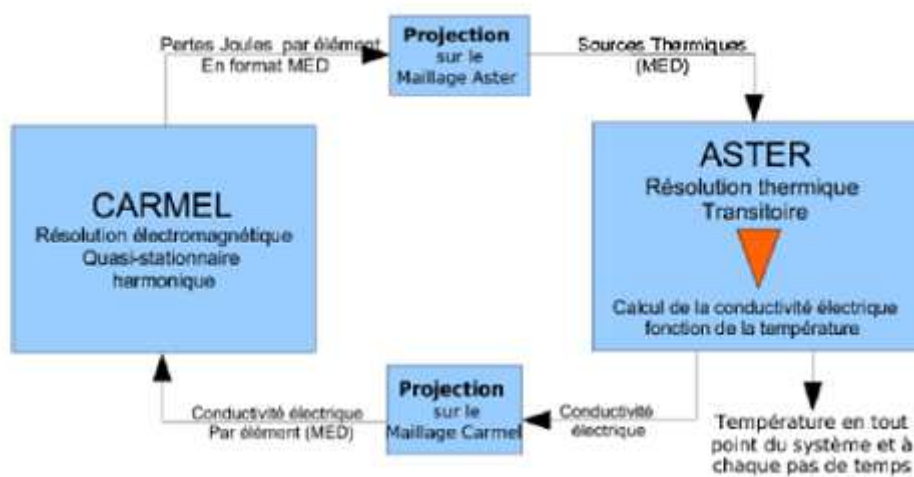


Figure 5. Exemple de chaînages de codes via l'outil Interpol

3.2 Maillage

La nécessité de mailler le domaine d'étude est née de la difficulté à résoudre des problèmes complexes dans un domaine d'étude continu. En discrétisant le problème, on simplifie la résolution, cependant ce découpage ne peut se faire de n'importe quelles manières, il doit obéir essentiellement à deux conditions

- . Pas de recouvrement
- . Pas de trou

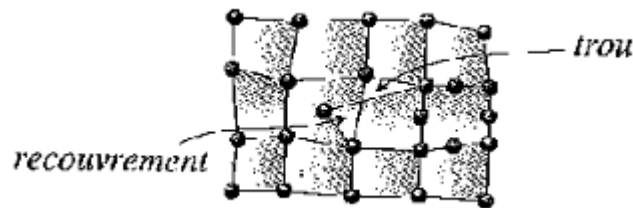


Figure 6. Exemple de recouvrement et de trou

Il ne faut cependant pas perdre de vue la réalité et s'assurer de l'écart entre le modèle discret et le modèle réel continu. Pour cela, le maillage est choisi pour sa capacité à représenter avec le moins d'erreur possible la géométrie et les résultats, tout en garantissant des temps de calculs faibles, en évitant de mailler trop finement les zones sans grandes variations de grandeurs physiques. De plus, chaque domaine (Mécanique, Thermique, ...) requiert le maillage de zones spécifiques étudié.

Par exemple, un calcul d'électromagnétisme, nécessite le maillage de l'air, contrairement au calcul mécanique. Ajoutons enfin, qu'au-delà du problème de discrétisation géométrique, se pose la question de la représentation des champs; classiquement, les calculs fluides se font en volumes finis, les calculs de structures en éléments finis LAGRANGIEN, et l'électromagnétisme avec les éléments de WHITNEY. Ainsi un maillage M est spécifiquement étudié pour pouvoir représenter une physique P .

3.3 Principe de projection

On étudie un objet O , dans notre cas il s'agit d'un cube unitaire, dans deux physiques, P_1 et P_2 tel que P_2 soit en fonction de P_1 , $P_2 = P_2(P_1)$.

Et on a à notre disposition un maillage M_1 pour la physique P_1 et un maillage M_2 pour la physique P_2 .

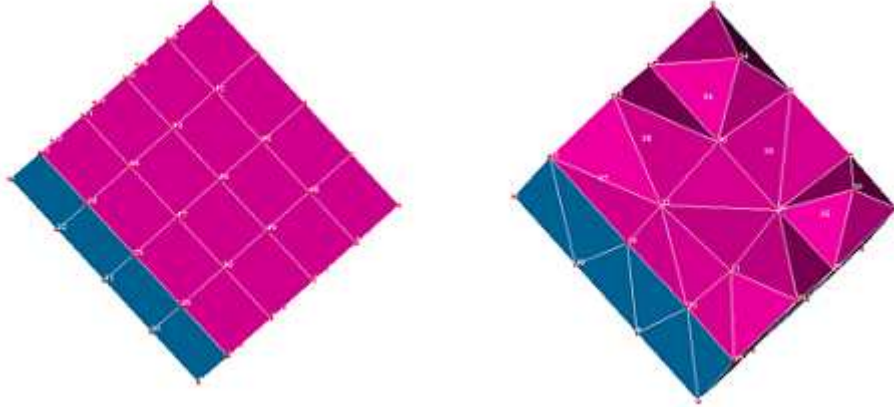


Figure 7. le maillage M_1 à gauche et le maillage M_2 à droite

On suppose, que M_1 et M_2 sont chacun optimisés pour leurs physiques respectives, selon certains critères propres à ces physiques. On se fixe ici pour objectif de projeter les solutions de la physique P_1 , initialement sur M_1 , sur le maillage M_2 afin de pouvoir évaluer la physique P_2 aux noeuds de ce dernier maillage. Cependant M_2 , n'est pas optimisé pour représenter la solution de la physique P_1 , on ne peut donc pas s'attendre à ce que la projection soit parfaite, sans pertes d'informations.

On peut évaluer la qualité de la projection par une étude de l'erreur commise durant la phase de projection, pour cela on doit projeter la solution deux fois. D'abord du maillage source M_1 vers le maillage cible M_2 , ensuite du maillage cible M_2 vers le maillage source M_1 afin de reconstituer la solution source, on peut alors comparer les deux solutions; la solution initiale et celle de la double projection.

4 Les éléments de Whitney

Dans le cadre déterministe, l'électromagnétisme est décrit par le modèle mathématique des équations de Maxwell, de notre part on se mettra dans le cadre d'un régime quasi stationnaire. Ce système d'équations aux dérivées partielles décrit le comportement électromagnétique de tout système. En présence des structures complexes, leur résolution analytique n'est plus concevable. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes de résolution numériques, qui font appel à des techniques de discrétisation. Ces méthodes transforment les équations aux dérivées partielles en systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation des champs électromagnétiques.

La méthode numérique que nous allons considérer dans ce stage pour la discrétisation spatiale des équations est la méthode des éléments finis, elle s'adapte aisément à des géométries complexes, contrairement à la méthode des différences finis.

4.1 Historique

En 1957, Whitney a inventé une famille d'objets géométriques; il s'agit des formes de Whitney, des formes différentielles linéaires par morceaux sur un complexe simplicial en dimension d quelconque. Ces objets introduits à une époque où il n'était guère question d'éléments finis, forment une structure très riche, qui s'avère être le cadre idéal pour comprendre les concepts modernes de formulations variationnelles.

Les éléments de Whitney ont été redécouverts par les numériciens à partir de 1975 en relation avec la recherche d'éléments finis mixtes. En 1977, Raviart et Thomas ont introduit les éléments mixtes pour résoudre des problèmes elliptiques en deux dimensions. En 1980, Nédélec a généralisé ces éléments en trois dimensions et proposé deux familles d'éléments mixtes; une famille conforme en $H(\text{rot})$ et l'autre en $H(\text{div})$. Avec ces éléments, les degrés de liberté ne peuvent pas être assignés aux noeuds mais seulement aux arêtes, faces et volumes du maillage.

4.2 Outils de bases

Soit Ω un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^d . Dans la suite on notera par u une fonction scalaire définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} , x un point de \mathbb{R}^d et par U une fonction vectorielle définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^d .

On définit les opérateurs différentiels grad, rot et div en dimension 3 et leurs domaines d'application comme étant, pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $U \in \mathcal{D}'(\Omega)^d$

$$\begin{aligned}\text{grad } u &= (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u) \\ \text{rot } U &= (\partial_y u_z - \partial_z u_y, \partial_z u_x - \partial_x u_z, \partial_x u_y - \partial_y u_x) \\ \text{div } U &= \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z\end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser ces opérateurs qui sont définis pour des champs scalaires ou vectoriels différentiables en sens classique, à des opérateurs en sens faible. Une fonction aura le gradient en sens faible même si elle n'est pas différentiable en sens classique.

Les espaces qui correspondent aux domaines des opérateurs grad, rot, et div sont les suivants

$$\begin{aligned}H(\text{grad}, \Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \text{grad } u \in L^2(\Omega)\} \\ H(\text{rot}, \Omega) &= \{U \in L^2(\Omega), \text{rot } U \in L^2(\Omega)\} \\ H(\text{div}, \Omega) &= \{U \in L^2(\Omega), \text{div } U \in L^2(\Omega)\}\end{aligned}$$

Ces espaces sont des sous-ensembles denses de $L^2(\Omega)$, mais ils ne sont pas complets par rapport aux produits scalaires de $L^2(\Omega)$. Pour les rendre complets, et donc des espaces de Hilbert, ils faut y définir de nouveaux produits scalaires; ainsi $\forall u, v \in H(\text{grad}, \Omega)$

$$(u, v)_{\text{grad}, \Omega} = (u, v)_{L^2, \Omega} + (\text{grad } u, \text{grad } v)_{L^2, \Omega}$$

d'autre part, $\forall U, V \in H(\text{rot}, \Omega)$

$$(U, V)_{\text{rot}, \Omega} = (U, V)_{L^2, \Omega} + (\text{rot } U, \text{rot } V)_{L^2, \Omega}$$

finalemt, $\forall U, V \in H(\text{div}, \Omega)$

$$(U, V)_{\text{div}, \Omega} = (U, V)_{L^2, \Omega} + (\text{div } U, \text{div } V)_{L^2, \Omega}$$

A partir de ces définitions, les normes correspondantes sont

$$\begin{aligned}\|u\|_{\text{grad}, \Omega} &= (u, u)_{\text{grad}, \Omega}^{\frac{1}{2}} \\ \|U\|_{\text{rot}, \Omega} &= (u, u)_{\text{rot}, \Omega}^{\frac{1}{2}} \\ \|U\|_{\text{div}, \Omega} &= (u, u)_{\text{div}, \Omega}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

4.3 Complexe de Whitney

La construction d'espaces d'éléments finis nécessite avant tout une discrétisation spatiale, ou maillage, du domaine étudié. Ensuite, des fonctions ou champs de vecteurs associés aux différentes entités géométriques du maillage (noeuds, arêtes, facettes, volumes) sont définis. Ceux-ci constituent des bases pour des espaces d'approximation w^i , $i \in \{0, \dots, 3\}$.

