



RAPPORT DE STAGE DE FIN D'ÉTUDE DE :
YALHANE ARDJOUNE

**Recherche et développement d'une stratégie d'adaptation de
maillage multi-niveaux basée sur un estimateur d'erreur α
posteriori pour le logiciel MELODIE**

Tuteur Universitaire :

M. Hakim BOUMAZA

Responsables IRSN :

Mme Hanen AMOR

M. Marc BOURGEOIS

septembre 2014

Table des matières

Remerciements	2
Introduction	3
1 Cadre du stage	4
1.1 Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire	4
1.1.1 Présentation générale	4
1.1.2 Organisation	5
1.2 Présentation du LAGA	6
1.3 Objectif du stage	6
2 Présentation d'un projet de stockage en couche géologique	8
2.1 Le logiciel MELODIE	9
2.2 Modèle physique	10
2.3 Concept de base	10
2.4 Les modèles d'écoulements souterrains	10
2.4.1 L'écoulement	11
2.4.2 Le transport	11
2.5 Méthode de discrétisation d'un site de stockage	12
3 Estimation en norme d'énergie	13
3.1 Les principes généraux et propriétés	13
3.2 Le Problème étudié	14
3.3 Estimateurs basés sur une reconstruction $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ conforme	15
4 Techniques de marquage et raffinement de maillage	16
4.1 Algorithme adaptatif	16
4.2 Techniques de marquage	16
4.3 Technique de raffinement de maillage	18
4.3.1 Technique utilisée dans l'ancienne version de MELODIE	18
4.3.2 La méthode " <i>regular refinement</i> " utilisé dans ADAPT	20
4.3.3 La méthode " <i>newest vertex bisection</i> "	21
4.4 Résultats numériques	22
4.5 Comparaison des méthodes de raffinement	27
5 Stratégie de raffinement multi-niveaux	32
5.1 Présentation des différentes stratégies	32
5.2 Application : cas test avec solution analytique	34
5.3 Cas test issu du Benchmark Momas 2D : le flux oblique	36
Conclusion	39
6 Annexes	40
6.1 Annexes 1 : Estimateur d'erreur a posteriori	40
Références	44

Remerciements

Je tiens à remercier, en tout premier lieu, Madame Hanen AMOR ma tutrice de stage de m'avoir donné l'opportunité d'effectuer mon stage de fin d'étude au sein de L'IRSN. Je tiens également à la remercier de m'avoir encadré durant ces 6 mois de stage.

Je tiens ensuite à remercier Monsieur Minh Le Hoang, pour sa disponibilité et ses nombreux conseils.

Je remercie, Monsieur Fayssal Benkhaldoun, Monsieur Pascal Omnès et Monsieur Emmanuel Audusse pour leurs conseils et remarques durant les deux réunions entre le LAGA et L'IRSN.

Je remercie M.Hakim BOUMAZA mon tuteur universitaire, pour ses conseils et pour la relecture de ce rapport.

Merci aussi à mes voisins de bureau, Agustin Molinero Guera et Fiel Mikaela pour leur bonne humeur.

Finalement je remercie l'ensemble des 12 stagiaires pour l'agréable ambiance qu'ils ont installée tout au long de mon stage.

Introduction

Avec ses 58 réacteurs et 1100 sites renfermant des déchets nucléaires, la France détient le record du pays le plus nucléarisé au monde par rapport au nombre d'habitants. Selon l'AIEA, 78% de l'énergie en France est produite par la filière du nucléaire. Ce résultat est le fruit d'une politique qui remonte à plusieurs décennies. Très performante, cette technologie n'en reste pas moins génératrice de déchets dangereux pour l'homme et son environnement. La dangerosité de ces déchets nécessite une réflexion sur leur gestion afin de ne pas faire subir les conséquences de ce choix énergétique aux générations futures. Cette gestion à long terme est au centre de la réflexion portant sur le projet de stockage des déchets en profondeur et la sûreté d'un tel stockage. Pour permettre la réalisation d'un tel projet dont la durée de vie se compte en centaines de milliers d'années, la modélisation des systèmes hydrogéologiques et le transport des radionucléides dans ces milieux est une étape très importante dans le processus de démonstration de sûreté.

Ce stage de fin d'études entre dans le cadre des recherches concernant le stockage en profondeur. Il s'inscrit en particulier dans les études menées afin de doter l'IRSN d'un logiciel de modélisation indispensable pour toute expertise sur des dossiers de sûreté. Afin de mener à bien ces recherches et de développer un outil performant et répondant aux attentes, un logiciel de simulation numérique se basant sur les équations de convection-diffusion a été mis en place (MELODIE).

Les méthodes de discrétisation numériques contribuent, de part leur principe même, à l'écart entre le résultat des simulations et la réponse exacte au modèle. En effet un maillage trop grossier ou mal "adapté" au type de simulation envisagée peut provoquer un écart non négligeable avec la réalité et entraîner à l'obtention de résultats non pertinent. Le contrôle de ces écarts est une préoccupation essentielle. Pour les réduire il existe un moyen qui consiste à raffiner le maillage moyennant l'utilisation d'éléments plus petits. On constate que l'amplitude de ces écarts diminue. Toutefois l'inconvénient du raffinement est de voir les temps de calcul augmenter déraisonnablement.

Le stage a pour objectif principal de participer à la mise en place d'un outil dans MELODIE de raffinement adaptatif de maillage qui résulterait d'un compromis entre le coût des calculs et la précision souhaitée. Mais avant d'introduire ces techniques de raffinement de maillage on se propose dans un premier temps de cadrer le contexte du stage et de présenter l'environnement au sein duquel j'ai évolué pendant cinq mois.

1 Cadre du stage

Le stage s'est déroulé dans le cadre d'une collaboration entre l'IRSN et le LAGA qui a pour objectif final de mettre en place dans le logiciel de l'IRSN, MELODIE, une méthode de raffinement adaptative de maillage basée sur un critère mathématique. Mon travail a consisté à étudier puis comparer deux méthodes de raffinement de maillage, l'une développée dans le code MELODIE à l'IRSN(écrit en Fortran) et l'autre dans le code ADAPT du LAGA écrit en C++. J'ai ensuite eu à étudier sur le plan théorique les estimateurs d'erreur a posteriori dans le but d'établir une stratégie de raffinement de maillage multi-niveau. Mon stage s'est essentiellement effectué au sein des locaux de l'IRSN, toutefois j'ai également été en interaction avec le LAGA par le biais de multiples réunions.

1.1 Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire

1.1.1 Présentation générale

L'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN) est un établissement public industriel et commercial (EPIC) français créé par la loi de l'AFSSE (Agence Française de Sécurité Sanitaire Environnementale) puis par le décret n° 2002-254 du 22 février 2002. Il est placé sous tutelle conjointe des ministres de la Défense, de l'Environnement, de l'Industrie, de la Recherche et de la Santé.

Disposant d'un contrat d'objectifs avec l'Etat, l'IRSN voit ses missions organisées en 3 domaines :

1. Recherche et services d'intérêt public, incluant la contribution à l'information publique :
 - Définition et mise en œuvre de programmes de recherche, nationaux et internationaux, destinés à maintenir et développer les compétences nécessaires.
 - Formations et enseignements en radioprotection, sûreté et sécurité nucléaires, dispensés notamment aux professionnels de santé et aux personnes professionnellement exposées.
 - Contribution à l'information du public sur les risques nucléaires et radiologiques (publications, Internet, expositions, colloques...)
2. Appui et concours techniques aux autorités publiques pour les activités à vocation civile ou relevant de la défense :
 - Appui technique en matière de risques nucléaires et radiologiques pour les installations, les transports de substances radioactives, l'application des traités sur le contrôle des matières nucléaires et sensibles, la protection physique et la sécurité des applications industrielles et médicales.
 - Appui et concours techniques aux autorités publiques pour les activités à vocation civile ou relevant de la défense :

3. Prestations contractuelles d'expertises, d'études, de mesures pour le compte d'organismes publics ou privés :

- Réalisation d'expertises, recherches, analyses, mesures ou dosages pour des organismes publics ou privés, français ou non.

Les programmes scientifiques et techniques de l'IRSN sont :

- Sûreté des réacteurs à eau sous pression (hors défense), réexamen de sûreté des réacteurs de 900 MW et multiples programmes de recherche.
- Sûreté des autres installations, transports, déchets : expertise (ITER par exemple), stockage de déchets, démantèlement et recherche.
- Activité de défense : contrôles des matières nucléaires, protection contre les actes de malveillance.
- Radio-écologie : effets des rayonnements, mesure de radioactivité et recherches sur les séismes et sur le radon.
- Radioprotection normale et accidentelle : dosimétrie, radio pathologie et épidémiologie.
- Perception des risques : observatoire du risque.

1.1.2 Organisation

Pour faire face à cette diversité de missions, l'IRSN regroupait en 2011 1718 collaborateurs (54% d'hommes, 46% de femmes), présents sur 11 sites en France. 74% de ce personnel sont des ingénieurs, chercheurs ou cadres, le reste étant des techniciens et employés de support technique et administratif. En effet 40% du budget de l'IRSN (293 millions d'euros de recettes, 282 millions de dépenses) est consacré à la recherche.

Hormis la Direction générale et les Directions fonctionnelles et de support (Ressources humaines, Communication...), la répartition des employés est réalisée sur 3 pôles :

- Défense, sécurité et non-prolifération
- Sûreté nucléaire
- Radioprotection, environnement, déchets et crise

Chacun de ces pôles contient plusieurs directions, qui peuvent contenir chacune plusieurs services, qui eux-mêmes sont composés de plusieurs bureaux ou laboratoires. Le stage a donc eu lieu dans ce dernier pôle, "Pôle Radioprotection", dans la thématique "Déchets-Géosphère" (PRP-DGE), dans le "Service d'Expertise des Déchets Radioactifs et de la radioactivité Naturelle" (SEDRAN), et finalement au sein du "Bureau d'Expertise et de Recherche sur les Installations de Stockage" (BERIS). Cette unité est constitué d'une dizaine d'experts (généralistes, géologues, géochimistes, hydrogéologues, géo mécaniciens, chercheurs, modélisateurs ...). Ce bureau est chargé de l'expertise de sûreté des stockages de déchets radioactifs de surface ou en couches géologiques profondes. Il assure également l'évaluation des capacités

de confinement de différentes barrières des stockages de déchets radioactifs.

1.2 Présentation du LAGA

Pour faire simple le LAGA (Laboratoire d'Analyse Géométrique et Applications) est un laboratoire associé au CNRS (UMR 7539). Il est rattaché à l'institut Galilée, composante de l'Université Paris 13 et à l'Université Paris 8.

Il comprend environ 90 chercheurs et enseignants chercheurs, parmi lesquels on trouve une dizaine de chercheurs CNRS, 7 personnels ITA ET BIATSS, et plus de 50 doctorants.

Le laboratoire dont la direction est assurée par Philippe Souplet, est structuré en sept équipes de recherche qui se répartissent autour de plusieurs thématiques :

- Arithmétique et géométrie algébrique,
- Mathématiques pour le traitement de l'information et de l'image,
- Modélisation et Calcul scientifique,
- Physique mathématique et Équations aux dérivées partielles,
- Probabilités et Statistiques,
- Théorie ergodique et Système dynamique, Topologie algébrique.

Durant mon stage j'ai travaillé en collaboration avec l'équipe de Modélisation et Calcul Scientifique.

1.3 Objectif du stage

L'objectif de ce stage est de contribuer au développement du code MELODIE en complétant la stratégie de maillage disponible pour ce logiciel. La stratégie retenue est d'associer le maillage à une métrique (estimateur) qui guide la méthode de raffinement/déraffinement en fonction d'un critère d'erreur a posteriori, ce qui permet de mieux contrôler l'erreur de discrétisation associée à un modèle donné et ainsi garantir la qualité de la solution. Une telle méthode, basée sur l'erreur résiduelle explicite (utilisation du résidu de la solution numérique obtenue), a été mise en place dans MELODIE pour les simulations d'écoulement souterrain et de transport de solutés en milieux poreux saturés en eau en dimension 2. Les estimateurs, faisant intervenir les résidus des équations d'équilibres sont probablement les plus populaires. Les bornes supérieures sont en général des bornes calculables multipliées par une constante indépendante de la solution exacte et du pas du maillage mais dont la valeur est difficile à calculer explicitement car elle est dépendante des paramètres physiques. L'estimation n'est donc pas en général garantie. En effet, les différents travaux réalisés dans MELODIE ont permis de montrer sur certains exemples des erreurs liés à la fois à la programmation mais aussi à des incompréhensions

numériques probablement dues à la non garantie des constantes intervenant dans ces estimations. Cette méthode a donc été abandonnée au profit d'autres estimateurs a posteriori pour MELODIE qui remplissent au mieux les critères d'un estimateur optimal tout en restant faisable sur un plan purement industriel (cf. section 3.1).

Une telle méthode, basée sur la reconstruction locale de flux équilibrés est étudiée pour MELODIE. Cette autre classe d'estimations d'erreur a posteriori bien adaptée pour les problèmes paraboliques est basée sur une reconstruction $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme des flux de diffusion et de convection. Ce type d'estimateurs fournit des bornes garanties de l'erreur qui sont localement efficaces et robustes.

De plus une méthode de raffinement de déraffinement de maillage triangulaire a également été mise en place dans le logiciel MELODIE. Cette méthode consiste à découper les triangles à raffiner en joignant leurs centres de gravité aux sommets. Elle a finalement été abandonnée car sur certains cas test il a été observé, après le raffinement du maillage, une perturbation de la solution numérique. Elle laisse place à deux stratégies de raffinement "*regular refinement method*" et "*newest vertex bisection method*", deux stratégies qui permettent de conserver la régularité du maillage. Le but de ce travail a donc été dans un premier temps de réaliser des tests pour comparer ces deux méthodes afin de comprendre leurs avantages et inconvénients. Par la suite, j'ai effectué d'autres tests dans le but de définir une stratégie pour faire du raffinement de maillage multi-niveau.

2 Présentation d'un projet de stockage en couche géologique

La figure 1 suivante présente l'architecture d'un projet d'un stockage de déchets radioactifs en profondeur celle du projet « Cigéo » de l'Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs (ANDRA). Il est composé de différentes zones accueillant les déchets de haute activité et à vie longue, dits déchets C, qui sont les résidus du traitement des combustibles usés, et les déchets de moyenne activité et vie longue, dits déchets B, qui sont des déchets technologiques issus de ces mêmes processus de traitement des combustibles usés.