Il y'a une famille de formes différentielles associée au maillage, appelée formes de Whitney. Ce sont des fonctions polynômiales de premier ordre définies sur des éléments finis et satisfaisants une certaine condition de continuité aux interfaces des éléments. Une forme de whitney d'ordre $p \in \{0, \dots, 3\}$ est définie par son intégrale sur un p -simplexe;

- . 0 – simplexe : noeud
- . 1 – simplexe : arête
- . 2 – simplexe : facette
- . 3 – simplexe : volume

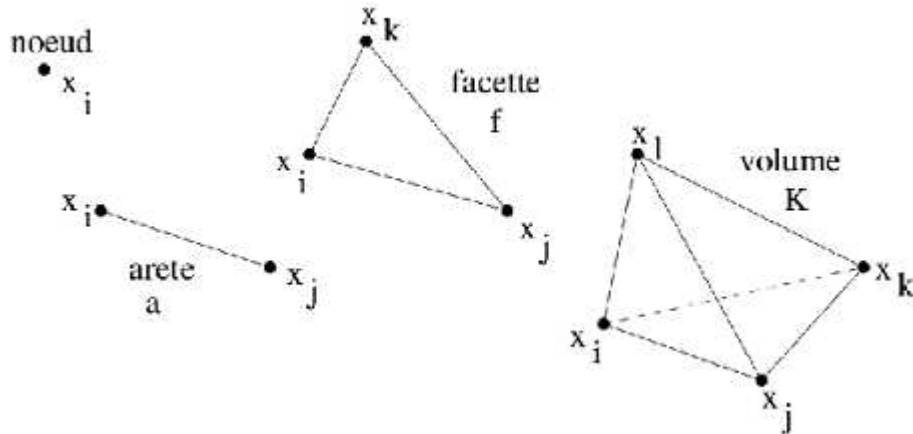


Figure 8. Simplexes de dimension 0, 1, 2 et 3

Le rôle d'un élément fini est d'interpoler un champ dans un espace fonctionnel de dimension finie, localement, dans un élément géométrique de l'espace de topologie simple.

Pour les éléments finis les plus couramment utilisés, les degrés de liberté sont associés aux noeuds de l'élément \mathcal{K} , la définition que nous présentons ici est plus générale grâce à la liberté laissée dans le choix des fonctionnelles. Elles pourront être, en plus de valeurs nodales, des intégrales le long de segments, sur des surfaces, sur des volumes; ces formes peuvent être bien adaptées à différents types de champs à interpoler.

On note par \mathcal{N} , \mathcal{A} , \mathcal{F} , \mathcal{V} respectivement les ensembles des noeuds, des arêtes, des facettes et des volumes du domaine Ω , et par N , A , F , V leurs dimensions respectives.

On introduit maintenant les éléments de whitney en trois dimensions; considérons la fonction $\lambda_i(x)$ coordonnée barycentrique du point x relative au noeud x_i , qui prend la valeur 1 en ce noeud, qui est continu, affine par morceaux dans les éléments géométriques ayant ce noeud en commun, et qui s'annule dans les autres éléments sans subir de discontinuité. Cette fonction n'est autre que la fonction de base, associée au noeud x_i de l'espace fonctionnel des éléments finis nodaux, construits sur les éléments géométriques considérés.

A un noeud x_i , nous associons la fonction

$$w_i^0(x) = \lambda_i(x)$$

qui définit l'élément de whitney d'ordre 0 au noeud x_i . L'ordre de l'élément de whitney n'est pas lié à l'ordre des fonctions de base vues comme des polynômes mais à la dimension du simplexe auquel il est associé. Nous appelons W^0 l'espace de dimension finie engendré par les fonctions w_i^0 , $\forall x_i \in \mathcal{N}$.

L'interpolation d'une fonction u est donnée par l'expression

$$I(u) = \sum_{x_i \in \Omega} u_i w_i^0$$

les coefficients u_i sont les valeurs de u aux noeuds du maillage.

Considérons maintenant une arête $a = \{i, j\}$, orientée du noeud x_i vers le noeud x_j . Nous lui associons le champ de vecteurs

$$w_a^1(x) = \lambda_i(x) \text{grad} \lambda_j(x) - \lambda_j(x) \text{grad} \lambda_i(x)$$

qui définit l'élément de whitney d'ordre 1 aux arêtes. Nous appelons W^1 l'espace de dimension finie engendré par les fonctions $w_a^1 \in \mathcal{A}$. Ce champ est non nul dans les éléments finis ayant l'arête a en commun; la circulation est égale à 1 le long de l'arête a et 0 ailleurs.

L'interpolation d'une fonction u par les éléments d'arêtes est donnée par la relation

$$I(u) = \sum u_a w_a^1$$

les coefficients u_a sont les circulations de u le long des arêtes.

A une facette $f = \{i, j, k\}$ dans le cadre d'une facette triangulaire issue d'un élément tétraédrique, on associe le champ de vecteur

$$w_f^2(x) = 2(\lambda_i(x) \text{grad} \lambda_j(x) \times \text{grad} \lambda_k(x) + \lambda_j(x) \text{grad} \lambda_k(x) \times \text{grad} \lambda_i(x) + \lambda_k(x) \text{grad} \lambda_i(x) \times \text{grad} \lambda_j(x))$$

De manière générale, les fonctions de bases relative à la facette f contenant les noeuds i, j, k et l pour une facette quadrangulaire est obtenue en appliquant la formule générale;

$$w_f^2(x) = a \sum_{q \in \mathcal{N}(f)} \lambda_q(x) \text{grad} \left(\sum_{r \in \mathcal{N}(q, q+1)} \lambda_r(x) \right) \times \text{grad} \left(\sum_{r \in \mathcal{N}(q, q-1)} \lambda_r(x) \right)$$

avec

- $\mathcal{N}(f)$ ensemble des noeuds composant la facette f
- $\mathcal{N}(q, q+1)$ ensemble des noeuds composant la facette $f_1 \neq f$ qui contient les noeuds q et $q+1$
- $\mathcal{N}(q, q-1)$ ensemble des noeuds composant la facette $f_2 \neq f$ qui contient les noeuds q et $q-1$

Ce champ définit l'élément de whitney d'ordre 2 sur la facette f . Nous appelons W^2 l'espace de dimension finie engendré par les fonctions $w_f^2 \in \mathcal{F}$, $\forall f \in \Omega$. L'interpolation d'une fonction u par les éléments de facettes est donnée par

$$I(u) = \sum u_f w_f^2$$

les coefficients u_f sont les flux de u à travers les facettes.

Enfin, à un volume \mathcal{K} de volume $|\mathcal{K}|$, on associe la fonction

$$w_K^3(x) = \frac{1}{|\mathcal{K}|}$$

qui définit l'élément de whitney d'ordre 3 sur le volume \mathcal{K} . Nous appelons W^3 l'espace de dimension finie engendré par les fonctions, constantes par morceaux, w_K , $\forall \mathcal{K} \in \mathcal{V}$. Les éléments de volumes sont les éléments classiques \mathbb{P}_0 . L'intégrale de w_K dans son élément est égale à 1 et à 0 dans les autres éléments. L'interpolation d'une fonction u par les éléments de volumes est donnée par

$$I(u) = \sum u_K w_K^3$$

les coefficients u_K sont les charges contenues dans les éléments finis.

4.4 Notion d'élément de référence

Soit $\hat{\mathcal{K}}$ un élément dit de référence, aussi dit le d -simplexe unité, dans l'espace $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)$, de sommets \hat{x}_i . Soit \mathcal{K} un élément réel de sommets x_i , il existe alors une et une seule transformation affine dans \mathbb{R}^d , de la forme

$$F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$$

qui transforme bijectivement \hat{K} dans K et telle que $F_K(\hat{x}_i) = x_i$

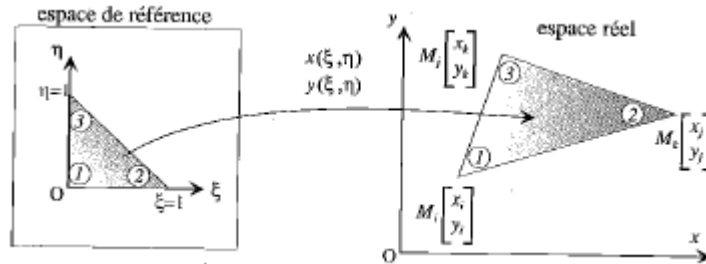


Figure 9. Élément de référence et élément réel

Cette notion est très utilisée dans la théorie, soit pour simplifier la présentation d'un sujet ou concept, soit pour la démonstration d'un résultat de convergence, qui'en général, on vérifie d'abord être valable sur \hat{K} et ensuite pour tous K .

Dans le cadre des applications, la notion d'élément de référence est aussi très utilisée. A titre d'exemple, nous avons défini l'orientation de toutes les arêtes, les facettes et les volumes des maillages considérés à partir d'une orientation fixée des arêtes, des facettes et des volumes de l'élément de référence \hat{K} .

Toujours dans le cadre des éléments finis, nous observons que les fonctions de base sont d'abord définies sur l'élément de référence \hat{K} et sont portées ensuite sur l'élément réel K à travers soit le changement de variable défini par F_K si on travaille avec des fonctions scalaires, soit par le produit matriciel, si on travaille avec des fonctions vectorielles. Cela nous évite de mémoriser les coefficients des fonctions de base de chaque élément, tout en gagnant du temps.

Avec la même philosophie, toutes les intégrales sur K qui représentent les éléments des matrices intervenant dans la formulation matricielle du problème discret, sont d'abord écrits, à l'aide du changement de variable donné par F_K , comme intégrales sur \hat{K} . Les intégrales sur \hat{K} ainsi obtenues sont calculés à l'aide d'une formule de quadrature définie sur \hat{K} , en évitant de définir et mémoriser les noeuds et les poids des formules d'intégration sur un volume, une face, une ligne pour chaque élément K .

5 Méthode de projection orthogonale

Soit \mathcal{T}_D un maillage source avec \mathcal{N}_D noeuds, on note \mathcal{K}_D un élément du maillage source et u_D le champ source évalué aux différents simplexes qu'on souhaite utilisés, et soit \mathcal{T}_T un maillage cible avec \mathcal{N}_T noeuds, on note de la même manière \mathcal{K}_T un élément du maillage cible et u_T le champ cible qu'on souhaite avoir en sortie.

La méthode la plus connue pour approcher des champs sur un maillage donné et qui est de loin la moins performante est la méthode d'interpolation qui dérive des valeurs du champ source, cependant cette méthode souffre de plusieurs défauts, à savoir :

- La méthode n'est pas conservative; l'intégrale du champ cible u_T n'aura généralement pas la même valeur que celle du champ source u_D .
- Ne satisfait pas au principe du maximum; les minima et les maxima du champ source ne seront généralement pas respectés.
- La méthode d'interpolation n'est pas applicable à un champ discontinu.

La méthode de projection orthogonale qui sera utilisée durant ce stage, possède par contre beaucoup d'avantages, parmi lesquels :

- La méthode la plus optimale pour la norme L^2 ; la projection orthogonale est la fonction qui minimise la norme L^2 de l'erreur.
- Bien définie pour des champs discontinues.

Les propriétés de la projection orthogonale sont bien connues, cependant son implémentation pose beaucoup de problèmes. On considère la projection d'un champ entre un maillage source \mathcal{T}_D avec \mathcal{N}_D fonctions de bases $w_{D,i}^j$, et un maillage cible \mathcal{T}_T avec \mathcal{N}_T fonctions de bases $w_{T,i}^j$. Soit u_T l'optimum de la projection sous la norme \mathbb{N} , ainsi

$$\|u_D - u_T\|_N = \min_q \|u_D - u\|_N$$

La norme N de $u_D - u$ est minimum si sa dérivée est nulle.

On commence par appliquer la définition de la norme L^2 , on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \int_{\Omega} (u_D - u)^2 dV &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u^i} (u_D - u)^2 dV &= 0 \end{aligned}$$

et ceci $\forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}$.

En écrivant u sous forme discrète $u = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} u^i w_{T,i}^j$, l'équation devient

$$\int_{\Omega} 2w_{T,i}^j (q_D - q) dV = 0$$

or q_T minimise $\|q_D - q\|_2$, d'où

$$\int_{\Omega} u_D w_{T,i}^j dV = \int_{\Omega} u_T w_{T,i}^j dV$$

En écrivant cette fois u_D et u_T sous forme discrète, $u_D = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_D} u_D^i w_{D,i}^j$ et $u_T = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_T} u_T^i w_{T,i}^j$, on obtient

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_D} u_D^i w_{D,i}^j w_{T,i}^j dV = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_T} u_T^k w_{T,k}^j w_{T,k}^j dV$$

ceci nous conduit au système matriciel suivant

$$M_T q_T = M_{TD} q_D$$

où

$$\begin{aligned} (M_T)_{ik} &= \int_{\Omega} w_{T,i}^j w_{T,k}^j dV, & i, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\} \\ (M_{TD})_{ik} &= \int_{\Omega} w_{T,i}^j w_{D,k}^j dV, & i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_D\} \end{aligned}$$

Appliquant maintenant la définition de la norme $H(\text{grad})$, on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \int_{\Omega} ((u_D - u)^2 + (\text{grad}(u_D - u))^2) dV &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u^i} ((u_D - u)^2 + (\text{grad}(u_D - u))^2) dV &= 0 \end{aligned}$$

et ceci $\forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}$.

En suivant la même démarche que pour la norme L^2 , cette équation nous conduit au système matriciel suivant

$$M_T q_T = M_{TD} q_D$$

où

$$(M_T)_{ik} = \int_{\Omega} (w_{T,i}^j w_{T,k}^j + \text{grad} w_{T,i}^j \text{grad} w_{T,k}^j) dV, \quad i, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}$$

$$(M_{TD})_{ik} = \int_{\Omega} (w_{T,i}^j w_{D,k}^j + \text{grad } w_{T,i}^j \text{grad } \phi_{D,k}^j) dV, \quad i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_D\}$$

Appliquant maintenant la définition de la norme $H(\text{rot})$, on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \int_{\Omega} ((u_D - q)^2 + (\text{rot}(u_D - u))^2) dV &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u^i} ((u_D - u)^2 + (\text{rot}(u_D - u))^2) dV &= 0 \end{aligned}$$

et ceci $\forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}$.

De la même manière, cette équation nous conduit au système matriciel suivant

$$M_T q_T = M_{TD} q_D$$

où

$$\begin{aligned} (M_T)_{ik} &= \int_{\Omega} (w_{T,i}^j w_{T,k}^j + \text{rot } w_{T,i}^j \text{rot } w_{T,k}^j) dV, & i, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\} \\ (M_{TD})_{ik} &= \int_{\Omega} (w_{T,i}^j w_{D,k}^j + \text{rot } w_{T,i}^j \text{rot } w_{D,k}^j) dV, & i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_D\} \end{aligned}$$

Enfin on considère la définition de la norme $H(\text{div})$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \int_{\Omega} ((u_D - u)^2 + (\text{div}(u_D - u))^2) dV &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u^i} ((u_D - u)^2 + (\text{div}(u_D - u))^2) dV &= 0 \end{aligned}$$

et ceci $\forall i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}$.

De la même manière, on aboutit au système matriciel suivant

$$M_T q_T = M_{TD} q_D$$

où

$$\begin{aligned} (M_T)_{ik} &= \int_{\Omega} (w_{T,i}^j w_{T,k}^j + \text{div } w_{T,i}^j \text{div } w_{T,k}^j) dV, & i, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\} \\ (M_{TD})_{ik} &= \int_{\Omega} (w_{T,i}^j w_{D,k}^j + \text{div } w_{T,i}^j \text{div } w_{D,k}^j) dV, & i \in \{1, \dots, \mathcal{N}_T\}, k \in \{1, \dots, \mathcal{N}_D\} \end{aligned}$$

M_{TD} est la matrice de masse mixte entre les deux maillages \mathcal{T}_D et \mathcal{T}_T .

En résolvant le système matriciel ci-dessus, on est assuré de trouver le champ cible q_T , cependant pour le faire, il va falloir assembler la matrice de masse mixte, chose qui a été objet de plusieurs études académiques durant les années précédentes.

Afin de calculer la matrice de l'inter-produit il existe plusieurs méthodes, cependant les deux plus connues sont :

- . Quadrature de GAUSS
- . Intersection de volumes

Au cours de ce stage nous avons choisi de développer notre calcul à l'aide de la première méthode néanmoins nous verrons les différences majeures entre les deux méthodes, afin de justifier notre choix.

Remarque 1. Estimation de l'erreur

Selon une étude effectuée par X. Jiao et M. Heath en 2004, ils évaluent l'erreur commise lors de la projection orthogonale utilisant une quadrature fixe en $O(h_c + h_c^2 + h_s^2)$ pour les éléments nodaux

Remarque 2. Normes de Sobolev

D'après les études menées par A. Journeaux lors de sa thèse sur le transfert de champ, il est clair que l'avantage principal des normes de Sobolev pour les études multi-physiques est la possibilité de transférer un champ tout en gardant une bonne approximation de l'un des opérateurs différentiels. Cet opérateur peut avoir un sens physique bien particulier : par exemple le transfert en norme L^2 d'un potentiel vecteur n'a pas beaucoup d'intérêt alors que la projection $H(\text{rot})$ permet de conserver une bonne précision sur l'induction magnétique. De plus la norme Sobolev tend à lisser les solutions et permet d'éviter l'apparition de valeurs parasites éventuelles.

La méthode converge en revanche moins bien que celle impliquant le produit de L^2 . En particulier un effet d'échelle est dû à l'ajout du second terme du produit scalaire. La matrice formée par les produits d'opérateurs différentiels est singulière et devient prépondérante lorsque la taille caractéristique du maillage cible tend vers 0.

6 Assemblage de la matrice M_{TD}

6.1 Quadrature de GAUSS

Afin de calculer l'intégrale de l'inter-produit des fonctions de bases issues de deux maillages, la méthode la plus simple est d'utiliser directement une quadrature, en l'occurrence ici une quadrature par points de Gauss. L'idée est de pouvoir évaluer $(M_{TD})_{ij}$ aux points de quadrature, ensuite de faire une interpolation aux noeuds du maillage cible.

Note 3. Quadrature de Gauss

La méthode des éléments finis s'appuie le plus souvent sur une formulation intégrale du problème à résoudre, Il est donc nécessaire d'évaluer de nombreuses intégrales simples, doubles ou triples selon la dimension de l'espace physique dans lequel on travaille. Par ailleurs, des intégrales curvilignes de surface apparaissent fréquemment dans les conditions aux limites.

Pour les formes intégrales complexes et les éléments isoparamétriques non linéaires, il est très souvent impossible de calculer exactement toutes les intégrales. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'intégration approchées, réalisant un compromis entre la précision et le coût de calcul. Pour cela on utilisera la méthode dite de point de Gauss.

L'idée principale à la base de l'intégration gaussienne est de pouvoir approcher une intégrale par une somme

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=1}^n p_i y(x_i)$$

avec

- x_i le i -ème point de gauss
- p_i le poid de quadrature du i -ème point de gauss

Nous donnerons en Annexe les différentes valeurs des poids de quadratures ainsi que les coordonnées de points de quadrature pour les hexaèdres et pour les tétraèdres.

Les différentes étapes de l'algorithme ci-dessous seront décrites de manière détaillée dans les sous sections suivantes.

Algorithme 1

- Génération de points de gauss sur l'élément de référence du maillage cible
- Calcul de la matrice (M_T)
- Calcul des coordonnées des points de gauss dans l'élément réel du maillage cible
- Localisation des points de gauss dans le maillage source
- Calcul des coordonnées des points de gauss dans l'élément de référence du maillage source
- Interpolation des valeurs de q_D aux points de quadrature
- Calcul de la matrice (M_{TD})
- Calcul de la solution u_T

6.1.1 Génération de points de gauss sur l'élément de référence du maillage cible

On considère un maillage cible tétraédrique dont l'élément réel est orienté positivement, alors on peut générer des points de quadrature au niveau de l'élément de référence comme suit;

On peut donner à titre d'exemple les formules d'intégration numérique à 5 points pour un tétraèdre de 4 points;

Point	x	y	z	Poids
1	a	a	a	- 2/15
2	b	b	b	3/40
3	b	b	c	3/40
4	b	c	b	3/40
5	c	b	b	3/40

Tableau 1.

avec

- $a = \frac{1}{4}$
- $b = \frac{1}{6}$
- $c = \frac{1}{2}$

6.1.2 Calcul de la matrice (M_T)

Comme vu précédemment le calcul à l'aide des fonctions de formes se fait généralement dans l'élément de référence. Ainsi pour calculer la matrice (M_T), on a besoin de connaître les expressions des fonctions de formes. A titre d'exemple on considère des fonctions de formes nodales dans un tétraèdre de référence à 4 noeuds ainsi les expressions des fonctions de bases aux noeuds sont;

$$\begin{aligned} w_1^0(\zeta, \eta, \xi) &= 1 - \zeta - \eta - \xi \\ w_2^0(\zeta, \eta, \xi) &= \zeta \\ w_3^0(\zeta, \eta, \xi) &= \eta \\ w_4^0(\zeta, \eta, \xi) &= \xi \end{aligned}$$

On peut retrouver les différentes expressions des fonctions de formes pour les différentes géométries de projection en annexe.