La profondeur du stockage est d'approximativement 500 mètres, profondeur qui permet d'atteindre la couche d'argile du Callovo-Oxfordien choisie par différentes études pour sa faible perméabilité. Des cavités élémentaires (les alvéoles) creusées dans la roche en profondeur accueillent les colis de déchets et sont regroupées par grands ensembles. Ces derniers sont reliés entre eux par des galeries reliées à la surface par des descenderies et des puits d'accès. En surface, des installations de support permettent notamment l'accueil et le conditionnement des colis.

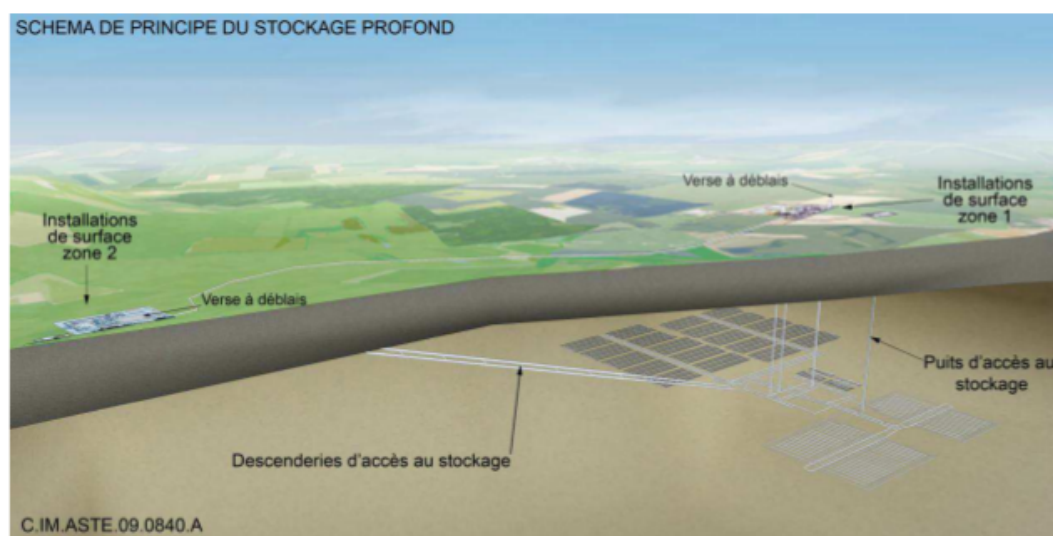


FIGURE 1 – Schéma de principe d'une architecture de stockage (ANDRA, dossier 2009)

2.1 Le logiciel MELODIE

La compréhension des phénomènes qui interviendront dans un stockage de déchets radioactifs sur de longues périodes (pouvant aller de quelques centaines d'années jusqu'à des millions d'années) nécessite notamment l'appui de la simulation numérique. Dans cet objectif l'IRSN a développé (en partenariat avec l'Ecole des Mines de Paris) et continue à développer le logiciel MELODIE (Modèle d'Evaluation à LOnge terme des Déchets Irradiants Enterrés), afin de disposer d'un outil performant qui permet de modéliser le transfert de radionucléides en phase aqueuse, au sein de milieux poreux, depuis les alvéoles d'un stockage jusqu'aux exutoires de la géosphère. En effet ce logiciel permet de simuler, en 2 et 3 dimensions, les écoulements souterrains et le transport de solutés en milieux poreux saturés ou non-saturés en eau.

Pour la résolution de ces équations MELODIE est constitué de différents outils :

- melo : code de calcul qui permet la résolution des écoulements et le transport de radionucléides.
- melomail : permet de générer des fichiers d'entrée (à partir de scénario) pour le code de calcul melo.
- melobuild : outils interactifs d'aide à la création du fichier scénario.
- meloview : outils graphiques de visualisation des fichiers résultats du code de calcul melo.

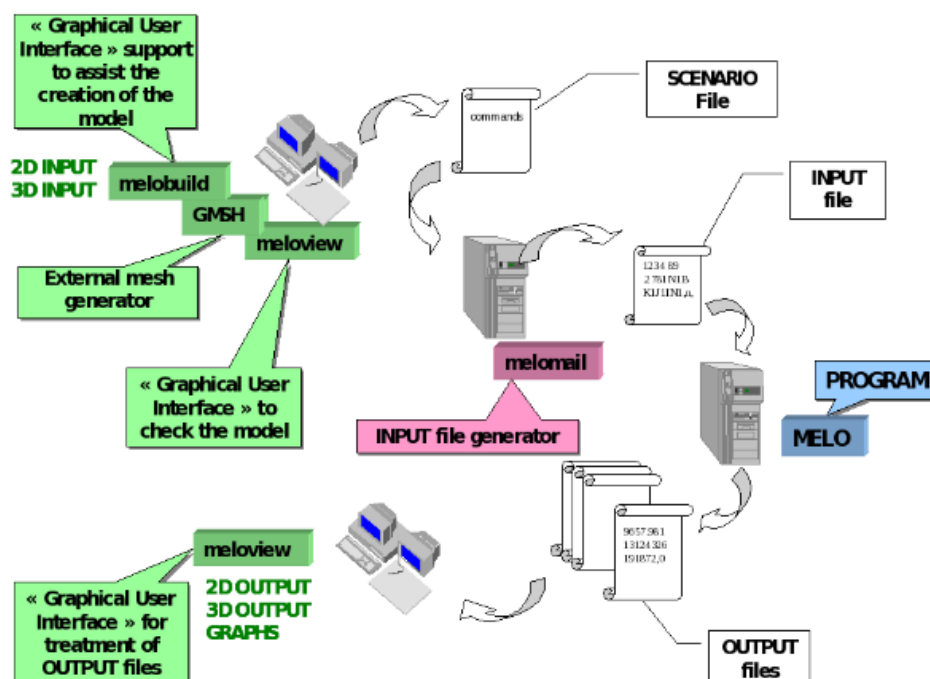


FIGURE 2 – Différents outils de MELODIE

2.2 Modèle physique

Les évaluations de sûreté relatives aux installations de stockage de déchets radioactifs en couche géologique profonde nécessitent la compréhension et la modélisation d'une part des systèmes hydrogéologiques gouvernant les écoulements souterrains et d'autre part des mécanismes de transfert des radionucléides à travers la roche hôte et les différents matériaux de remplissage d'une installation. Les modèles d'écoulements souterrains constituent la base des calculs des transferts des radionucléides depuis les installations de stockage jusqu'aux exutoires des systèmes hydrogéologiques. Les échelles de modélisation conduisent à s'intéresser aux mécanismes de l'écoulement et du transfert des radionucléides au niveau macroscopique.

2.3 Concept de base

La plupart des roches et des sols contiennent naturellement un certain pourcentage de vide qui peut être occupé par de l'eau ou des polluants : c'est ce qu'on appelle la porosité. La porosité est constituée par les espaces libres qui existent entre les grains de la roche ou par les fissures ou micro fissures. Pour caractériser la porosité d'un milieu géologique, il convient de définir un volume élémentaire représentatif (VER) dont la taille permet de déterminer une valeur moyenne de la porosité telle que les effets dus à la variation de la taille des pores soient négligeables. La taille du volume représentatif doit également garantir que les variations des paramètres d'un volume à un autre peuvent être approchées par des fonctions continues et correspondre aux échelles de mesure des instruments de relevé des valeurs des paramètres. Le milieu naturel dans lequel l'eau circule est par hypothèse un milieu poreux continu équivalent. La figure 2 présente la simplification effectuée pour la modélisation. Ainsi, les propriétés physiques du milieu sont considérées comme des grandeurs moyennes traduisant, à l'échelle du volume élémentaire représentatif (VER) choisi, la résultante des hétérogénéités apparentes de la roche.

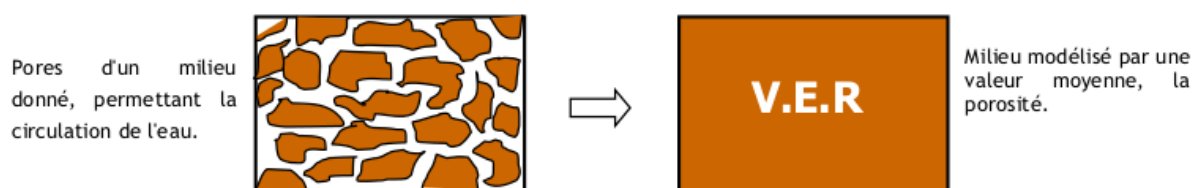


FIGURE 3 – volumes élémentaires représentatifs

2.4 Les modèles d'écoulements souterrains

Les modèles d'écoulements souterrains constituent la base des calculs des transferts des radionucléides depuis les installations de stockage jusqu'aux exutoires des systèmes hydrogéologiques. Ces calculs de migration des radionucléides à travers un milieu poreux saturé prennent en compte les phénomènes de

convection, de dispersion, de diffusion, ainsi que la solubilité des radionucléides, la capacité de rétention des formations géologiques, la décroissance radioactive et la filiation radioactive.

Il y a deux notions essentielles qui permettent d'effectuer les calculs de migration des radionucléides à travers un milieu saturé : d'une part les caractéristiques hydrogéologiques de l'eau dans un milieu poreux et d'autre part le comportement d'un soluté dans ce même milieu.

2.4.1 L'écoulement

L'équation générale de l'écoulement a pour origine la loi de conservation de la masse et la loi de Darcy. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\nabla \cdot (\mathbb{K} \nabla h) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + q \quad (1)$$

Avec :

$$\vec{U} = -\mathbb{K} \nabla h \quad (\text{loi de Darcy}) \quad (2)$$

et :

S_s : coefficient d'emménagement \vec{U} : vitesse de Darcy ($m.an^{-1}$)
 h : charge hydraulique (m) q : débit d'eau injecté ou prélevé par m^3 de milieu ($m^3.an^{-1}.m^{-2}$)
 K : perméabilité ($m.an^{-1}$)

2.4.2 Le transport

Le transport d'un soluté dans un milieu poreux est décrit par l'équation de transport (équation 3) qui relie la concentration du soluté et les différents phénomènes physiques cités précédemment.

$$\nabla \cdot \left(\underbrace{D + \omega d \nabla C_j}_{\text{A}} - \underbrace{\vec{u} C_j}_{\text{B}} \right) = \underbrace{\omega' R_j \frac{\partial C_j}{\partial t}}_{\text{C}} + \underbrace{\lambda_j R_j \omega' C_j}_{\text{D}} - \underbrace{\lambda_i R_i \omega' C_i \frac{M_j}{M_i}}_{\text{E}} \quad (3)$$

avec

C_j : concentration volumique de l'élément j ($kg.m^{-3}$)	ω' : porosité cinématique
C_i : concentration volumique de l'élément i ($kg.m^{-3}$)	D : tenseur de dispersion
\vec{u} : vitesse de Darcy ($m.an^{-1}$)	d : coefficient de diffusion ($m^2.an^{-1}$)
λ_j : constante de décroissance radioactive de l'élément j (an^{-1})	$\frac{M_j}{M_i}$: rapport des masses des éléments i et j
λ_i : constante de décroissance radioactive de l'élément i (an^{-1})	ω : porosité totale
R_j : "coefficient de retard" de l'élément j	R_j : "coefficient de retard" de l'élément j

Phénomène physique modélisés :

- A Diffusion-dispersion
- B Convection
- C Adsorption désorption
- D Décroissance radioactive
- E Filiation radioactive

2.5 Méthode de discrétisation d'un site de stockage

Pour résoudre numériquement les équations de bilan, il est nécessaire tout d'abord de créer une grille, c'est à dire une représentation discrète du domaine géométrique sur laquelle le problème doit être résolu. La maille divise le domaine en un nombre fini de sous-domaines (éléments ou volumes de contrôle). Les mailles peuvent être construites de deux manières différentes : mailles régulières, ou des mailles structurées et non structurées. L'avantage d'utiliser des maillages structurés est qu'ils simplifient grandement le calcul, mais par contre le principal inconvénient est qu'ils ne peuvent être utilisés que pour des domaines avec des géométries relativement simples. Le domaine d'étude est donc subdivisé en un nombre fini d'éléments dont les sommets (nœuds) sont les points où la valeur de la variable inconnue est calculée. En particulier, les variables du bilan de masse et de l'énergie (pression, température, fraction massique de densité, etc.) sont attribuées sur les points nodaux (centre du volume de contrôle) de la grille primaire, alors que les variables relatives au bilan de la quantité de mouvement sont attribuées sur les bords des volumes de contrôle de la grille primaire. A certains de ces nœuds, des conditions aux limites sont imposées pour modéliser le relâchement des radionucléides du dépôt dans la géosphère ou tenir compte de propriétés particulières aux frontières du domaine. Les paramètres physiques tels que : perméabilité, porosité, coefficient de diffusion et dispersivité sont considérés comme constants sur chaque élément du maillage.

La figure 4 présente grossièrement la géométrie d'un stockage en couche profonde avec le puits, le tunnel principal et 6 alvéoles de stockage. Le maillage bleu représente une possible modélisation avec des éléments cubiques.

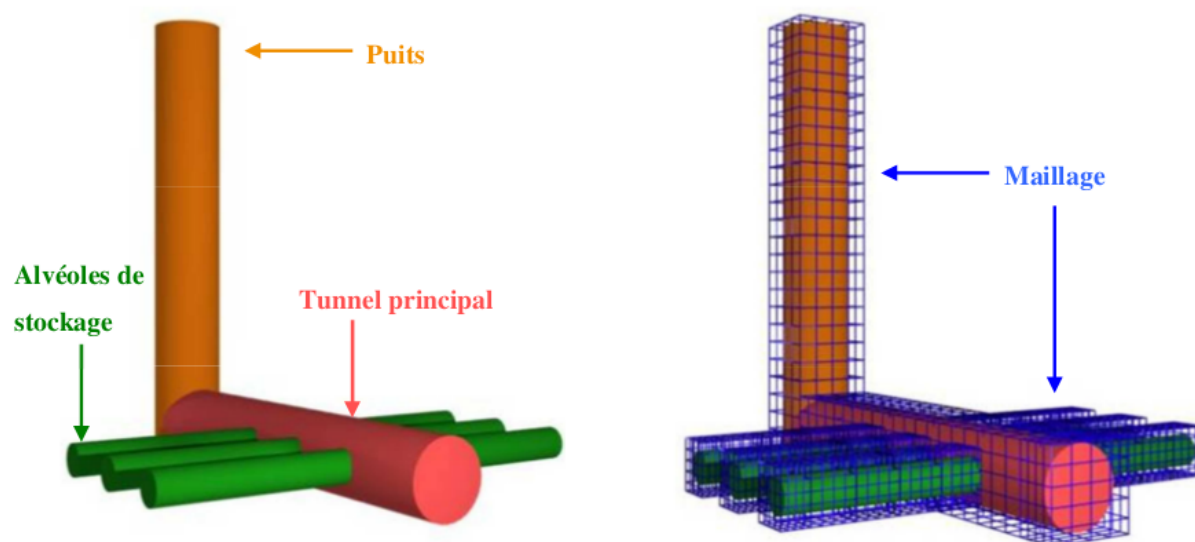


FIGURE 4 – Principe de la modélisation d'un stockage

3 Estimation en norme d'énergie

3.1 Les principes généraux et propriétés

La réalisation d'une simulation réalisée peut prendre beaucoup de temps. Une phase délicate dans ce processus est la construction du maillage. En effet, si le maillage est trop grossier, la durée des calculs sera courte, mais le résultat ne sera pas satisfaisant car assez approximatif. Mais si le maillage est très fin le calcul sera peut être inutilement long (plusieurs milliers de jours) et le processus lui-même risque de se terminer par une interruption extérieure (comme par exemple une limite des moyens informatiques). Il faut donc trouver un bon compromis de manière à ce que le maillage soit "fin" uniquement aux endroits nécessaires.