Une fois les expressions des fonctions de formes établies, il reste à calculer la matrice (M_T) par quadrature;

$$(M_T)_{ij} = \int_{\Omega} w_{T,i}^0 w_{T,j}^0 dV = \sum_{i=1}^{n_q} p_i w_T^0(x_i) w_T^0(x_j)$$

6.1.3 Calcul des coordonnées des points de gauss dans l'élément réel du maillage cible

La localisation des points de gauss dans le maillage source passe avant tout par leurs localisations dans le maillage cible, ainsi par une transformation linéaire des coordonnées des points de gauss sur l'élément de référence vers des coordonnées dans l'élément réel.

Afin d'effectuer cette opération il faut tout d'abord calculer les fonctions de formes nodales de l'élément en question, à partir de là, la transformation du domaine $\mathcal{D}_{(\zeta, \eta, \xi)}$ vers le domaine $\mathcal{D}_{(x, y, z)}$ se définit avec ces mêmes fonctions

$$\begin{aligned} \cdot \quad x &= \sum_{i=1}^n x_i w_i^0(\zeta, \eta, \xi) \\ \cdot \quad y &= \sum_{i=1}^n y_i w_i^0(\zeta, \eta, \xi) \\ \cdot \quad z &= \sum_{i=1}^n z_i w_i^0(\zeta, \eta, \xi) \end{aligned}$$

où

- (ζ, η, ξ) sont les coordonnées du point de gauss dans l'élément de référence
- (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du noeud i de l'élément réel
- (x, y, z) sont les coordonnées du point de gauss dans l'élément réel

Ce type d'approximation est appelée isoparamétrique, ce qui veut dire qu'on a les mêmes fonctions de forme pour l'approximation et pour son domaine de définition.

Prenons comme exemple un tétraèdre, Afin de pouvoir calculer les coordonnées d'un point sur l'élément réel, afin de faciliter les notations on peut utiliser la jacobienne du tétraèdre,

$$J = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

généralement la matrice jacobienne d'un élément est calculée comme suit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

Ainsi pour passer des coordonnées de référence aux coordonnées réelles, il suffit de multiplier la jacobienne par les coordonnées de référence en y ajoutant les coordonnées du premier noeud du tétraèdre, ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Concernant l'hexaèdre, le calcul est un peu plus compliqué, en effet ses fonctions de formes nodales étant non linéaires, on aura une forme matricielle de la forme,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} + N(\zeta, \eta, \xi) \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

avec

- J la jacobienne définie au point (ζ, η, ξ) , la partie linéaire de la transformation
- N , matrice dépendant des coordonnées (ζ, η, ξ) , qui représente la partie non linéaire de la transformation

6.1.4 Localisation des points de gauss dans le maillage source

La première étape pour le calcul de la matrice M_{TD} consiste à connaître pour chaque point de GAUSS du maillage cible dans quel élément du maillage source il se situe. Nous avons choisi de le faire par une méthode qui tient compte des propriétés topologiques du maillage afin d'optimiser le temps de recherche.

Nous supposons donc connu pour chaque hexaèdre \mathcal{K}_D^i du maillage source la liste de ses voisins, et nous prenons pour convention de numéroter $j \in \{1, \dots, 6\}$ le voisin qui a en commun avec \mathcal{K}_D^i la face j . Si \mathcal{K}_D^i ne possède aucun voisin qui partage la face j alors on notera 0 son voisin par rapport à cette face.

Il est essentiel de rappeler l'idée de base sur laquelle repose cette méthode.

Soit le déterminant suivant :

$$[a, b, c, p] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x & p_x \\ a_y & b_y & c_y & p_y \\ a_z & b_z & c_z & p_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et soit \mathcal{P} un plan qui contient les points a, b et c orienté positivement, alors si le déterminant ci-dessus est positif, le point p se trouve dans le volume intérieur du plan \mathcal{P} , si le déterminant est négatif alors le point p se trouve dans le volume extérieur du plan \mathcal{P} .

Ainsi pour un hexaèdre \mathcal{K}_D^i du maillage source, orienté positivement, il suffit de tester ce déterminant pour chacune des six faces et de le multiplier par la valeur de la normale sortante pour chacune des faces. Si tous les produits sont positifs, alors le point p est à l'intérieur de l'hexaèdre, sinon le point p se trouve à l'extérieur de l'hexaèdre.

6.1.5 Calcul des coordonnées des points de gauss dans l'élément de référence du maillage source

On a pu voir précédemment le passage de l'élément de référence à l'élément réel, à présent il faudra faire le chemin inverse, c'est à dire le passage de l'élément réel vers l'élément de référence. Ainsi, si on suppose connues les coordonnées d'un point dans l'élément réel on cherche alors à connaître ses coordonnées dans l'élément de référence, on rappelle la relation de transformation de l'élément de référence vers l'élément réel;

$$\begin{aligned} \cdot \quad x &= \sum_{i=1}^n x_i w_i^0(\zeta, \eta, \xi) \\ \cdot \quad y &= \sum_{i=1}^n y_i w_i^0(\zeta, \eta, \xi) \\ \cdot \quad z &= \sum_{i=1}^n z_i w_i^0(\zeta, \eta, \xi) \end{aligned}$$

Il suffit alors pour connaître les coordonnées dans l'élément de référence de calculer (ζ, η, ξ) , à partir de la formule précédente,

Passons à la formulation matricielle d'un tétraèdre, qu'on rappelle ici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Ainsi pour avoir les coordonnées du point de gauss en question dans l'élément de référence il suffit juste d'inverser la jacobienne du tétraèdre

$$J^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

Le tétraèdre étant le cas le plus simple, en effet ses fonctions de formes nodales étant linéaires ceci facilite la démarche.

Cependant, obtenir la transformation inverse n'est pas toujours une tâche facile, en effet quand les fonctions de formes sont non linéaires, il faudra dans ce cas utiliser une méthode itérative afin d'approcher la solution. C'est le cas pour les fonctions de formes d'un hexaèdre. Reprenons la formule précédente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} + N(\zeta, \eta, \xi) \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

ainsi on peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (J + N(\zeta, \eta, \xi)) \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

On note $A = (J + N(\zeta, \eta, \xi))$ et $b = (x, y, z)$. L'idée est de pouvoir inverser la matrice A , afin de trouver la solution du système ci-dessus $S = (\zeta, \eta, \xi)$. Pour cela on utilisera un algorithme basé sur la méthode du point fixe;

Algorithme 2

- On considère un vecteur initial $S_0 = \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \eta_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}$
- On pose un vecteur $r = b - AS_0$
- Tant que $\|r\|_2 > \text{critère d'arrêt}$
 - On calcule la solution du système $AS = r$
 - On pose $X_0 = X + X_0$
 - On recalcule r
- Fin Tant que

6.1.6 Interpolation des valeurs de u_D aux points de quadrature

Pour pouvoir calculer la matrice (M_{TD}) , on a besoin d'évaluer le champ source aux points de quadrature, on utilise alors une interpolation ainsi

$$u_D(x_i) = \langle w_D^0(x_i), u_D^K \rangle$$

où u_D^K , sont les valeurs du champ source aux noeuds de l'élément \mathcal{K} du maillage source.

6.1.7 Calcul de la matrice (M_{TD})

En réalité on ne calcule pas la matrice (M_{TD}) seule mais par quadrature, on calcule tout le membre de droite

$$\int_{\Omega} w_{T,i}^j w_{D,k}^j dV = \sum_{i=1}^{n_q} p_i u_D(x_i) w_T^j(x_i) = F_D$$

ceci nous conduit donc au système plus simple suivant

$$M_T q_T = F_D$$

Il reste simplement à inverser la matrice de masse (M_T) pour ainsi trouver la valeur du champ cible aux points de gauss

$$q_T = M_T^{-1} F_D$$

6.1.8 Calcul de la solution u_T

Il reste alors à résoudre le système matriciel à l'aide du solveur MUMPS, qui est basé sur l'algorithme de la décomposition LU paralléliser.

Note 4. La factorisation LU consiste à écrire une matrice non-singulière comme le produit de deux matrices L et U . L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure.

Une fois le système résolu il reste alors à reconstruire la solution aux noeuds du maillage cible, pour cela il suffit d'interpoler les valeurs du champ u_T aux points de gauss aux sommets des éléments du maillage.

Remarque 5. Le défaut majeur de cette méthode est qu'il est possible que les fonctions de bases $w_{D,i}^j$ soient des polynômes par morceaux discontinus sur le maillage cible \mathcal{T}_T , ainsi si le produit des fonctions de bases $w_{T,i}^j$ et $w_{D,i}^j$ est évalué aux points de quadrature, l'intégrale ne sera généralement pas exact. En effet les méthodes de quadrature sont exactes pour des polynômes d'ordre spécifique et non pour des fonctions polynômes par morceaux.

6.2 Intersection de volumes

Une autre méthode de procéder serait de calculer la matrice M_{TD} au niveau l'intersection entre les deux maillages, en effet sur un volume d'intersection les fonctions de bases $w_{T,i}^j$ et $w_{D,i}^j$ sont des polynômes, ainsi leur produit également est un polynôme. L'intérêt de cette méthode est d'assurer un résultat exact même si l'inconvénient est de se pénaliser en augmentant la taille du système matriciel, d'autre part étudier les volumes d'intersections entre deux maillages reste un sujet ouvert; les résultats connus pour le moment ne traitent que des maillages de type tétraédrique.

Algorithme 3

- Identifier les intersections entre volumes
- Pour chaque élément du maillage cible
 - . Assembler la contribution à la matrice de masse M_T
 - . Pour chaque élément d'intersection
 - . Assembler la contribution à la matrice de masse mixte M_{TD} , en intégrant les fonctions de formes des deux éléments dans le volume d'intersection
 - . Calculer la valeur du champ source u_D dans le volume d'intersection
- Calculer la solution u_T

Remarque 6. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que son erreur de loin la moins importante de l'ordre de 10^{-16} selon une étude menée par P. Farrell et J.R. Maddison dans leur article concernant la méthode de projection orthogonale, contrairement à la première méthode. Cependant, cette méthode possède un défaut majeur; son coût en temps qui est 10^3 fois supérieur à la méthode précédente selon toujours la même source.

7 Orientation

7.1 Orientation des éléments

Dans la méthode des éléments finis, chaque élément est relié à un élément de référence où tous les calculs vont être effectués. La fonction de transformation entre l'élément réel et l'élément de référence doit être bijective, et la jacobienne doit être positive partout sur l'élément de référence.

7.1.1 Orientation d'un tétraèdre

L'orientation d'un tétraèdre est assez facile à mettre en oeuvre, en effet elle repose sur une interprétation du déterminant suivant

$$[a, b, c, p] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x & p_x \\ a_y & b_y & c_y & p_y \\ a_z & b_z & c_z & p_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

suivant la règle du bonhomme d'Ampère, il peut s'interpréter comme le volume orienté du tétraèdre composé des 4 sommets (a, b, c, d) , chaque sommet s ayant pour coordonnées (s_x, s_y, s_z) .

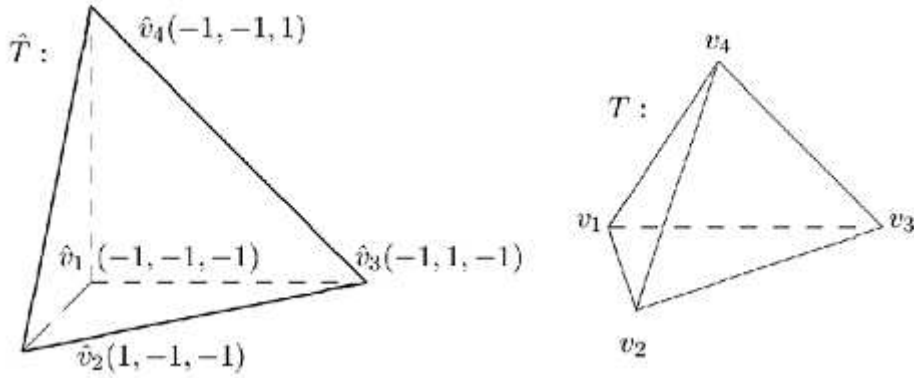


Figure 10. Convention de l'orientation d'un hexaèdre dans code_Interpol

Algorithme 4

- Calcul du déterminant de la jacobienne du tétraèdre
 - Si le déterminant est positif alors le tétraèdre est orienté positivement
 - Sinon on inverse les noeuds a et b

7.1.2 Orientation d'un hexaèdre

Dans le but d'effectuer les calculs utilisant les fonctions de formes hexaédriques dans l'élément de référence correspondant, on est alors obligé d'orienter l'élément réel de façon à ce que son orientation soit en adéquation avec celle de son élément de référence, pour cela il faut passer la jacobienne de l'élément réel. Contrairement au tétraèdre, la jacobienne d'un hexaèdre n'est pas constante sur l'élément, en effet sa valeur change d'un noeud à l'autre. De ce fait, parler de la positivité de la jacobienne d'un hexaèdre revient à dire que cette dernière est positive sur chacun des noeuds de cet élément.

Le calcul du déterminant de la jacobienne au noeud d'un hexaèdre part du fait que la valeur de ce dernier en un noeud de l'hexaèdre est égale à la valeur du déterminant de la jacobienne du tétraèdre dont le point en question est l'angle droit de la base.

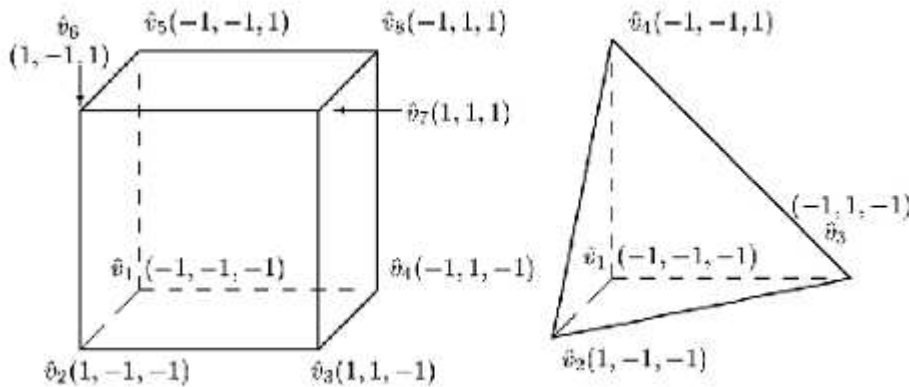


Figure 11. l'hexaèdre de référence ainsi que le tétraèdre de référence

Ainsi dans la figure ci-dessous, on peut calculer le déterminant de la jacobienne de l'hexaèdre au point v_1 , comme étant le déterminant de la jacobienne du tétraèdre qui l'enveloppe; (v_1, v_2, v_3, v_4) .

$$|J_h(v_1)| = |J_t(v_1, v_2, v_3, v_4)|$$

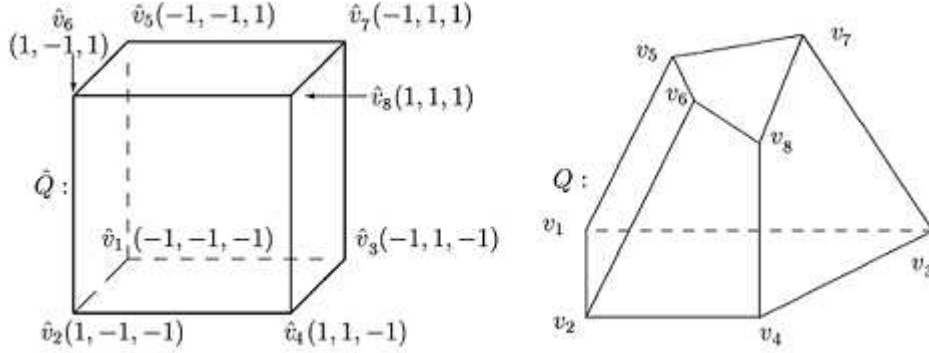


Figure 12. Convention de l'orientation d'un hexaèdre dans code_Interpol

Algorithme 5

- Recherche de toutes les faces quadrangulaires planes possibles dans un hexaèdre (12 possibilités)
- Recherche d'une des faces quadrangulaires de l'hexaèdre et sa face opposée
- Calcul de la jacobienne de chacun des noeuds de l'hexaèdre
 - Si toutes les valeurs de la jacobienne sont positives alors l'élément est bien orienté
 - Sinon on permute deux noeuds pour lesquels le déterminant de la jacobienne est négative, dans chacune des deux faces opposées détectées précédemment et on recalcule les valeurs du déterminant de la jacobienne
- On change l'ordre des noeuds suivant la nouvelle orientation

7.2 Normales sortantes d'un élément

En plus de son orientation globale, il est pratique de construire les normales sortantes aux faces de chaque élément. La direction est celle de la normale globale à la face et le sens est déterminé par un tableau de signes défini pour chaque élément. Ainsi, la normale sortante à la face d'indice local i_l dans un élément \mathcal{K} et d'indice global i_g est égale à

$$\vec{n}_{i_l} = \text{sign}(i_l) \times \vec{n}_{i_g}$$

Dans chaque élément \mathcal{K} , pour chaque face d'indice local i_l , le signe de la face est déterminé comme suit

Algorithme 6

- Chercher le sommet opposé v_j avec $j \neq i$ à la face i_l dans l'élément \mathcal{K}
- Calculer la normale globale de la face \vec{n}_{i_g}
- Calculer les produits scalaires $\vec{n}_{i_g} \cdot \vec{v_j v_i}$ avec i le numéro du noeud de la face
 - Si tous les produits scalaires sont positives alors $\text{sign}(i_l) = -1$
 - Si tous les produits scalaires sont négatifs alors $\text{sign}(i_l) = 1$

8 Application numérique

L'étude porte sur un cube d'arête de longueur unitaire supportant deux maillages différents. Le premier maillage, est un maillage hexaédrique, il sera considéré comme étant le maillage source sur lequel sera représenté le champ source;

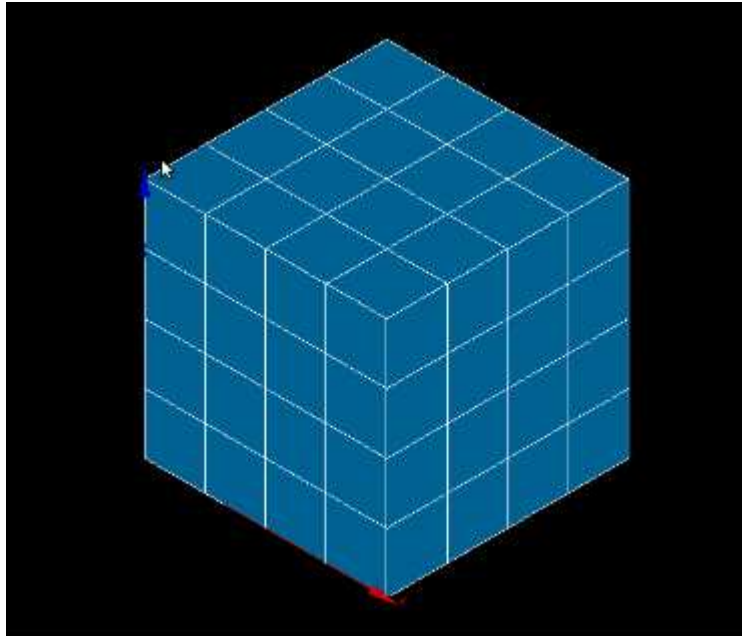


Figure 13. Maillage hexaédrique

Le second maillage qui représente le maillage cible, sera lui un maillage tétraédrique;

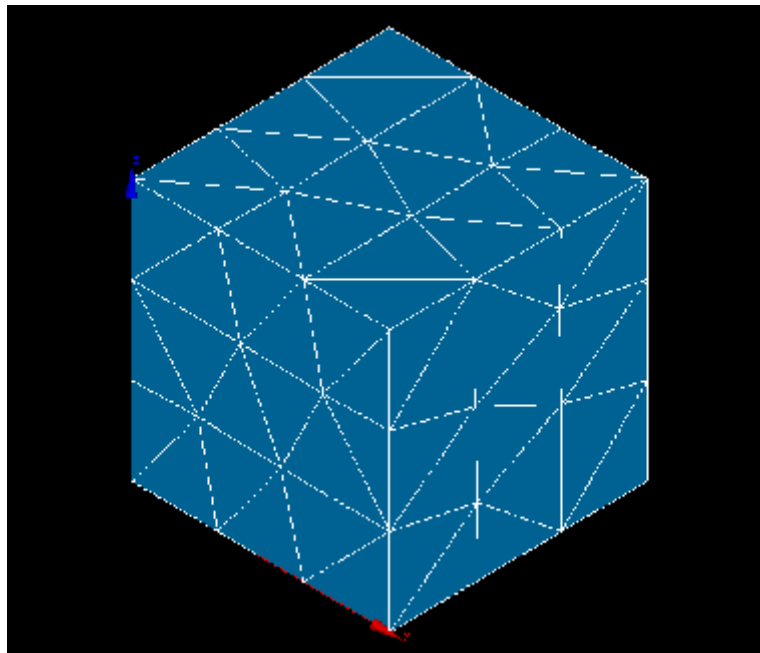


Figure 14. Maillage tétraédrique

On considérera par ailleurs différentes tailles de maillages durant cette étude, ainsi que différents nombres de points de gauss afin de pouvoir comparer les résultats.