Les estimateurs d'erreurs fournissent des bornes sur la différence entre la solution exacte et la solution approchée dans une certaine norme. Ces bornes sur l'erreur peuvent être évaluées dès que la solution approchée a été calculée. En effet, ces bornes sont évaluées uniquement en fonction de la solution calculée, des données du problème et des données du maillage. Pour les estimateurs d'erreur a posteriori, on peut formuler plusieurs propriétés importantes qu'il convient de satisfaire.

- P1.** La première propriété que doit vérifier un estimateur d'erreur a posteriori est de fournir une borne supérieure garantie, en d'autres termes, une borne supérieure qui soit entièrement calculable, sans aucune constante inconnue.
- P2.** Il faut définir un indice d'efficacité pour pouvoir estimer l'évaluation de l'erreur.
- P3.** Un estimateur d'erreur a posteriori doit pouvoir être localisé. Ces indicateurs locaux de l'erreur sont utiles s'ils ne surestiment pas trop l'erreur localement. Cette propriété s'exprime en montrant que les indicateurs locaux fournissent une borne inférieure de l'erreur locale à une constante multiplicative près, ce qu'on appelle aussi efficacité locale. En pratique, le maillage est raffiné là où la valeur des indicateurs locaux est grande, ce qui introduit la notion de raffinement adaptatif du maillage. Ainsi, il est aussi possible de déraffiner le maillage dans les régions où ces indicateurs sont les plus petits.
- P4.** Il est souhaitable que les constantes intervenant dans la formulation de l'estimateur soient indépendantes des paramètres du problème et de leurs variations. Dans ce cas, l'estimateur d'erreur a posteriori est dit robuste. Dans des problèmes physiques, les paramètres et coefficients (diffusivité, réactivité, convection, taille relative des échelles d'espace et de temps, ...) peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeur. Un estimateur robuste assure que l'estimation d'erreur a posteriori sera de la même qualité dans toutes les situations.

P5. Enfin, même si l'adaptation du maillage est un bon moyen pour obtenir une solution plus précise avec moins de calcul, il faut garantir que le coût d'évaluation de l'estimateur d'erreur a posteriori soit beaucoup plus petit que le coût requis pour obtenir la solution approchée elle-même. Dans ces conditions, un bon estimateur d'erreur a posteriori doit se décomposer en des indicateurs locaux pouvant être évalués localement et dont le coût de calcul est négligeable par rapport à la résolution du problème global.

Par ailleurs, pour la réalisation d'une stratégie adaptative efficace, il est important de faire la distinction entre les différentes composantes de l'erreur. En particulier, pour un problème instationnaire, il s'agit de distinguer et estimer séparément l'erreur provenant de la discrétisation en espace et celle provenant de la discrétisation en temps de sorte que, en adaptant le maillage et/ou le pas de temps, ces deux composantes de l'erreur puissent être distribuées de façon équilibrée et qu'elles soient du même ordre de grandeur.

3.2 Le Problème étudié

L'estimateur d'erreur a posteriori a pour le moment été mis en place pour l'équation d'écoulement sans considération temporelle. Donc pour la suite de cette étude on considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbb{K} \nabla u) &= f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \ d = 2 \text{ ou } 3, \\ u &= g & \text{sur } \Gamma_D, \\ -\mathbb{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} &= u_n & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4)$$

avec :

Ω : domaine considéré

Γ_D : bord avec des conditions de Dirichlet

Γ_N : bord avec des conditions de Neumann

u : charge hydraulique

\mathbb{K} : tenseur de perméabilité

Pour la discrétisation du problème (4) une méthode de volumes finis centrés sur les sommets appelée " Finit Volume-Finit Element discretisation " (FVFE) est utilisée. Le schéma de principe est expliqué en détail dans le rapport de M.Hafiz [3].

Schéma FVFE. Etant donné une triangulation \mathcal{T}_h du domaine Ω , appelée maillage primal, on construit le maillage dual \mathcal{D}_h basé, par exemple, sur les centres de gravités (cf. figure 5). Le schéma FVFE consiste donc à chercher une solution approchée u_h linéaire sur chaque élément $T \in \mathcal{T}_h$ et vérifiant la conservativité locale sur les cellules duales internes ou celles associées aux bords de Neumann

$$-\langle \mathbb{K} \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial D} = (f, 1)_D, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h^{\text{int}, N}, \quad (5)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante du bord du domaine ∂D . Par construction, le flux approché $-\mathbb{K}\nabla u_h$ est constant par élément et vérifie la conservativité locale, toutefois il n'est pas régulier puisqu'il n'appartient pas à $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$.

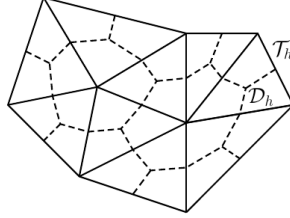


FIGURE 5 – Maillage primal et maillage dual associé

3.3 Estimateurs basés sur une reconstruction $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ conforme

Reconstruction $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ conforme. L'idée est d'effectuer une correction sur le flux à partir de la solution numérique. On définit donc $\mathbf{t}_h \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ une telle correction, appelée flux équilibré, c'est-à-dire qui vérifie

$$(\nabla \cdot \mathbf{t}_h, 1)_D = (f, 1)_D, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h^{\text{int}, N}. \quad (6)$$

Forme bilinéaire. On définit la forme bilinéaire associée au problème (4)

$$\mathcal{B}(u, v) = (\mathbb{K}\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Une norme duale de H^1 . On définit une norme duale $\|\bullet\|_*$, voir [4], avec laquelle on estime l'erreur a posteriori

$$\|u\|_* = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\|v\|}.$$

Une borne supérieure. Sous l'hypothèse de conservation locale (6), une estimation de l'erreur a posteriori est

$$\|u - u_h\|_* \leq \eta = \left\{ \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \eta_D^2 \right\}^{1/2} = \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \left(C_1 \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D + \|\mathbb{K}\nabla u_h + \mathbf{t}_h\|_D + C_2 \sum_{\gamma \in \partial D \cap \Gamma_N} \|u_n - u_{n\gamma}\|_\gamma \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (7)$$

où C_1 et C_2 sont deux constante dépendant des données du problème.

C'est donc à chaque nœud du maillage primal qu'est attribué un estimateur d'erreur a posteriori

4 Techniques de marquage et raffinement de maillage

Disposant d'un estimateur d'erreur a posteriori, il nous reste à choisir les éléments du maillage qui doivent être raffinés ou déraffinés.

4.1 Algorithme adaptatif

Le but ici est de concevoir un algorithme permettant de garantir que l'erreur en norme d'énergie calculée entre la solution exacte et la solution approchée soit inférieure à une certaine tolérance donnée. L'algorithme adaptatif en espace possède donc la structure générale suivante, à un instant donné :

- E1** Soit \mathcal{T}_k une triangulation obtenue depuis \mathcal{T}_0 un maillage donné comme maillage initial
- E2** Résoudre le problème sur le maillage \mathcal{T}_k
- E3** Pour chaque $K \in \mathcal{T}_k$ calculer les indicateurs d'erreurs locaux obtenus sur les cellules duales de ce maillage, ainsi que l'indicateur d'erreur global.
- E4** Si le calcul de cet estimateur ne satisfait pas le critère d'arrêt alors choisir les éléments à raffiner puis revenir à l'étape (**E2**) de cet algorithme.

Dans le cas d'un problème instationnaire, deux nouveaux points apparaissent dans l'algorithme

- T1** Le processus de raffinement doit combiner le contrôle du pas d'espace et du pas de temps.
- T2** Des déraffinements dans certaines régions du maillage doivent être considérées lorsque la solution évolue en temps.

Ainsi l'algorithme final combinant les stratégies en espace et temps est le suivant :

- ET1** Pour un pas de temps donné, raffiner adaptativement le maillage en utilisant les étapes (**E1**) à (**E4**).
- ET2** Si l'indicateur d'erreur a posteriori en temps ne satisfait pas le critère d'arrêt alors il faut raffiner le pas de temps et recommencer l'étape (**ET1**).
- ET3** Sinon, déraffiner adaptativement le maillage et passer au temps discret suivant.

4.2 Techniques de marquage

Disposant d'un estimateur d'erreur a posteriori sur les cellules duales, donné par :

$$\eta_D = C_1 \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D + \|\mathbb{K} \nabla u_h + \mathbf{t}_h\|_D + C_2 \sum_{\gamma \in \partial D \cap \Gamma_N} \|u_n - u_{n\gamma}\|_\gamma,$$

l'étape suivante consiste à définir un ensemble d'éléments du maillage à raffiner. L'estimateur choisi est défini sur des cellules duales $D \in \mathcal{D}_h$. Cependant le raffinement doit se faire sur les éléments du maillage primal \mathcal{T}_h . Une solution possible est de marquer tous les éléments $T \in \mathcal{T}_h$ associés à la cellule D où η_D est jugé comme "trop important". La question qui se pose est de décider quels éléments du maillage doivent être raffinés ou déraffinés, on parle alors de technique de marquage. Il faut ensuite choisir les techniques de raffinement et de déraffinement des éléments qui ont été marqués. La sélection de ces cellules peut se faire en utilisant l'une des stratégies suivantes :

- S1** La stratégie dite du maximum consiste à identifier la valeur maximale de l'indicateur η_{max} et de la multiplier par une valeur de référence $\gamma_{ref} \in (0, 1)$ puis de sélectionner les éléments dont la valeur de l'indicateur est plus grande que la valeur maximale de l'indicateur multipliée par cette valeur de référence et de les raffiner. Pour des valeurs élevées de γ_{ref} (proche de 1) la stratégie devient très sélective alors que des valeurs petites de γ_{ref} (proche de 0) sélectionnent une grande partie des éléments du maillage.
- S2** La seconde stratégie dite de Dörfler consiste à calculer un seuil composé de la norme discrète L^2 de l'indicateur d'erreur multiplié par une valeur de référence et de sélectionner tous les éléments dépassant ce seuil et de les raffiner.
- S3** Enfin la dernière stratégie dite d'équidistribution est basée sur l'idée d'une équidistribution de l'erreur locale sur tous les éléments du maillage.

4.3 Technique de raffinement de maillage

Après avoir marqué les éléments il faut choisir les techniques de raffinement et déraffinement. Nous allons dans cette partie nous intéresser aux différentes techniques qui existent.

Pour des maillages triangulaires, il existe différentes méthodes de raffinement de maillages (structurés ou non) en 2 et 3 dimensions. Dans le but d'avoir un maillage conforme deux étapes sont nécessaires. En effet après l'étape de découpe des éléments une étape de complétion permet d'enlever les nœuds non conformes issus de l'étape de découpe.

4.3.1 Technique utilisée dans l'ancienne version de MELODIE

La première méthode implémentée dans MELODIE présente un avantage considérable, à savoir qu'elle n'introduit pas dans le maillage des noeuds non conformes. Cette méthode a donc été choisie de par sa simplicité de mise en place. Cependant elle ne permet pas de garantir la régularité du maillage puisqu'elle introduit des déformations importantes des triangles.

Description de la méthode de raffinement :

Lorsqu'un triangle a été choisi pour être raffiné, il est découpé en trois triangles en joignant les sommets au centre de gravité de ce triangle comme l'illustre la figure (6).

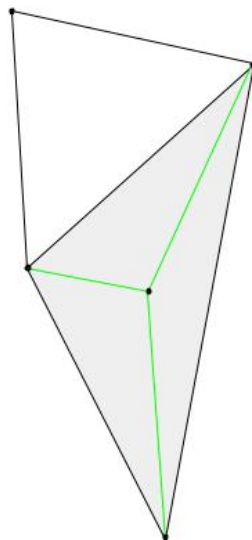


FIGURE 6 – Exemple de raffinement d'un triangle interne via une méthode sans création de nœuds non conforme

Si un triangle à raffiner présente une arête au bord, on peut séparer le nouveau triangle au bord en créant un nouveau sommet au milieu de l'arête et en reliant ce sommet avec le centre de gravité (cf figure 7)

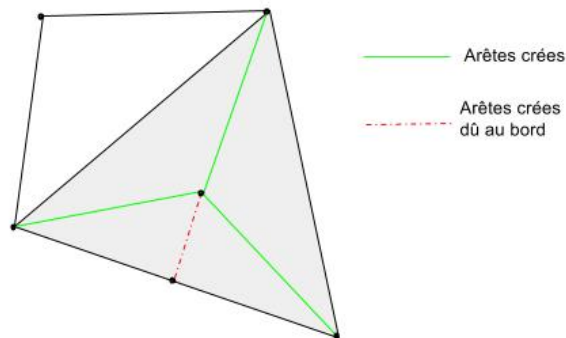


FIGURE 7 – Exemple de raffinement d'un triangle au bord

Le maillage a un rôle important dans le déroulement du calcul. En 2D il est important que les mailles vérifient le critère de Delaunay : pour un triangle seuls les sommets formant ce triangle sont contenus à l'intérieur du cercle circonscrit à ce triangle. Une étape de correction est alors nécessaire afin de remédier à ce problème. Cette étape permet de réorganiser quelques arêtes du maillage (voir figure 8).