On considère aussi la fonction analytique suivante

$$u_a(x) = 1 + \cos(x)$$

qui représentera le champ source décrit aux noeuds du maillage source.

8.1 Éléments finis nodaux

Cette partie traite des transferts de fonctions discrétisées par des éléments nodaux. On représente le champ source sur le maillage source en utilisant différentes tailles de maillages sources, ensuite on effectue la projection du champ source entre les deux maillages afin de pouvoir estimer les valeurs du champ source aux noeuds du maillage cible, on visualisera les différents champs grâce à l'outil PostPro de la plateforme Salomé.

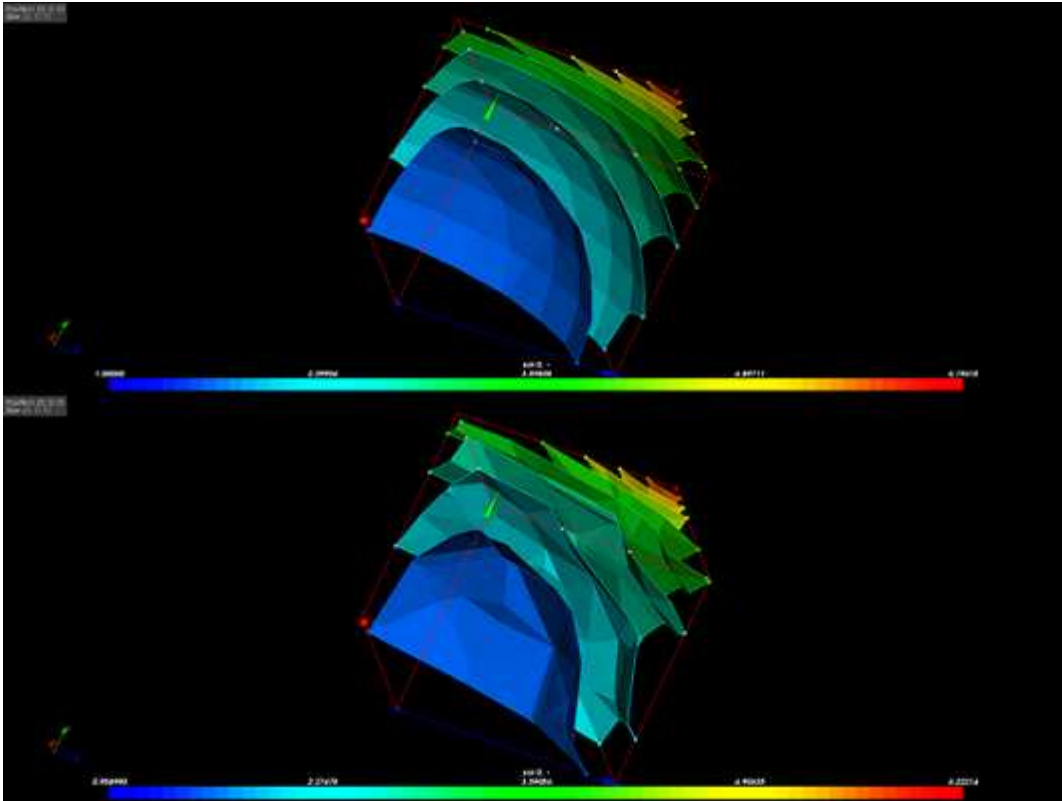


Figure 15. Champ source représenté sur un maillage hexaédrique de 200 mailles volumiques en haut de la figure, en bas de la figure le champ cible issu de la projection orthogonale sur un maillage cible tétraédrique de 200 mailles volumiques.

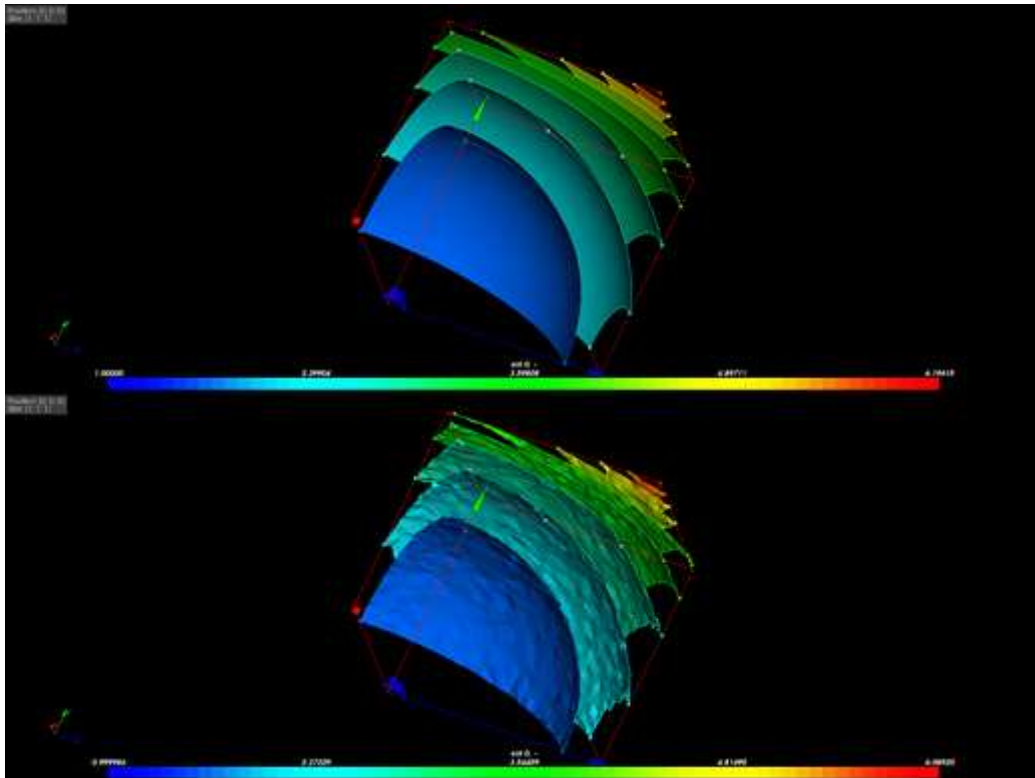


Figure 16. Champ source représenté sur un maillage hexaédrique de 200 mailles volumiques en haut de la figure, en bas de la figure le champ cible issu de la projection orthogonale sur un maillage cible tétraédrique de 200 mailles volumiques.

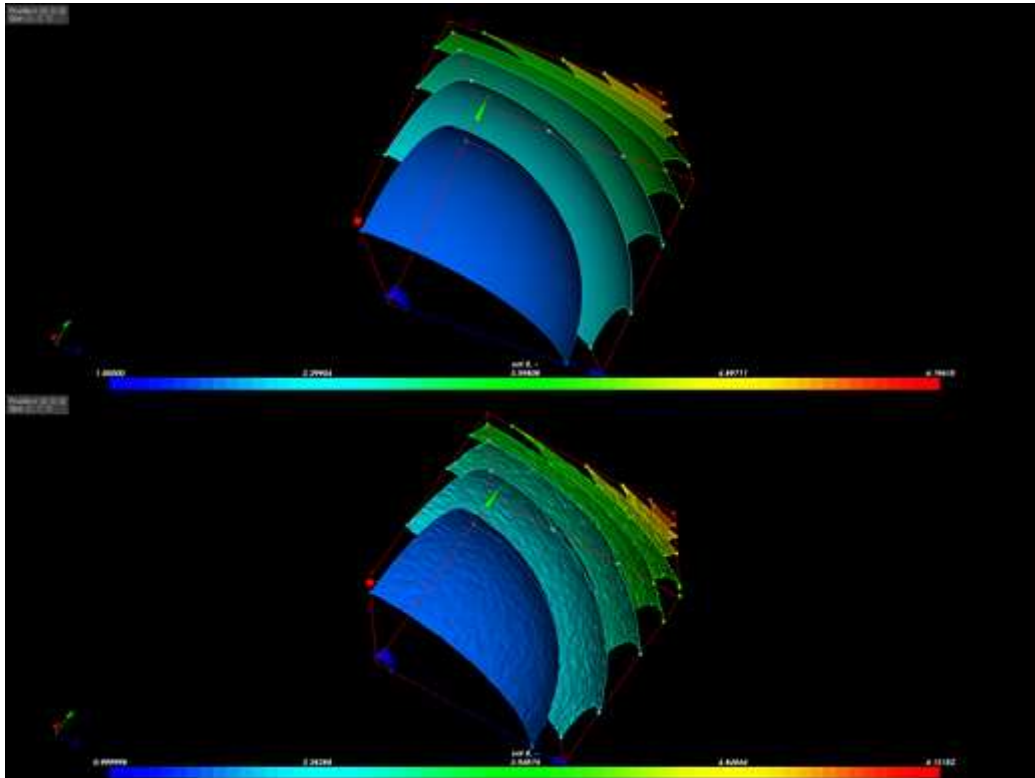


Figure 17. Champ source représenté sur un maillage hexaédrique de 200 mailles volumiques en haut de la figure, en bas de la figure le champ cible issu de la projection orthogonale sur un maillage cible tétraédrique de 200 mailles volumiques.

Remarque 7. Il est clair qu'en augmentant la taille des maillages source et cible, l'approximation du champ cible devient de plus en plus exacte, ce qu'on peut visualiser au niveau des bornes du champ résultant, en effet le minimum et le maximum du champ en tendance à plus se rapprocher des valeurs du champ source, on peut aussi constater que le champ cible épouse parfaitement la forme du champ source

On étudie maintenant l'influence du nombre de points de gauss utilisés sur le résultat final, pour cela on effectue différentes simulations tout en augmentant le nombre de points de gauss, on visualise ensuite le champ cible résultant

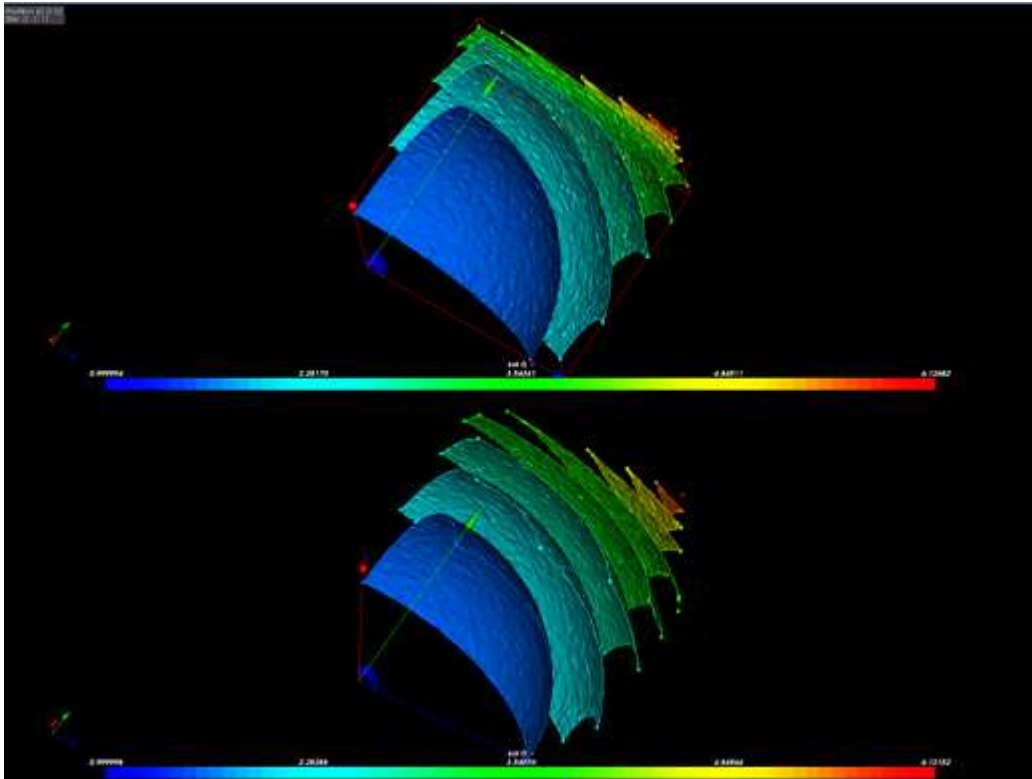


Figure 18. Champ cible représenté sur un maillage tétraédrique de 300000 mailles volumiques, en haut de la figure un champ issu d'une projection à 11 points de gauss, en bas de la figure un champ issu d'une projection à 15 points de gauss.

Remarque 8. Sur cet exemple on peut difficilement voir la différence entre les deux représentations, néanmoins on peut tout de même voir une légère amélioration dans l'approximation en augmentant le nombre de points de gauss.

Remarque 9. Concernant la norme H , il était difficile en si peu de temps de la mettre au point, en effet il était question de résoudre un système matriciel singulier. Ce qui n'était plus possible durant le temps qu'il nous reste.

8.2 Éléments finis volumiques

Les éléments finis de volumes sont définis par des fonctions constantes par élément. Aucun opérateur local n'est associé, ainsi seule la norme L^2 est utilisée. Le calcul du champ source consiste à calculer l'intégrale de la fonction source sur chaque élément source via une quadrature de gauss, ensuite on effectue la projection entre les deux maillages.

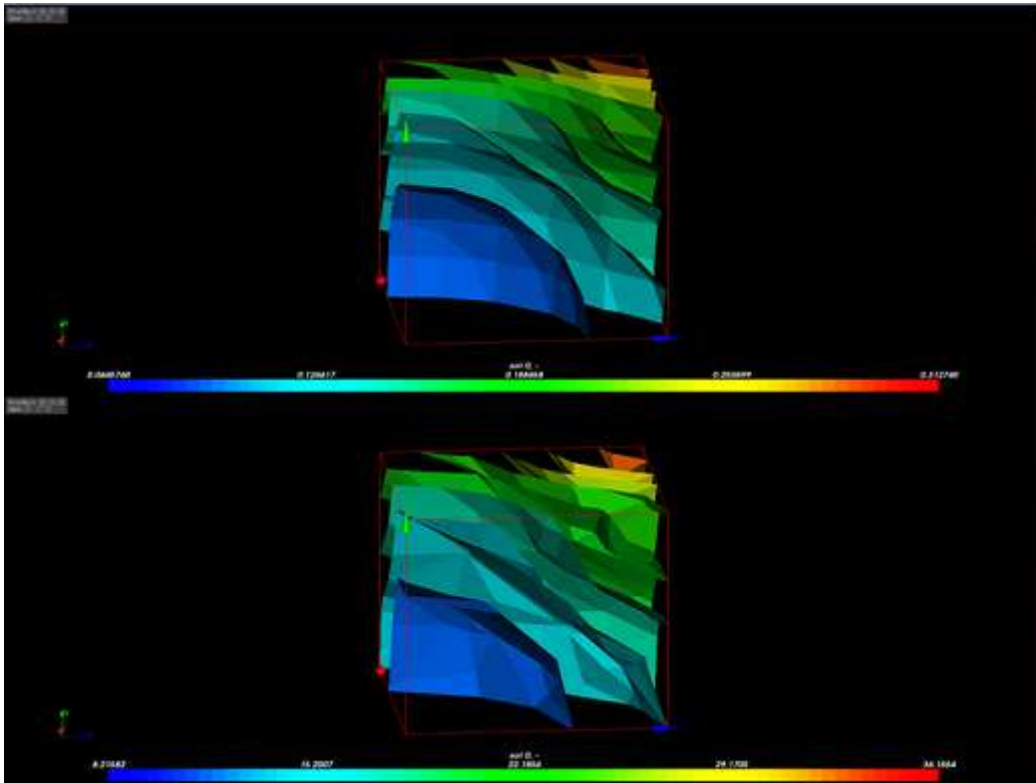


Figure 19. Champ source représenté sur un maillage hexaédrique de 200 mailles volumiques en haut de la figure, en bas de la figure le champ cible issu de la projection orthogonale sur un maillage cible tétraédrique de 200 mailles volumiques.

Une autre manière de visualiser les champs qu'offre l'outil PostPro nous permet de bien identifier les valeurs du champ au niveau des éléments, en effet on peut remarquer sur la figure ci-dessous que le champ source est constant au niveau des mailles hexaédrique du maillage source, de même le champ cible est constant sur les mailles tétraédrique du maillage cible.

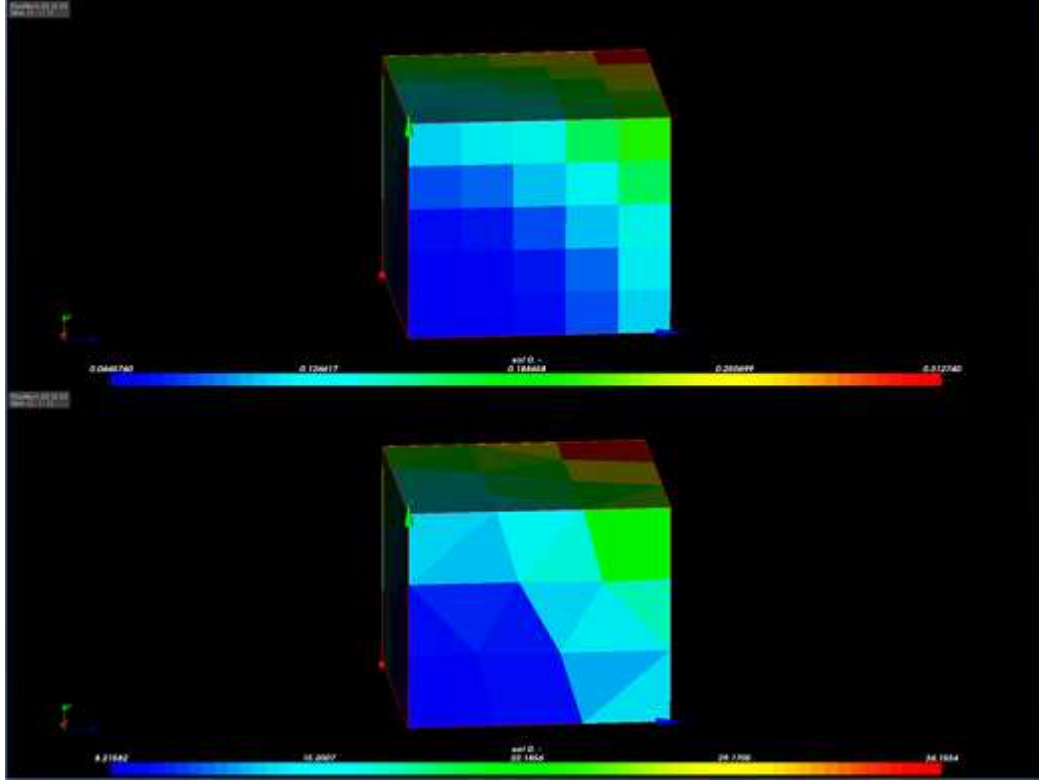


Figure 20. Visualisation en ScalarMap des deux champs précédents avec les mêmes maillages.