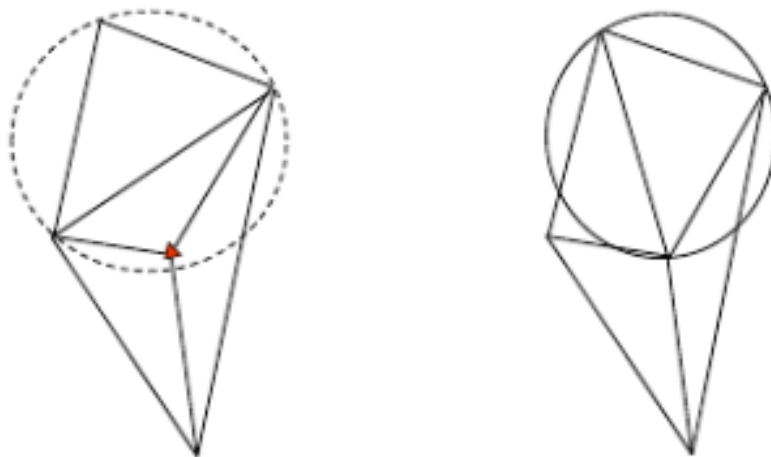


FIGURE 8 – Réaffectation d'arête en vue de vérifier le critère de Delaunay

L'expérience numérique a montré l'efficacité de cette méthode dans des cas simples. Cependant elle montre également que le temps ajouté dû à l'étape de correction du maillage semble non négligeable. Par ailleurs pour des problèmes instationnaires, le changement de connectivité de maillage induit par cette étape perturbe la solution numérique et donc ajoute une source d'erreur supplémentaire. Cette méthode a donc été abandonnée pour laisser place à deux stratégies de raffinement permettant de préserver la régularité du maillage : les méthodes "*newest vertex bisection*" et "*regular refinement*".

4.3.2 La méthode "*regular refinement*" utilisé dans ADAPT

On se propose de décrire cette technique utilisée par le logiciel ADAPT (développé au LAGA), et dont l'efficacité a été démontrée dans le rapport de M.Hafiz (cf [3]).

Lorsqu'un triangle a été choisi pour être raffiné, il est divisé en 4 triangles en joignant les milieux des arêtes.(voir figure 8)

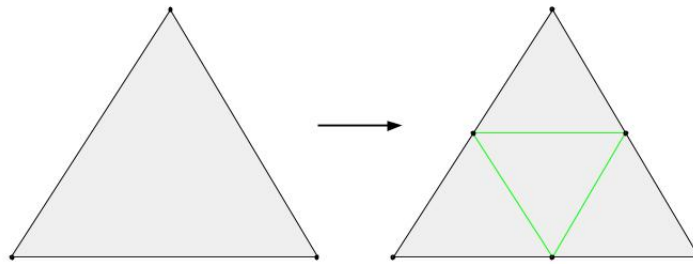


FIGURE 9 – Raffinement d'un triangle interne

Cette méthode possède l'avantage que les sous-triangles provenant du raffinement d'un triangle "père" sont géométriquement similaires à celui-ci.

Si le niveau de raffinement d'un triangle est égal à deux chacun des 4 sous-triangles sera à son tour divisé en 4. Contrairement à la méthode précédente cette méthode introduit dans un premier temps des nœuds orphelins ou encore appelé nœuds non conformes. Pour maintenir la conformité du maillage, on ajoute une étape supplémentaire dans le processus de raffinement : Pour un triangle quatre cas de figures peuvent se présenter en fonction du niveau de raffinement de ses trois voisins :

- Si un triangle après raffinement n'a aucun voisin raffiné alors il reste tel quel.
- Si l'un de ses voisins est découpé alors il est découpé en deux.
- Si deux de ses voisins sont découpés alors il est découpé en trois.
- Si quatre de ses voisins sont raffinés alors il est découpé en quatre (voir figure 10).

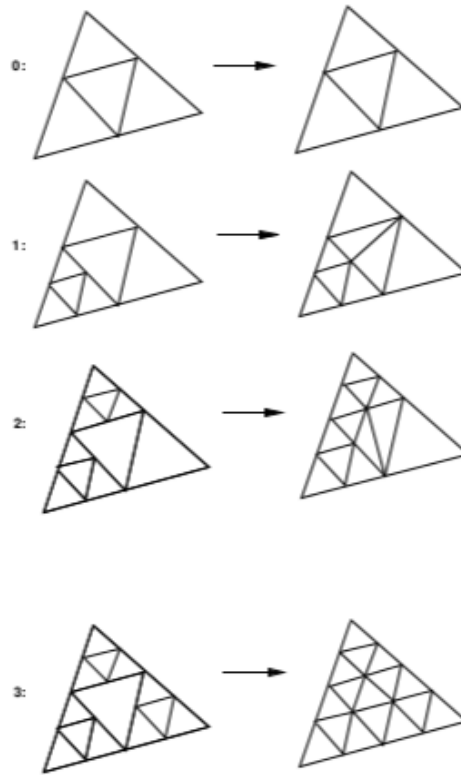


FIGURE 10 – Conformité du maillage

4.3.3 La méthode "*newest vertex bisection*"

Nous allons décrire l'idée de la méthode "*newest vertex bisection*" (NVB). On note \mathcal{T}_0 la triangulation de départ. Pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_0$ on choisit une arête de référence, l'arête la plus grande par exemple. On note \mathcal{T}_l une triangulation obtenue depuis \mathcal{T}_0 après une succession de *newest vertex bisection*, pour cette méthode la règle de raffinement se définit comme suit, (cf figure 11)

- Pour raffiner l'élément $T \in \mathcal{T}_l$, le milieu x_T de l'arête de référence E_T devient un nœud du maillage, et le triangle T est découpé en joignant x_T et le nœud opposé à E_T .
- Les arêtes opposées au nœud x_T deviennent à leur tour des arêtes de référence des deux triangles fils T_1 et T_2
- Après avoir coupé en deux tous les triangles marqués, la triangulation résultante comporte généralement des nœuds non conformes. Par conséquent, certaines bisections supplémentaires sont nécessaires pour obtenir \mathcal{T}_{l+1} .
- La dernière étape ne conduit qu'à un nombre fini de bisections supplémentaires. Phénomène démontré dans l'article de M.Karkulik, D.Pavlicek et D.Praetorius (cf [5])

Pour la méthode "*longest edge bisection*" l'arête de référence est l'arête la plus longue.

En adoptant cette méthode, on garantit ainsi que c'est l'angle le plus grand du triangle marqué qui est toujours divisé. De plus on s'attend à ce que la régularité du maillage soit conservée.

Il a de plus été prouvé par Rosenberg et Stenger (cf [6]) que le plus petit angle du maillage raffiné est toujours supérieur à la moitié de l'angle minimal de la triangulation initiale.

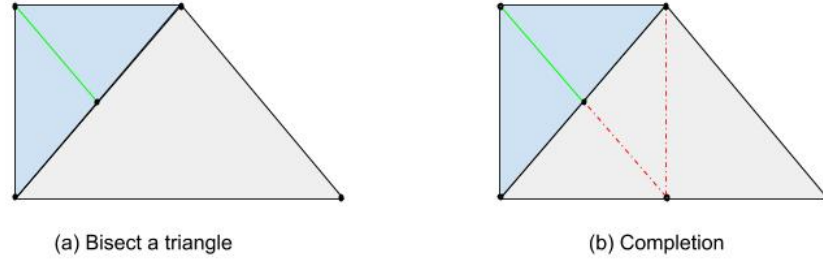


FIGURE 11 – Raffinement d'un triangle par la méthode longest edge bisection

4.4 Résultats numériques

On se propose dans cette section, d'évaluer la pertinence et l'efficacité de cette nouvelle technique combinant l'estimateur d'erreur a posteriori avec les deux algorithmes de raffinement. L'estimateur a été implémenté uniquement dans le logiciel MELODIE. Pour pouvoir l'utiliser dans le logiciel ADAPT une routine externe de lecture écriture de maillage a été introduite dans ADAPT. Ainsi, en fournissant un maillage initial, l'estimateur calculé au nœuds du maillage et un niveau de raffinement pour chaque itération, on peut raffiner le maillage successivement.

On considère un problème modèle du système (4) à solution analytique c'est à dire dont la solution exacte est connue. L'intérêt de cette étude réside dans le fait qu'il est impossible de donner une forme de solution générale au problème continu. On se propose donc de s'intéresser à des solutions moins régulières et présentant éventuellement des singularités dans le domaine. Ainsi, le raffinement guidé par l'analyse d'erreur a posteriori devrait se localiser aux singularités de cette solution. Pour ce faire, on se propose de reprendre un cas test présenté par M.Vohralik (cf. [4]) avec une perméabilité hétérogène et qui varie significativement dans le domaine.

On considère le problème (4) où le second membre f est nul et le domaine $\Omega = (-1, 1)^2$ est subdivisé en 4 sous-domaines Ω_i . La perméabilité \mathbb{K} est égal à $k_i \mathbb{I}_d$ dans chaque sous-domaines (cf figure 12). La solution analytique est donc connue et a la forme suivante dans le plan de coordonnées polaires :

$$u(r, \theta) = r^\alpha (a_i \sin(\alpha\theta) + b_i \cos(\alpha\theta))$$

où a_i , b_i sont des constantes dépendant de Ω_i , de la perméabilité et de α un paramètre associé avec

$K_1 = K_3 = 100$, $K_2 = K_4 = 1$, et $\alpha = 0.1269$, ces données sont tirées de l'article de Vohralik [4]. On peut noter que seule la composante normale du flux $-\mathbb{K}\nabla u$ est continue à travers les éléments du maillages. De plus, la solution est peu régulière puisque elle n'appartient qu'à $H^{1+\alpha}$ et présente une singularité à l'origine du plan.

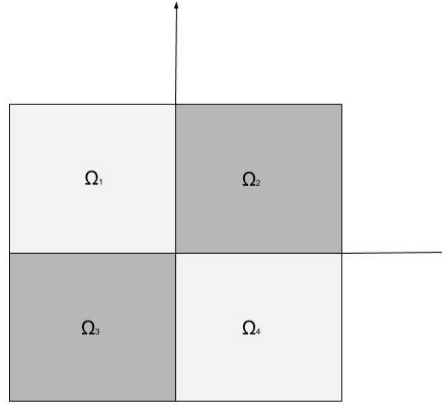


FIGURE 12 – Domaines et géométrie du problème

On trace la solution numérique sur un maillage initial grossier et non structuré ainsi que l'estimateur d'erreur qui lui est associé. Ces résultats sont donnés sur le figure 13.

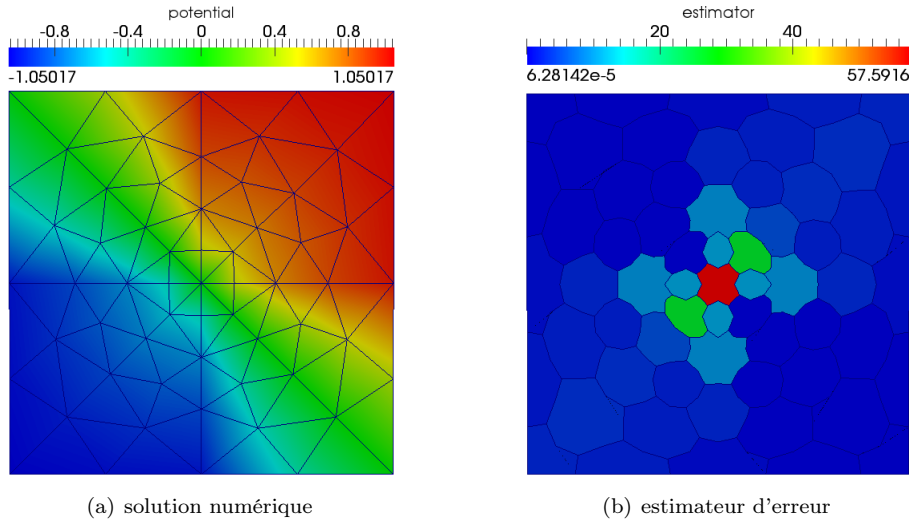


FIGURE 13 – Solution numérique obtenue pour un maillage non-structuré grossier

On observe que le comportement singulier de la solution dû au jeu de paramètre donné en entrée est bien capté par l'estimateur. Par conséquent, on s'attend à ce que le raffinement se localise à l'origine. On se propose donc par la suite d'observer le comportement de l'estimateur d'erreur avec nos deux méthodes de raffinement. Pour ce faire, on utilise pour marquer les éléments la stratégie dite du maximum (cf. section 4.2), en faisant le choix de prendre la constante γ_{ref} égale à 0,5. Les figures 14 et 15 permettent

de comparer les deux stratégies de raffinements "*newest vertex bisection method*" et "*regular refinement method*". Ainsi, on trace sur ces figures l'estimateur d'erreur a posteriori ainsi que la solution numérique pour la première, dixième et vingtième itération, sans prendre en considération un critère d'arrêt lors de l'utilisation de ces techniques de raffinement.

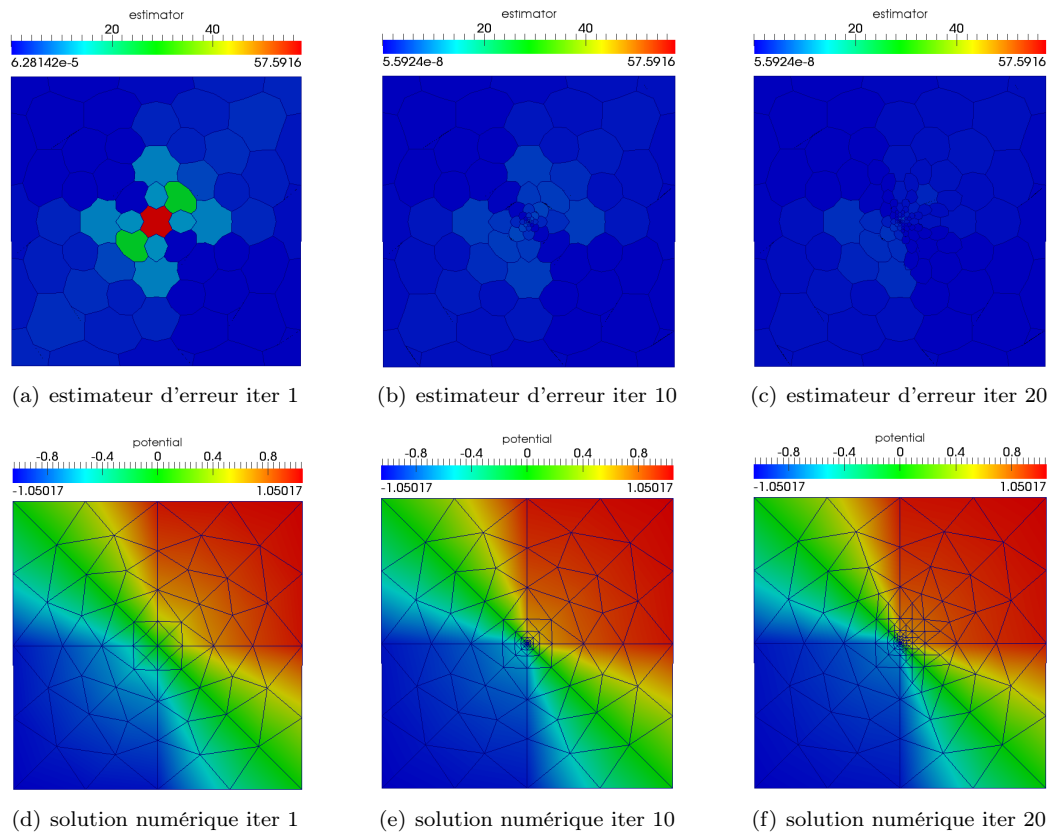
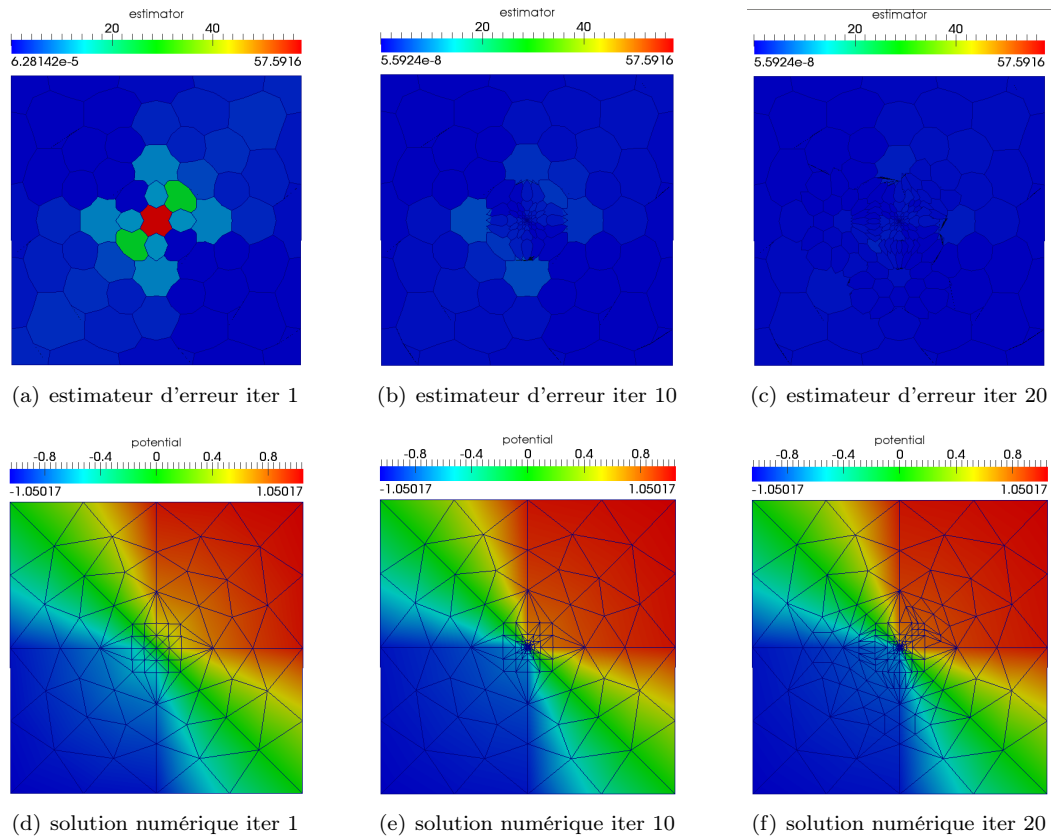


FIGURE 14 – Résultats numériques obtenus en utilisant la technique "*newest vertex bisection method*"

Itération	nombre de noeuds	nombre de triangles	estimateur d'erreur	erreur L^2
1	65	112	56.5897840	0.0245344
10	97	176	37.0505510	0.0048803
20	137	256	26.6924848	0.0009135

TABLE 1 – Estimateur d'erreur et erreur L^2 pour les itérations 1, 10, 20

FIGURE 15 – Résultats numériques obtenus en utilisant la technique "*regular refinement method*"

Itération	nombre de noeuds	nombre de triangles	estimateur d'erreur	erreur L^2
1	77	136	60.5072765	0.0130076
10	205	392	28.2390971	0.0006469
20	448	878	16.6309544	0.0001096

TABLE 2 – Estimateur d'erreur et erreur L^2 pour chaque itération

On observe sur le tableau 2 que la méthode "*regular refinement*" est plus gourmande en nombre de nœuds mais qu'à nombre de nœuds égal l'estimateur a le même comportement.

En revanche, on note sur la figure 15, une légère détérioration des mailles. Cette irrégularité du maillage est due à la technique de complétion utilisée pour gérer les nœuds non conformes créés par la méthode "*regular refinement*" combinée à l'utilisation faite du code ADAPT. En effet la présence dans le maillage d'éléments trop "allongés" ou "aplatis" peut nuire à la pertinence et à la précision des calculs. Un élément important à regarder est alors l'évolution de l'angle minimal du maillage.

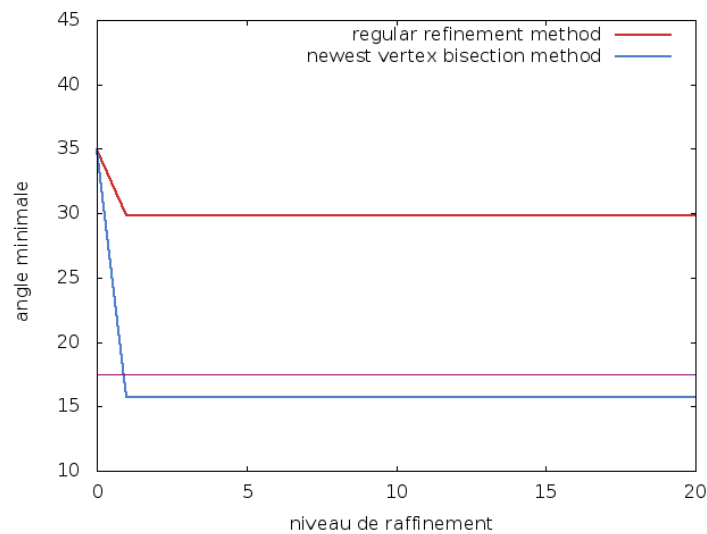


FIGURE 16 – Angle minimal du maillage en fonction du niveau de raffinement

Sur la figure 16 on trace l'évolution des angles minimaux des maillages. On constate que pour la méthode "*newest vertex bisection*", l'angle minimal n'est jamais inférieur à la moitié de l'angle minimal du maillage initial. Tandis que pour la méthode "*regular refinement*", dès la première itération l'angle minimal est inférieur à la moitié de l'angle minimal de départ. Cette déformation importante des triangles est principalement due à l'étape de complétion, qui consiste à relier les noeuds orphelins au sommet opposé sans prendre en considération une éventuelle déformation de la maille principale.

Pour examiner l'intérêt de l'utilisation d'un raffinement adaptatif, on compare l'estimateur d'erreur a posteriori obtenu avec la technique de marquage ainsi que les deux méthodes de raffinement de maillage avec un maillage raffiné de manière complètement uniforme.

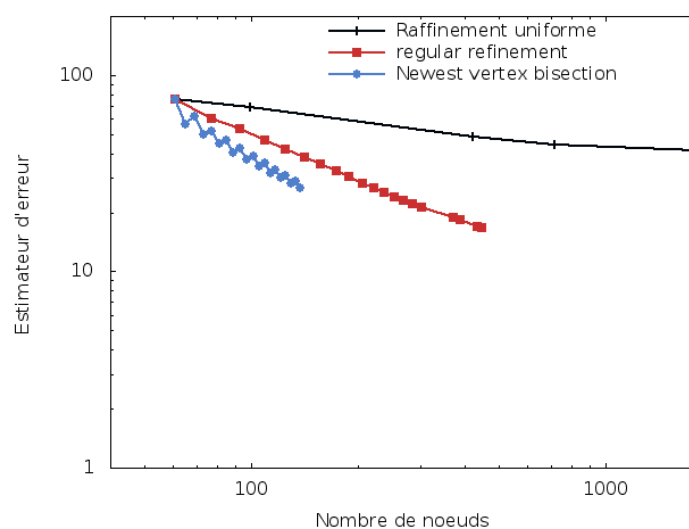


FIGURE 17 – Estimateur d'erreur en fonction du nombre de nœuds

D'après la figure 17, le gain dû à la stratégie de raffinement adaptatif est significatif. Néanmoins on observe une différence due à la technique de raffinement de maillage qui ne permet pas de conclure sur le choix d'une technique en particulier. Toutefois, on peut constater sur la figure 16 une dégradation du maillage avec la technique "*regular refinement*", en effet cette technique combiné à la technique de complétion d'ADAPT, au bout de quelques itérations produit des maillages de très mauvaises qualités.

4.5 Comparaison des méthodes de raffinement

On se propose de faire la comparaison des méthodes de raffinement combinées avec l'estimateur d'erreur a posteriori (cf section 3.3).

L'erreur étant concentrée au centre du maillage, on décide de ne pas prendre en compte l'étape de marquage des éléments et de ne raffiner que les triangles ayant en communs le nœud central. L'objectif final étant de faire du raffinement local multi-niveaux. On décide alors de faire varier le niveau de raffinement de 1 à 7. En notant x ce niveau, deux stratégies sont alors possibles :

R1 : on découpe x fois la cellule marquée.

R2 : on découpe une fois les cellules marquées puis on redéfinit les nouvelles cellules ayant en commun le nœud central. On réitère le découpage de ces cellules ainsi de suite. Cette méthode permet de centrer le raffinement autour du nœud central.

La stratégie **R1** est appliquée aux techniques "*regular refinement method*" et "*newest vertex bisection*". Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 18 et 19 respectivement. De plus, le tableau 3 synthétise les résultats des figures 18 et 19 en quantifiant le nombre d'éléments créés lors des raffinements.

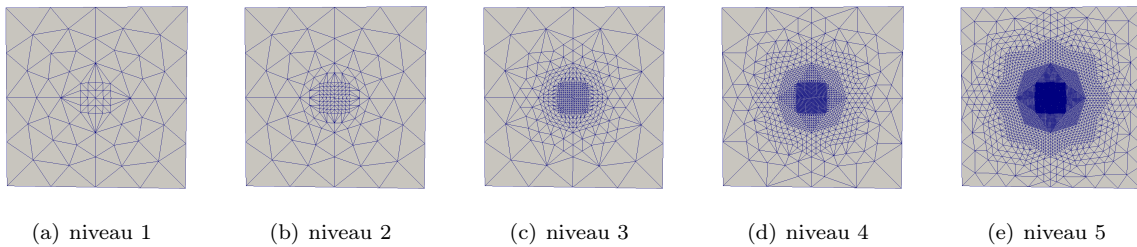


FIGURE 18 – Raffinement de maillage par "*regular refinement method*"

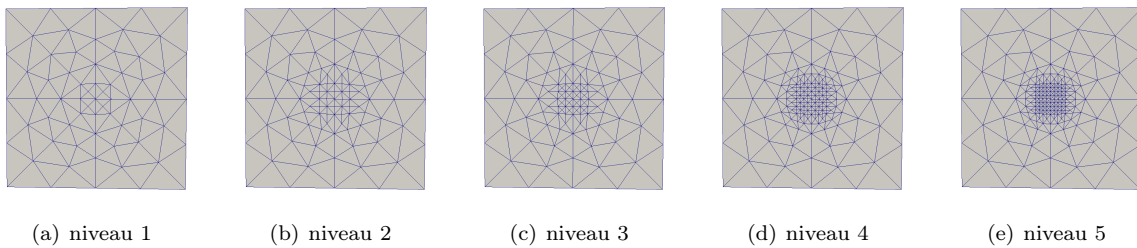


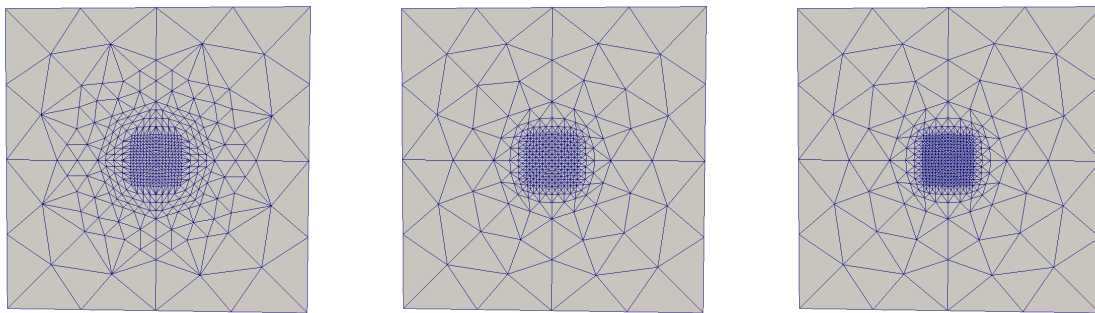
FIGURE 19 – Raffinement de maillage par "*newest vertex bisection method*"

La "qualité" de ces maillages semble être équivalente. Néanmoins pour comprendre le phénomène qui se produit, on se propose de résumer dans le tableau 4.5 les données de nos simulations et on sélectionne les simulations à nombre d'éléments équivalents.

Niveau de raffinement	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de triangles avec " <i>regular refinement</i> "	136	296	984	3752	14720	58304	232064
Nombre de triangles avec " <i>newest vertex bisection</i> "	112	168	200	344	472	872	1384

TABLE 3 – Nombre d'éléments en fonction du niveau de raffinement

On choisi de tracer sur la figure 20 le maillage obtenu pour 3 niveaux de raffinement avec la méthode "*regular refinement*" et les maillages obtenus pour 6 et 7 niveaux de raffinement avec la méthode "*newest vertex bisection*".