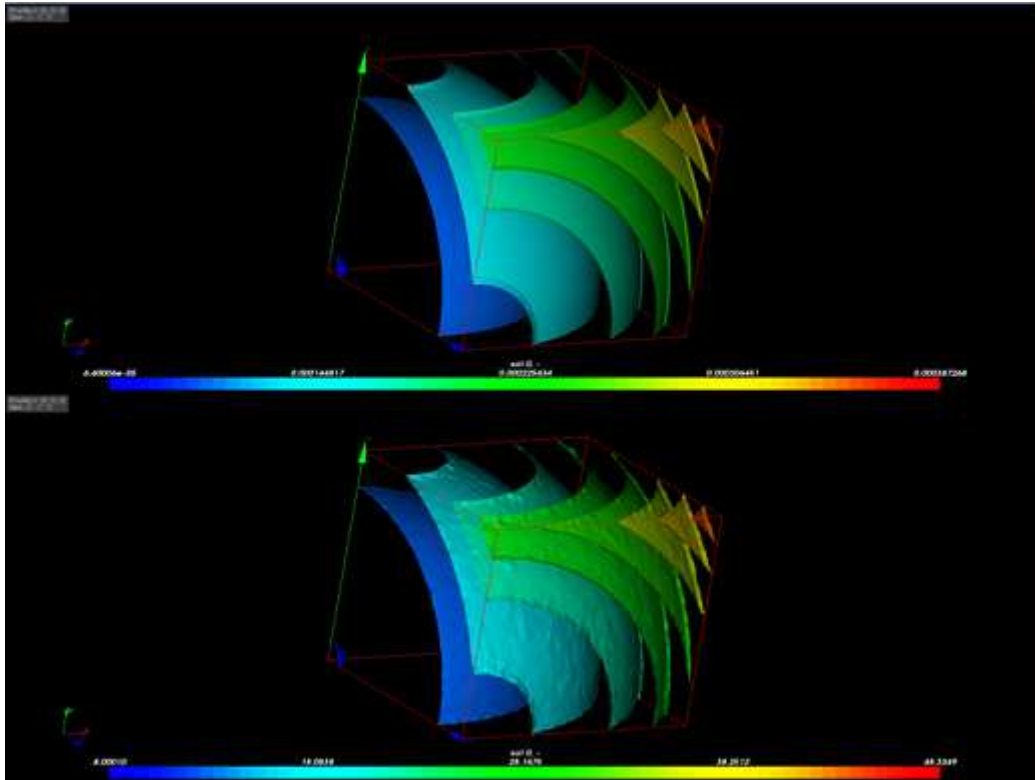


Figure 21. Champ source représenté sur un maillage hexaédrique de 125000 mailles volumiques en haut de la figure, en bas de la figure le champ cible issu de la projection orthogonale sur un maillage cible tétraédrique de 150000 mailles volumiques.

Remarque 10. A travers les deux figures on peut s’apercevoir que même si la forme du champ cible épouse parfaitement celle du champ source, il existe une différence au niveau de l’échelle. La seule explication qu’on a pu trouver jusqu’à présent est qu’il existe un facteur au niveau des fonctions de formes qui influence le résultat final.

Remarque 11. Sur certains maillages sources on s’est aperçu qu’on avait des difficultés à visualiser le champ source,

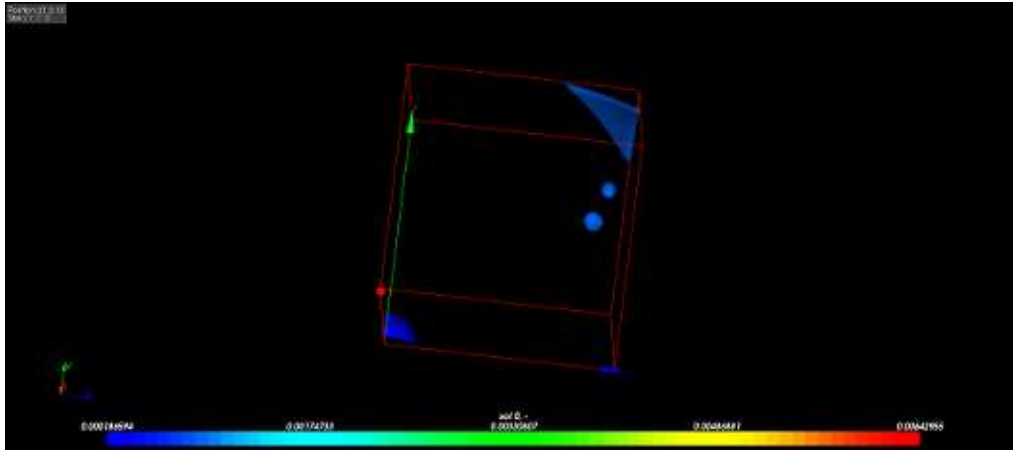


Figure 22. Champ source représenté sur un maillage hexaédrique de 45 000 mailles volumiques

Ceci s'explique par le seul fait, est qu'il existe des problèmes au niveau de la fonction calculant le volume des hexaèdres, en effet on trouve pour ce maillage dont il est question que le volume total dépasse le $1U$, d'où la nécessité de repenser cette fonction.

On étudie maintenant l'influence du nombre de points de gauss utilisés sur le résultat final, pour cela on effectue différentes simulations tout en augmentant le nombre de points de gauss, on visualise ensuite le champ cible résultant

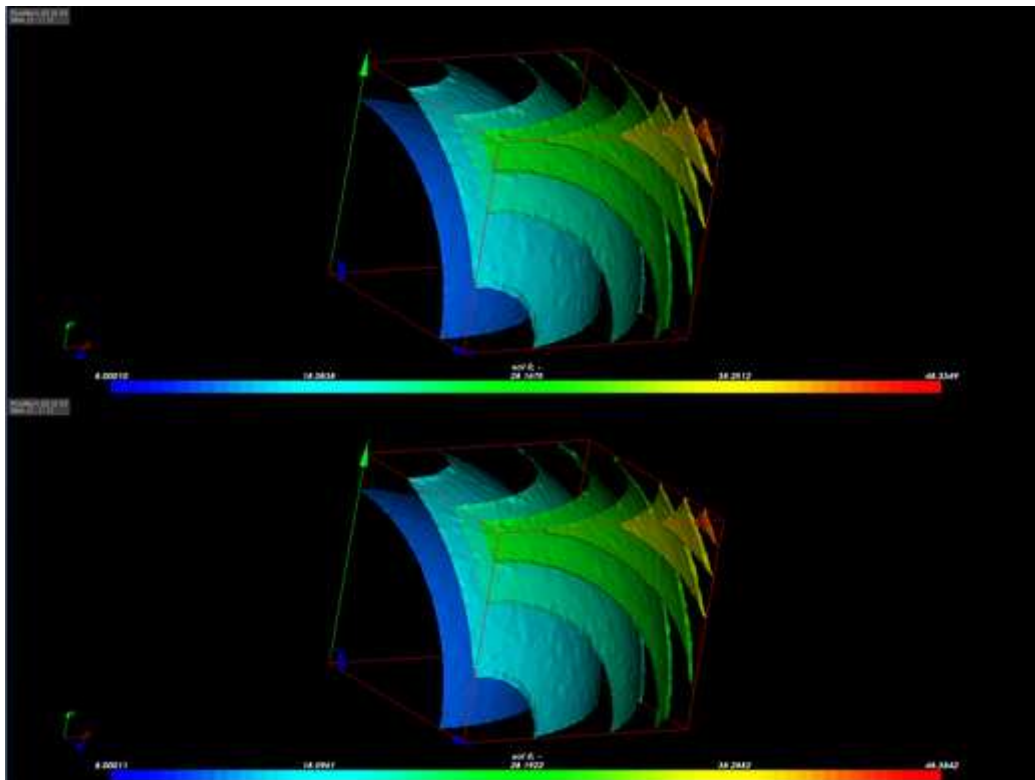


Figure 23. Champ cible représenté sur un maillage tétraédrique de 150 000 mailles volumiques, en haut de la figure un champ issu d'une projection à 11 points de gauss, en bas de la figure un champ issu d'une projection à 24 points de gauss.

Remarque 12. Comme dans le cas précédent pour les éléments finis nodaux, on remarque bien que le nombre de points de gauss influence bien la qualité des résultats, ainsi en augmentant le nombre de points de gauss utilisés lors de la projection on trouve un champ cible qui approche mieux le champ source.

9 Conclusion

Ce projet à été pour moi une aventure tant sur le plan technique, que sur le plan humain. En effet, j'ai pu à travers les six mois passés au sein du département THEMIS acquérir différentes compétences dans le couplage multi-physique et dans la programmation scientifique, aussi découvrir d'autres notions en analyse numérique que je n'ai pas connu lors de mon cursus universitaire. Ce stage m'a permis par ailleurs de mettre en oeuvre tous les acquis que j'ai reçus pendant les trois années de ma formation, spécialement la discrétisation par éléments finis. Humainement, c'était pour moi une opportunité de découvrir un centre de recherche et développement à la pointe dans son domaine, offrant une réelle occasion pour un jeune ingénieur de pouvoir s'initier au monde de l'entreprise.

Par ailleurs, les résultats présentés ici soulèvent un certain nombre d'interrogations et devront être complétés pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, notamment essayer de se pencher l'intérêt de considérer des éléments finis complexes tels que l'hexaèdre, en effet travailler sur des éléments comme l'hexaèdre reste toujours difficile; avec ses fonctions de formes non linéaires, le passage de l'élément réel vers l'élément de référence est toujours délicat et se fait de manière itérative, cependant subdiviser un hexaèdre en tétraèdre peut s'avérer une méthode assez prometteuse; le tétraèdre étant plus facile à manipuler, afin de pouvoir contourner la problématique rencontrée précédemment, cependant en utilisant cette méthode on augmentera significativement la taille de notre problème.

J'aurais aimé avoir eu plus de temps afin de traiter davantage de problèmes liés à cette étude et ainsi contribuer de façon significative à la réussite de ce projet.

10 Bibliographie

- P. THOMAS, Eléments finis pour l'ingénieur, Collection EDF R&D
- N. Nemitz, Projection de solutions scalaires entre maillages tétraédriques
- A. Journeaux, code_Interpol Transfert de champs entre maillages,
- N. Nemitz, O. Moreau, Y. Ould-Rouis, Magneto-thermal coupling : A conservative based Method for scalar Field Projection
- A. Journeaux, N. Nemitz, O. Moreau, Locally conservative projection methods : Practical implementation and application to a magneto-thermal chaining
- A. Journeaux, F. Bouillault, J. Y. Roger, Mesh to mesh data transfer using fast point relocation technique
- J. P. Lefebvre, X. Desroches, Fonctions de forme et points d'intégration des éléments isoparamétriques
- S. Zhang, Invertible Jacobian for hexahedral finite elements