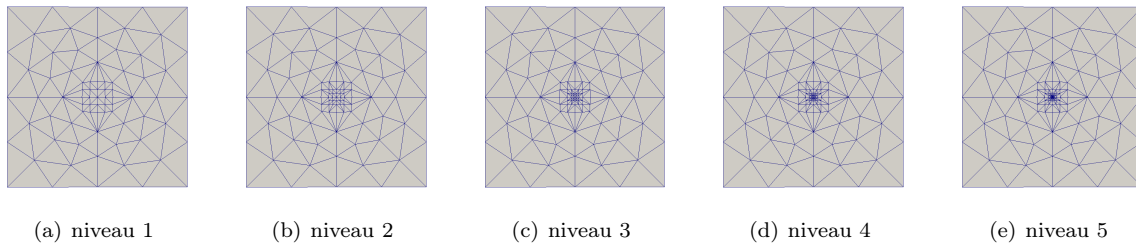
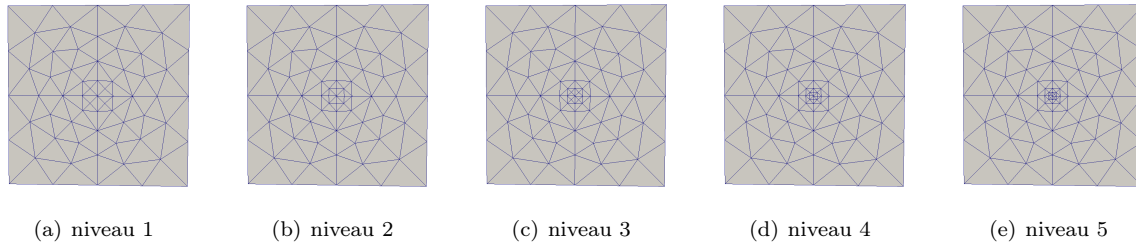


(a) regular refinement 984 éléments (b) "*newest vertex bisection*" 872 éléments (c) "*newest vertex bisection*" 1384 éléments

FIGURE 20 – Comportement des méthodes de raffinement à nombre d'éléments équivalents

Dans le logiciel ADAPT la procédure de complétion induit une propagation du raffinement. Toutefois il faut se rappeler que le raffinement doit rester localisé sur certaines régions du maillage. On constate bien sur la figure 20 ce comportement du maillage. En effet, on peut voir que pour la méthode "*newest vertex bisection*" le raffinement est peu propagé même avec un nombre d'éléments plus important que pour la méthode "*regular refinement*" qui propage plus le raffinement.

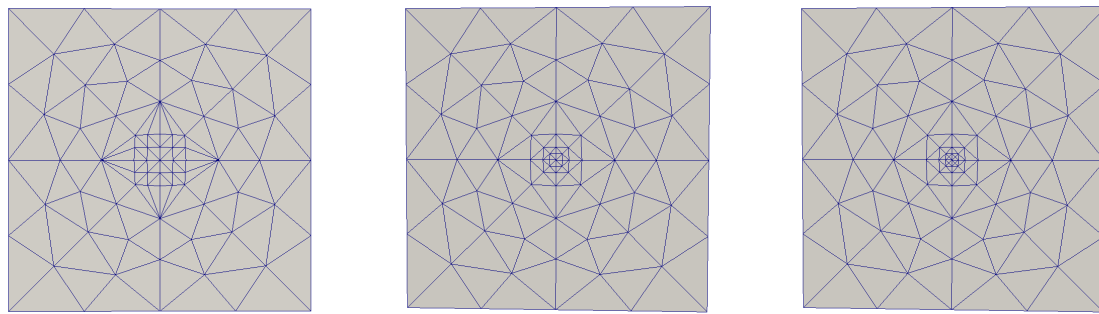
En ce qui concerne la stratégie **R2**, on se propose de refaire les mêmes simulations et on synthétise les résultats liés aux différentes techniques de raffinement sur les figures 21 et 22.

FIGURE 21 – Raffinement de maillage par "*regular refinement method*"FIGURE 22 – Raffinement de maillage par "*newest vertex bisection method*"

Niveau de raffinement	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de triangles avec " <i>regular refinement</i> "	136	168	200	232	264	296	328
Nombre de triangles avec " <i>newest vertex bisection</i> "	112	120	128	136	144	152	160

TABLE 4 – Nombre d'éléments en fonction du niveau de raffinement

On représente sur la figure 23 le maillage obtenu pour 1 niveau de raffinement avec la méthode "*regular refinement*" et les maillages obtenus pour 4 et 5 niveaux de raffinement avec la méthode "*newest vertex bisection*".



(a) regular refinement 136 éléments (b) "newest vertex bisection" 136 éléments (c) "newest vertex bisection" 144 éléments

FIGURE 23 – Comportement des méthodes de raffinement à nombre de nœuds équivalents

On obtient des résultats similaires à la stratégie **R1**. En effet, on note que la procédure de complétion propage moins le raffinement dans le cas de la méthode "newest vertex bisection" (cf figure 23). La méthode "regular refinement" semble offrir l'avantage que les sous éléments provenant du raffinement d'un élément père sont géométriquement similaires et que le raffinement s'effectue très rapidement. La procédure pour gérer la complétion détériore la qualité du maillage. Néanmoins le résultat n'a pas été affecté par ce raffinement. Le risque c'est de plus assurer la monotonie du schéma, c'est à dire la cohérence avec la physique qui se traduit mathématiquement par la vérification du principe du maximum. C'est pour cette raison que notre choix c'est porté sur la technique "newest vertex bisection". Dans ce cas, on peut démontrer que le maillage raffiné est toujours régulier quelque soit le niveau de raffinement. En particulier, on a montré que le raffinement dû à la complétion est peu propagé. Ainsi, lorsque la taille du maillage est grande, le nombre de nœuds ajoutés par la complétion devient négligeable par rapport à ceux créés par le raffinement.

Il reste donc à choisir une des deux stratégies. Pour cela, on représente l'estimateur d'erreur en fonction du nombre de noeuds pour les stratégies **R1** et **R2** sur la figure 24.

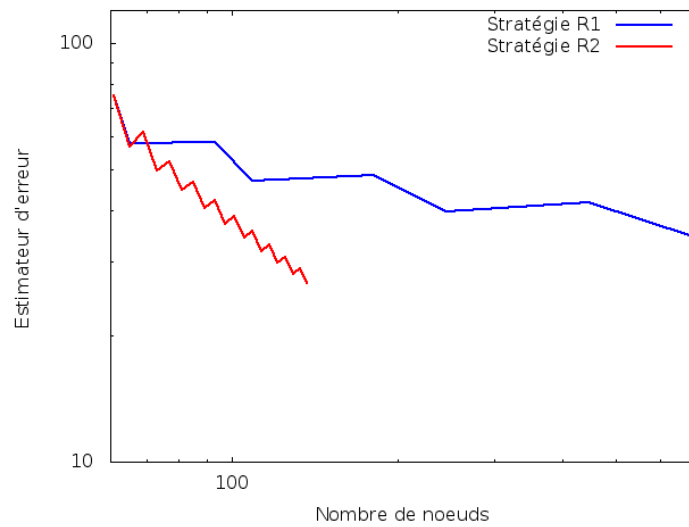


FIGURE 24 – Comparaison entre les stratégies R1 et R2

On observe que la stratégie **R2** est plus avantageuse que la stratégie **R1**, puisque le nombre de noeuds créé est moins importants à valeur d'estimateur équivalente. On rappelle que l'estimateur d'erreur a posteriori est calculé aux noeuds du maillage primal d'où les résultats attendus.

5 Stratégie de raffinement multi-niveaux

En utilisant la méthode de raffinement "*newest vertex bisection*" et la stratégie **R2**, on se propose à présent de réfléchir sur une méthode de raffinement multi-niveaux. En effet l'idée de base consisterait à réduire la valeur globale de l'estimateur d'erreur le plus rapidement possible (c'est à dire en effectuant moins d'itération faisant intervenir une résolution de système coûteuse). Les stratégies de marquage des éléments (cf section 4.2) permettent de déterminer si un élément doit être raffiné ou non. Désormais nous désirons ajouter une information qui consisterait à déterminer le nombre de raffinements que doivent subir les éléments. La stratégie de raffinement basique consiste à résoudre le problème puis découper les éléments marqués et réitérer ce processus. On peut remarquer que cette technique est gourmande en temps de calculs. L'objectif est donc ici de définir une stratégie permettant de se rapprocher de la stratégie optimale tout en réduisant les temps de calcul.

5.1 Présentation des différentes stratégies

On considère la **stratégie 0** qui consiste à découper les éléments marqué par la méthode dite du maximum (cf 4.2) en un niveau m fixé dès le début (en prenant m égale à 1, on retrouve le processus itératif).

On se propose à présent de définir deux stratégies permettant d'appliquer des niveaux de raffinements différents en fonction de la valeurs de l'estimateur.

On commence par définir η_D l'estimateur d'erreur normalisé associé à la cellule duale D et $niv(D)$ son niveau de raffinement. On détermine tout d'abord un niveau de raffinement maximal noté m .

On commence par filtrer les indicateurs d'erreur par des seuils prédéfinis. On définit ensuite le niveau de raffinement de chaque maille comme suit : toutes les mailles qui portent une erreur supérieure à un seuil donné sont découpées en fonction de l'importance de ce seuil.

Stratégie 1 Pour cette stratégie les seuils sont réguliers :

On définit le niveau de raffinement de chaque cellule par :

$$\text{si } \eta_D > \frac{j}{m+1} \quad \text{alors } niv(D) = j$$

Stratégie 2 Choisir des seuils dépendants de la répartition de l'erreur. Cette stratégie découle d'un raisonnement en une dimension. On part de l'hypothèse que l'erreur diminue en $1/h$, de telle sorte qu'en divisant un pas d'espace en deux on divise l'erreur par deux. Ne perdons pas de vue également que l'objectif d'un raffinement est d'avoir après chaque itération la même erreur sur tout le maillage. Dans le cas

général on définit le niveau de raffinement de chaque cellule par :

$$\text{si } \eta_D > \frac{1}{2^{m+1-j}} \quad \text{alors } \text{niv}(D) = j$$

Exemple si $m = 4$, on découpe l'estimateur en cinq intervalles de manière à aboutir à une erreur maximale de $\frac{1}{16}$. Ainsi si :

- Si $\eta_D \in [0, \frac{1}{16}]$, $\text{niv}(D) = 0$.
- Si $\eta_D \in [\frac{1}{16}, \frac{1}{8}]$, $\text{niv}(D) = 1$ on divise donc l'erreur de cet intervalle par deux.
- Si $\eta_D \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $\text{niv}(D) = 2$ on divise donc l'erreur de cet intervalle par quatre.
- Si $\eta_D \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $\text{niv}(D) = 3$ on divise donc l'erreur de cet intervalle par huit.
- Si $\eta_D \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\text{niv}(D) = 4$ on divise donc l'erreur de cet intervalle par seize.

On arrive alors sur chaque intervalle à diminuer l'estimateur de telle sorte que l'estimateur maximal de chaque intervalle ne dépasse pas $\frac{1}{16}$.

Pour évaluer la pertinence de ces différentes stratégies, on reprend l'exemple de la section 4.4 et on représente l'estimateur en fonction du nombre de nœuds.

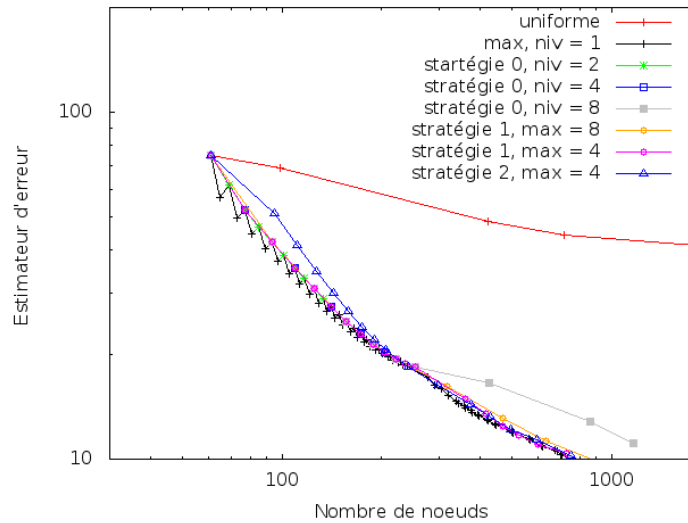


FIGURE 25 – Comparaison des stratégies de raffinement

On peut observer sur la figure 25 que la stratégie **0** ne suit pas la stratégie itérative. En effet, à partir de 8 niveaux de raffinement on crée un nombre important de nœuds sans réduire l'erreur. On peut voir que l'on s'éloigne alors de la stratégie optimale.

Alors que les deux autres stratégies 1 et 2 avec $m = 4$ suivent bien l'allure de la stratégie optimale. Néanmoins, on constate une différence entre la **stratégie 1** et **stratégie 2**. En effet pour cet exemple on peut voir que la **stratégie 2** crée un nombre important de nœuds dès le départ. On ne pourrait donc pas

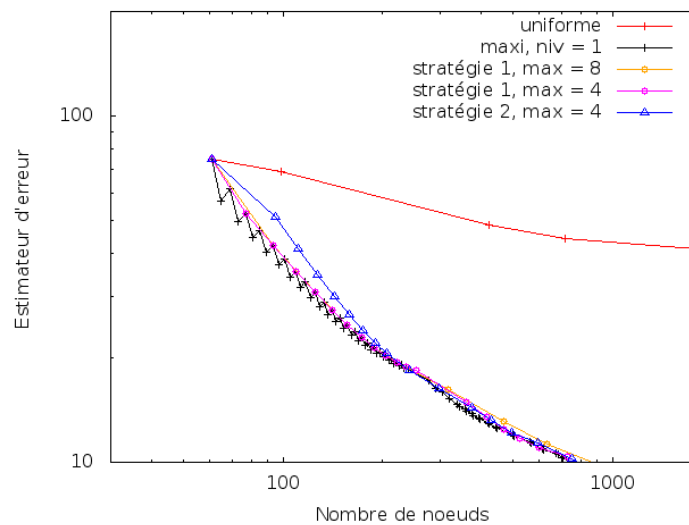


FIGURE 26 – Comparaison des stratégies de raffinement

augmenter le niveau maximum m , alors que avec la stratégie 1 en fixant $m = 8$, on obtient des résultats bien meilleurs. Pour mieux se rendre compte de cette sensible amélioration, on présente le tableau 5 qui résume nos résultats.

Stratégie	nombre de nœuds	estimateur	itération
référence	794	9.6184761858495431	73
stratégie 1 avec m=4	862	9.6285073145015758	20
stratégie 1 avec m=8	920	9.7834167629017710	10
stratégie 2 avec m=4	945	9.1045761882723522	17

TABLE 5 – Comparaison des stratégies de raffinements multi-niveaux

On peut voir sur le tableau 5 que la meilleure stratégie ici semble être la **stratégie 1** avec un niveau de raffinement maximal de 8. En effet, on arrive à une valeur de l'estimateur et à nombre de nœuds équivalent à la stratégie optimale avec un nombre d'itération plus petit ce qui représente un gain de temps considérable.

5.2 Application : cas test avec solution analytique

On considère le problème (4) avec des conditions aux limites de Dirichlet où le second membre f est nul sur le domaine $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus (0, 1) \times (-1, 0)$

La solution analytique est connue et a la forme suivante dans le plan de coordonnées polaires :

$$u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$$

Pour la conditions aux limites, on prend la valeur de la fonction u aux nœuds du bord.

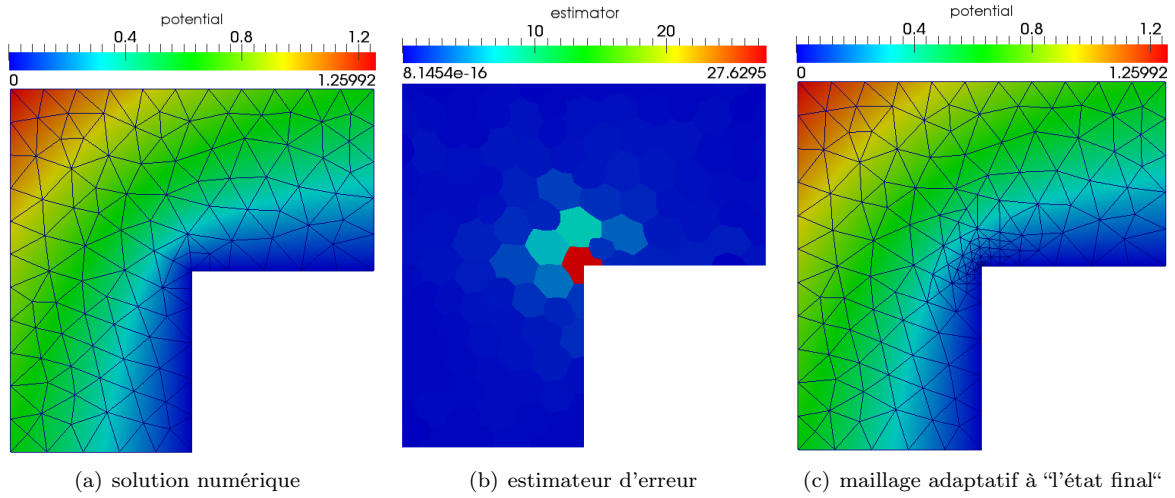


FIGURE 27 – Résultats numériques obtenus en utilisant la technique "newest vertex bisection"

On note sur la figure 27 que le comportement singulier de la solution est bien capté par l'estimateur.

La figure 28 et le tableau 6 permettent de voir le comportement des différentes stratégies de raffinements.

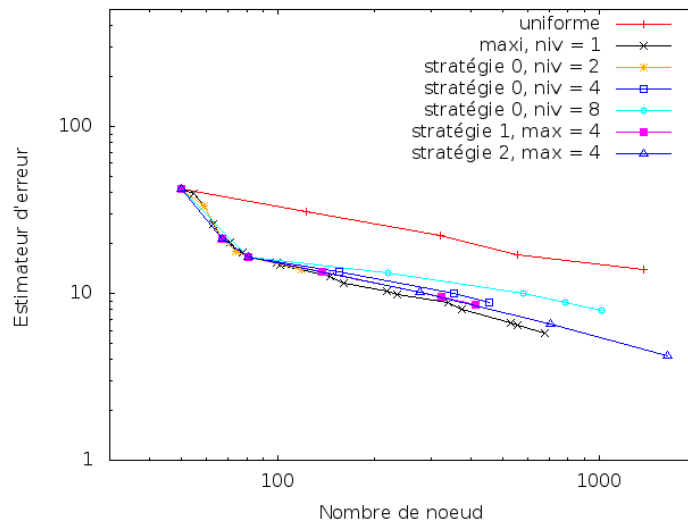


FIGURE 28 – Estimateur d'erreur en fonction du nombre de nœuds

Pour cette exemple, on obtient de meilleurs résultats avec la **stratégie 2**. En effet, avec 4 itérations on obtient un estimateur et un nombre de nœuds équivalents à la stratégie optimale. La **stratégie 0** montre encore ses limites sur cette exemple puisque à partir de 8 niveaux de raffinement le nombre de nœuds devient trop important sans gain sur l'estimateur.

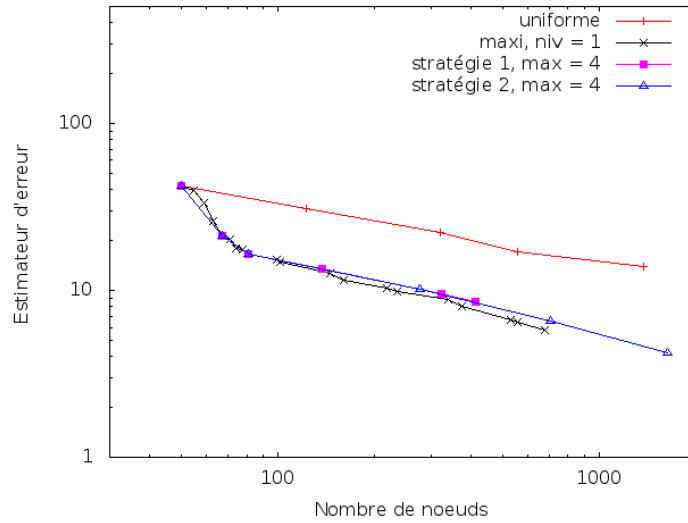


FIGURE 29 – Estimateur d'erreur en fonction du nombre de noeuds

Stratégie	nombre de nouds	estimateur	itération
stratégie optimale	236	9.7951490506478525	15
stratégie 1 avec m=4	324	9.5379547799058688	5
stratégie 2 avec m=4	276	10.068464077960082	4

TABLE 6 – Comparaison des stratégies de raffinements multi-niveaux

5.3 Cas test issu du Benchmark Momas 2D : le flux oblique

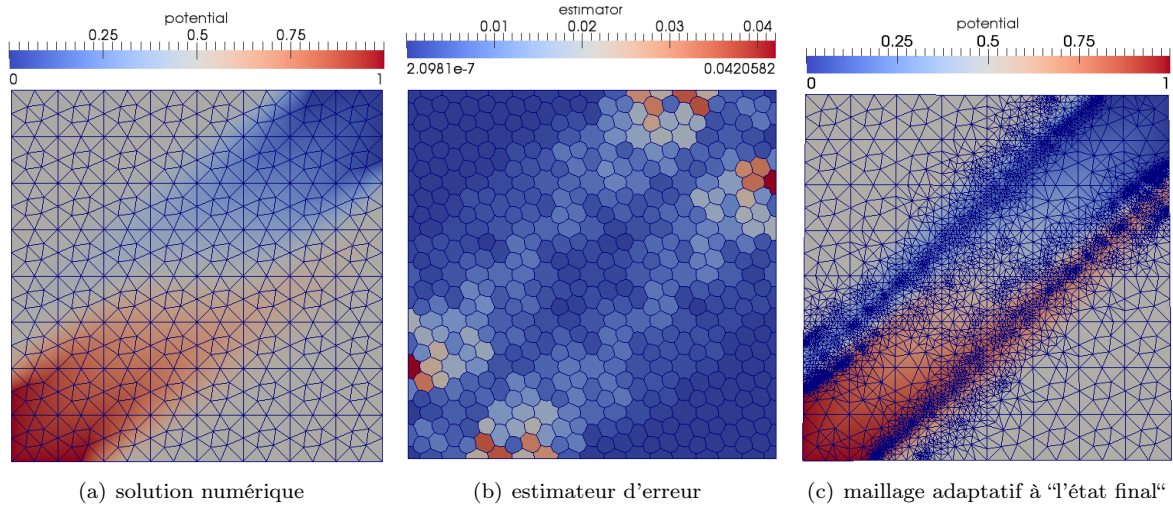
Considérons le tenseur anisotropique suivant :

$$K = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} R_\theta^{-1}, \text{ avec } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Où R_θ est la rotation d'angle $\theta = 40$ degrés et $\delta = 10^3$. Le second membre f est nul sur le domaine d'étude $\Omega = (0, 1)^2$. Les conditions au bord de type Dirichlet sont données par le système suivant :

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{sur } ((0, 0.2) \times \{0\} \cup \{0\} \times (0, 0.2)) \\ 0 & \text{sur } ((0.8, 1) \times \{1\} \cup \{1\} \times (0.8, 1)) \\ 0.5 & \text{sur } ((0.3, 1) \times \{0\} \cup \{0\} \times (0.3, 1)) \\ 0.5 & \text{sur } ((0, 0.7) \times \{1\} \cup \{1\} \times (0, 0.7)) \end{cases}$$

Ce test permet la modélisation d'un écoulement oblique. Comme on peut le déduire à partir des conditions aux limites, le flux aurait tendance à se déplacer du sommet $(0, 0)$ au sommet $(1, 1)$ avec un tenseur de diffusion hétérogène et anisotrope. La diffusion dans le sens horizontal modulo une rotation de 40 degrés est forte alors que dans sa direction orthogonale elle est faible.

FIGURE 30 – Résultats numériques obtenus en utilisant la technique "*newest vertex bisection*"

On représente sur la figure 30, la solution initial, l'estimateur d'erreur initial, et en (c) le maillage adaptatif et la solution obtenue après 30 itérations. Le choix de cet exemple est essentiellement due au fait que contrairement aux exemples précédents l'erreur est répartie sur plusieurs cellules duales ce qui permettra de voir l'efficacité de nos stratégies.

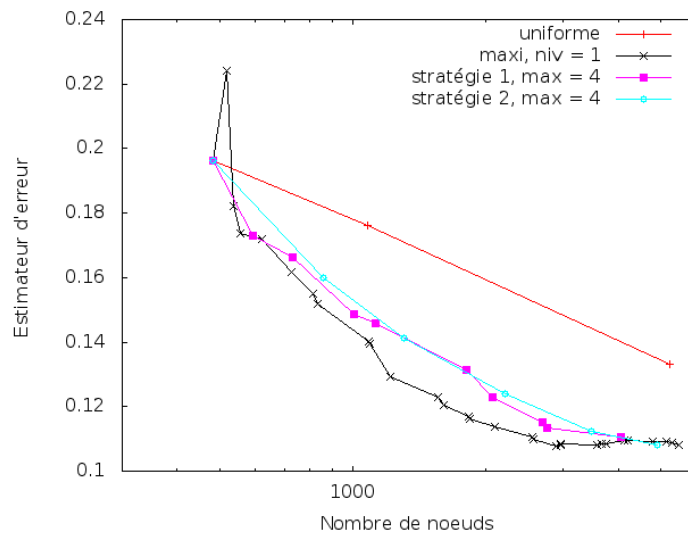


FIGURE 31 – Estimateur d'erreur en fonction du nombre de noeuds

On peut remarquer sur la figure 31 qu'après 6 itérations avec la **stratégie 2** et 10 avec la **stratégie 1** le nombre de nœuds et la valeur de l'estimateur sont équivalents à la stratégie dite optimale avec un nombre d'itération de 30.

On représente sur la figure 32 les maillages adaptatifs et la solution pour la stratégie optimale après 30 itérations, la **stratégie 1** après 10 itérations, et la **stratégie 2** après 6 itérations. On peut remarquer que la stratégie optimale concentre plus le maillage.

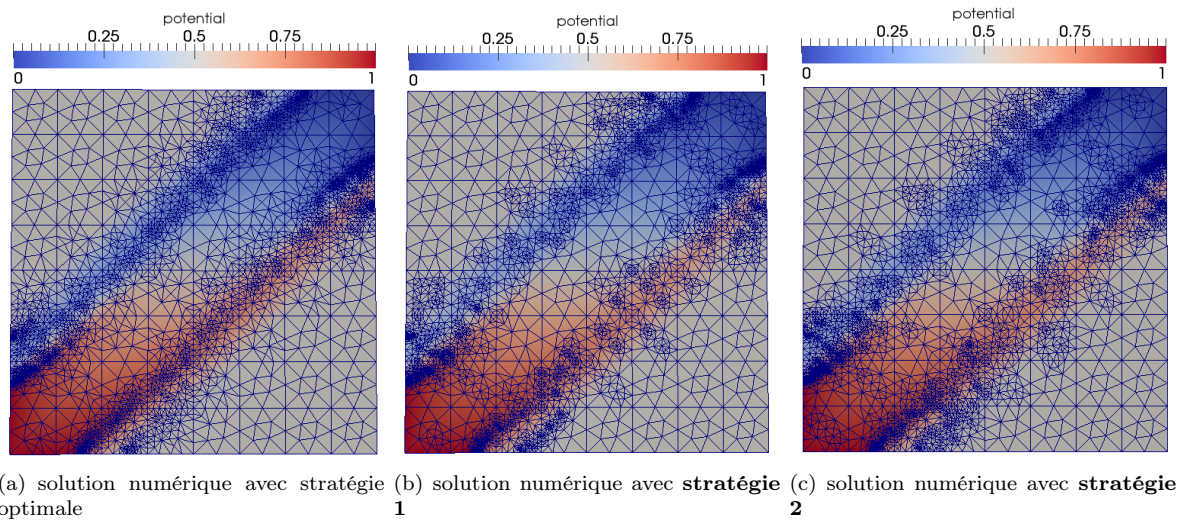


FIGURE 32 – Résultats numériques obtenus en utilisant la technique "newest vertex bisection" pour les différentes stratégies

Conclusion

Ce rapport présente le travail de stage portant sur la comparaison des méthodes de raffinement de maillage et sur la détermination d'une stratégie d'adaptation de maillage local multi-niveaux. L'objectif de départ est de déterminer la meilleur stratégie de raffinement de maillage dans l'optique de remplacer une stratégie déjà implémentée dans le code MELODIE dont l'avantage est direct puisqu'aucun noeuds non-conforme n'est introduit dans le maillage. Néanmoins l'inconvénient remarquable est que la régularité du maillage raffiné n'est pas conservé. Cette méthode laisse donc place essentiellement à deux stratégies de raffinement permettant de préserver la régularité du maillage "*regular refinement*" et "*newest vertex bisection*". De plus, la méthode de raffinement doit être adaptée pour faire du raffinement adaptatif multi-niveaux. Avec la réalisation de cas tests avec solution analytique la méthode "*newest vertex bisection*" a été préférée à la méthode "*regular refinement*" entre autres parce que le raffinement due à l'étape de complétion est peu propagé pour cette méthode.

Le seconde objectif a consisté à mettre en place des stratégies de raffinement de maillage multi-niveaux. Nous avons mis en place deux stratégies qui ont permis de réduire l'erreur en minimisant les temps de calcul. Néanmoins les cas tests réalisés ne permettent pas de faire le choix entre les stratégies. En résumé utiliser les stratégies de raffinement multi-niveaux semble évident. Néanmoins le choix de la stratégie optimale semble dépendre du problème étudié.

Ce stage m'a permis de découvrir un domaine technique et scientifique très pointu, de développer mes compétences en programmation et de travailler dans une équipe dynamique et agréable. Le travail effectué sur le logiciel MELODIE m'a permis de me familiariser avec un logiciel complexe et nouveau. C'est une situation que je serai amené à rencontrer lors de mes futurs travaux d'ingénieur. Par ailleurs, cette mission m'a ouvert les portes du domaine du nucléaire et la possibilité de rencontrer des professionnels du domaine. J'ai pu m'intégrer dans les travaux de recherches effectués au sein du BERIS, sur la thématique des stockages de déchets en couches géologiques profondes. Le travail sur MELODIE m'a donné une claire expérience sur les différences qu'il peut exister entre le modèle théorique et la réalité des calculs. Par la même occasion j'ai pu comprendre l'importance des simulations numériques dans de nombreux domaines comme pour la sûreté des installations nucléaires. En conclusion, ce stage m'a beaucoup appris d'un point de vue scientifique et aussi d'un point de vue humain.

6 Annexes

6.1 Annexes 1 : Estimateur d'erreur a posteriori

On rappelle trois inégalités qui seront utilisées dans la suite. **Inégalités de Poincaré, Friedrichs et de trace.**

Soit D un polygone ou un polyèdre de \mathbb{R}^d ,

- l'inégalité de Poincaré

$$\|v - v_D\|_D^2 \leq C_{P,D} h_D^2 \|\nabla v\|_D^2, \quad \forall v \in H^1(D), \quad (8)$$

où v_D est la moyenne de v sur D et $C_{P,D}$ une constante dépendant de la forme géométrique de D et valant $1/\pi$ si D est convexe.

- l'inégalité de Friedrichs

$$\|v\|_D^2 \leq C_{F,D} h_D^2 \|\nabla v\|_D^2, \quad \forall v \in H^1(D), \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial D \neq \emptyset, \quad (9)$$

où la constante $C_{F,D} = 1$ en général.

- l'inégalité de trace

$$\|v - v_\gamma\|_\gamma^2 \leq C_{t,D} h_D \|\nabla v\|_D^2, \quad \gamma \subset \partial D, \quad (10)$$

où v_γ est la moyenne de v sur γ et la constante $C_{t,D}$ dépend de la dimension du problème.

Espaces fonctionnelles et forme bilinéaire. On définit les sous-espaces fonctionnelles de $H^1(\Omega)$ ainsi que la forme bilinéaire associée au problème (4)

$$H_{0,D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

$$H_{g,D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_D} = g\},$$

$$\mathcal{B}(u, v) = (\mathbb{K} \nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

où la notation (\cdot, \cdot) signifie le produit scalaire L^2 sur Ω .

Nous allons présenter l'estimateur d'erreur a posteriori dans la norme duale de H^1 , que l'on définit comme suit :

$$\|u\|_* = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(u, v)}{\|v\|}.$$

Formulation variationnelle. La solution (faible) exacte $u \in H_{g,D}^1(\Omega)$ vérifie la formulation variationnelle

$$\mathcal{B}(u, v) = (f, v) - \langle u_n, v \rangle_{\Gamma_N}, \quad \forall v \in H_{0,D}^1(\Omega). \quad (11)$$

Une remarque importante est que le flux exact $-\mathbb{K}\nabla u \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$.

Estimateur d'erreur à posteriori

Une borne supérieure. Sous l'hypothèse de conservation locale (6), une estimation de l'erreur a posteriori est

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_* \leq \eta &= \left\{ \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \eta_D^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \left(m_D \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D + \|\mathbb{K}\nabla u_h + \mathbf{t}_h\|_D + C_{t,D}^{1/2} h_D^{1/2} \sum_{\gamma \in \partial D \cap \Gamma_N} \|u_n - u_{n\gamma}\|_\gamma \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

où $m_D^2 = C_{P,D} h_D^2$ si $D \in \mathcal{D}_h^{\text{int},N}$, $m_D^2 = C_{F,D,\partial\Omega} h_D^2$ si $D \in \mathcal{D}_h^D$.

Preuve. On introduit l'espace de Sobolev discret $H^1(\mathcal{T}_h)$ défini sur \mathcal{T}_h

$$H^1(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ telle que } v|_T \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Partons de la formulation variationnelle (11), on a $\forall v \in H_{0,D}^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u - u_h, v) &= \mathcal{B}(u, v) - \mathcal{B}(u_h, v) \\ &= (f, v) - \langle u, v \rangle_{\Gamma_N} - (\mathbb{K}\nabla u_h, \nabla v) \\ &= (f, v) - \langle u, v \rangle_{\Gamma_N} - (\mathbb{K}\nabla u_h + \mathbf{t}_h, \nabla v) + (\mathbf{t}_h, \nabla v) \\ &= (f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v) - (\mathbb{K}\nabla u_h + \mathbf{t}_h, \nabla v) + \langle \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} - u_n, v \rangle_{\Gamma_N} \\ &\leq |(f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v)| + |(\mathbb{K}\nabla u_h + \mathbf{t}_h, \nabla v)| + |\langle \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} - u_n, v \rangle_{\Gamma_N}| \\ &\leq \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \left(|(f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v)_D| + |(\mathbb{K}\nabla u_h + \mathbf{t}_h, \nabla v)_D| + \sum_{\gamma \in \partial D \cap \Gamma_N} |\langle \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} - u_n, v \rangle_\gamma| \right). \end{aligned} \quad (13)$$

On évalue maintenant chaque terme de la somme. La conservativité locale (6) du flux \mathbf{t}_h nous permet d'écrire, pour toute cellule duale $D \in \mathcal{D}_h^{\text{int},N}$, $(f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v_D)_D = 0$, où v_D est la moyenne de v sur D .

On réécrit le terme de résidu, en appliquant l'inégalité Cauchy-Schwarz puis celle de Poincaré (8)

$$\begin{aligned}
|(f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v)_D| &= |(f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v - v_D)_D|, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h^{\text{int}, N} \\
&\leq \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D \|v - v_D\|_D \\
&\leq C_{P,D}^{1/2} h_D \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D \|\nabla v\|_D.
\end{aligned} \tag{14}$$

Dans le cas où la cellule $D \in \mathcal{D}_h^D$, i.e. adhère au bord Dirichlet, on remplace l'inégalité de Poincaré par celle de Friedrichs (9)

$$\begin{aligned}
|(f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, v)_D| &\leq \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D \|v\|_D, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h^D \\
&\leq C_{F,D}^{1/2} h_D \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D \|\nabla v\|_D.
\end{aligned} \tag{15}$$

Le deuxième terme concerne le flux diffusif et on applique tout simplement l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(\mathbb{K} \nabla u_h + \mathbf{t}_h, \nabla v)_D| \leq \|\mathbb{K} \nabla u_h + \mathbf{t}_h\|_D \|\nabla v\|_D. \tag{16}$$

Pour le dernier terme concernant la condition de Neumann, notons qu'on a $\forall D \in \mathcal{D}_h^{\text{int}, N}$, $\langle \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial D} = \langle -\mathbb{K} \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial D}$ à partir de (5) et (6). Dans la reconstruction de \mathbf{t}_h (sera détaillée plus tard), on définit

$$\mathbf{t}_h \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \quad \text{telle que} \quad \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma = -\mathbb{K} \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_\gamma, \quad \forall \gamma \in \partial D; \tag{17}$$

ce qui entraîne en particulier $\mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_\gamma = \langle u_n, 1 \rangle_\gamma = u_{n\gamma}$ lorsque $\gamma \in \partial D \cap \Gamma_N$. Cette remarque nous permet donc d'évaluer le dernier terme en appliquant l'inégalité de trace (10). $\forall \gamma \in \partial D \cap \Gamma_N$,

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n} - u_n, v \rangle_\gamma| &= |\langle u_{n\gamma} - u_n, v \rangle_\gamma| = |\langle u_{n\gamma} - u_n, v - v_\gamma \rangle_\gamma| \\
&\leq \|u_n - u_{n\gamma}\|_\gamma \|v - v_\gamma\|_\gamma \\
&\leq C_{t,D}^{1/2} h_D^{1/2} \|u_n - u_{n\gamma}\|_\gamma \|\nabla v\|_D
\end{aligned} \tag{18}$$

En intégrant (14,15,16,18) dans l'évaluation de $\mathcal{B}(u - u_h, v)$, on obtient

$$\mathcal{B}(u - u_h, v) \leq \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \left(m_D \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_D + \|\mathbb{K} \nabla u_h + \mathbf{t}_h\|_D + C_{t,D}^{1/2} h_D^{1/2} \sum_{\gamma \in \partial D \cap \Gamma_N} \|u_n - u_{n\gamma}\|_\gamma \right) \|\nabla v\|$$

Puis, on obtient l'estimateur (12) en divisant deux membres par $\|\nabla v\|$ et en tenant compte de la définition de la norme duale.

Construction du flux \mathbf{t}_h Une étape importante intervenant dans l'obtention de l'estimateur d'erreur (12) est la reconstruction du flux \mathbf{t}_h à partir de la solution numérique u_h . Rappelons que dans la démonstration présentée, ce flux doit vérifier la condition (17) donc *a fortiori* la conservativité locale (6). D'après [4], on peut construire un tel flux dans l'espace de Raviart-Thomas-Nédélec à plus bas ordre qui est un sous-espace de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Dans ce qui suit, on présente en détail la procédure de construction.

Tout d'abord, on construit le sous-maillage \mathcal{S}_h à partir du maillage donné (\mathcal{T}_h) et celui dual associé (\mathcal{D}_h) comme la fig. 33.

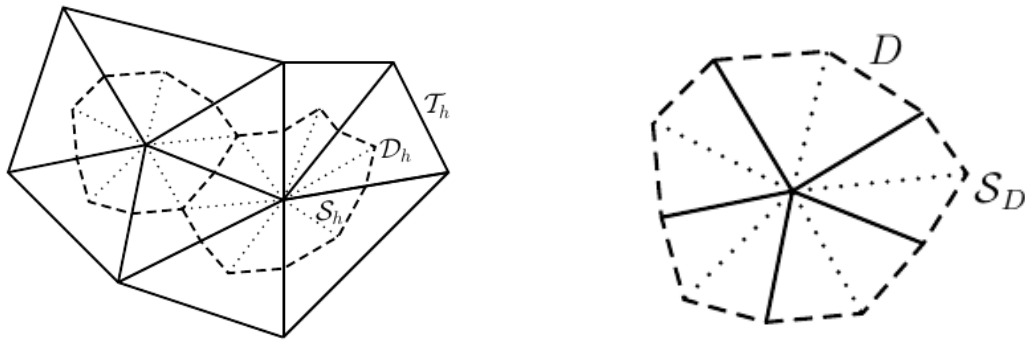


FIGURE 33 – Sous-maillage \mathcal{S}_h (à gauche) et zoom sur la partie S_D associée à une cellule duale (à droite)

On appelle $\mathbf{RTN}_0(\mathcal{S}_h)$ l'espace de Raviart-Thomas-Nédélec à plus bas ordre défini sur \mathcal{S}_h

$$\mathbf{RTN}_0(\mathcal{S}_h) = \left\{ \mathbf{t}_h \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \quad \mathbf{t}_h = \sum_{\gamma} \langle \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_{\gamma}, 1 \rangle_{\gamma} \varphi_{\gamma} \right\}$$

où les γ sont des arêtes (ou faces) de \mathcal{S}_h , la fonction vectorielle φ_{γ} est la base associée à γ .

De cette manière, la reconstruction du flux \mathbf{t}_h consiste à calculer ces degrés de libertés $\langle \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_{\gamma}, 1 \rangle_{\gamma}$ sur les arêtes γ de \mathcal{S}_h . Pour les arêtes γ liées sur le bord ∂D , celles-ci sont données par la condition (17). Il nous reste alors à déterminer les degrés de liberté sur les arêtes internes de S_D . Pour cela, une stratégie pratique consiste à imposer la conservativité locale non seulement sur D mais sur chaque élément $K \in S_D$, c'est-à-dire

$$(\nabla \cdot \mathbf{t}_h, 1)_K = (f, 1)_K, \quad \forall K \in S_D. \quad (19)$$

Cette condition est bien plus forte que (6). Fixons une arête interne $\gamma = K_1 \cap K_2$ sur laquelle on prend la moyenne arithmétique $\mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_{\gamma} = -0.5(\mathbb{K} \nabla u_h|_{K_1} + \mathbb{K} \nabla u_h|_{K_2})$, les degrés de liberté sur les autres arêtes sont complètement définis en itérant sur chaque élément K et utilisant (17,19).

Références

- [1] Amaziane, B. and Bergam, A. and El Ossmani, M. and Mghazli, Z. *A posteriori estimators for vertex centred finite volume discretization of a convection–diffusion–reaction equation arising in flow in porous media*. International Journal for Numerical Methods in Fluids ,2009.
- [2] Rivet, A. *Estimations a posteriori pour la modélisation des écoulements et des transferts de polluants en milieux poreux*. Université Paris 13, 2012.
- [3] Mohamed, H. *Estimations d’erreur a posteriori pour la modélisation des écoulements en milieux poreux*. Université Paris 13, 2012.
- [4] Vohralík, Martin. *Guaranteed and Fully Robust a posteriori Error Estimates for Conforming Discretizations of Diffusion Problems with Discontinuous Coefficients*. Journal of Scientific Computing, 2011.
- [5] Michael Karkulik, David Pavlicek, Dirk Praetorius. *On 2D newest vertex bisection optimality of mesh-closure and H^1 stability of L_2 projection*. journal , 2012.
- [6] I, G.Sewell, F. Stenger. *A lower bound on the angles of triangles constructed by bisecting the longest side*. Mathematics of Computation,29 : 390 – 395, 1975.