



Université Paris 13 - Institut Sup Galilée  
École d'ingénieurs en  
Mathématiques Appliquées aux Calculs Scientifiques - *MACS 3*  
Maître du stage de fin d'études : **Carmencita Jacqueline BARBU**  
Encadrant du stage de fin d'études : **Hermann KOUAMO**  
Tuteur du stage de fin d'études : **Mohamed BEN ALAYA**

## *Études des corrélations entre différents actifs*

---

Stage de fin d'études  
Groupe PRO BTP  
7 Rue du Regard  
75 006 Paris

Réalisé par:  
**Valérie DESLANDES**

Villetaneuse  
Lundi 30 Juin 2014



# 1 Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Madame Carmencita Jacqueline BARBU ainsi que Monsieur Hermann KOUAMO pour m'avoir permis d'effectuer mon stage de fin d'études à leurs côtés au sein de la Direction des Risques chez PRO BTP. Ils m'ont apporté une grande aide et ils m'ont été d'un très grand soutien. Je tiens également à les remercier pour leurs nombreux conseils, pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Je souhaite remercier toute la direction des risques : Monsieur Olivier CHAMBAZ, Madame Fatima KENOUI, Monsieur Benoit TO, Madame Corinne LE GAL, Madame Sabine NGUYEN, Monsieur Jean LUU et Madame Constance CLERMONT pour leur accueil chaleureux et leur sympathie.

Je tiens également à remercier Monsieur Olivier LAFITTE, Monsieur Emmanuel AUDUSSE ainsi que tous les enseignants de la MACS, de l'Institut Sup Galilée, qui nous ont fait partager leurs connaissances et qui nous ont apporté de nombreux conseils.

Je remercie Monsieur Mohamed BEN ALAYA, enseignant et tuteur responsable du stage de fin d'études.

Je souhaite remercier ma famille qui m'a épaulée et encouragée tout au long de mes études. Je la remercie également pour sa patience et ses conseils.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Remerciements</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Introduction</b>  | <b>6</b>  |
| <b>3</b> | <b>Présentation de PRO BTP</b>   | <b>7</b>  |
| 3.1      | L'entreprise en quelques mots . . . . .  | 7         |
| 3.2      | L'histoire de PRO BTP . . . . .  | 7         |
| 3.3      | Les activités . . . . .  | 7         |
| 3.4      | Organisation . . . . .   | 9         |
| 3.4.1    | Les structures . . . . .   | 9         |
| 3.4.2    | La direction . . . . .   | 10        |
| 3.5      | Chiffres clés . . . . .  | 11        |
| 3.6      | La direction des Risques . . . . .   | 12        |
| <b>4</b> | <b>Objectif</b>  | <b>13</b> |
| 4.1      | Présentation . . . . .   | 13        |
| 4.2      | Origine du modèle . . . . .  | 13        |
| <b>5</b> | <b>Partie théorique</b>  | <b>13</b> |
| 5.1      | Expression du rendement normalisé des actifs d'une entreprise . . . . .  | 13        |
| 5.1.1    | Présentation . . . . .   | 13        |
| 5.1.2    | Les données . . . . .  | 13        |
| 5.1.3    | Le choix du modèle . . . . .   | 14        |
| 5.1.4    | Modèle de la firme de Merton (ou encore modèle de Black-Scholes-Merton) . .  | 15        |
| 5.1.5    | Méthode de Newton-Raphson . . . . .  | 16        |
| 5.1.6    | Calcul de $V_t$ et de $\sigma_V$ . . . . .   | 17        |
| 5.1.7    | Expression du rendement normalisé d'une entreprise . . . . .   | 17        |
| 5.2      | Expression des rendements des actifs d'une entreprise en fonction des facteurs systémiques et idiosyncratiques . . . . . | 18        |
| 5.2.1    | Présentation générale . . . . .  | 18        |
| 5.2.2    | Calcul de la corrélation . . . . .   | 19        |
| 5.2.3    | Ce qu'il faut faire . . . . .  | 19        |
| 5.3      | Calcul du nombre de facteurs explicatifs, de $F_k$ et des poids $w_k$ . . . . .  | 19        |
| 5.3.1    | Présentation . . . . .   | 19        |
| 5.3.2    | Présentation de la méthode de l'ACP . . . . .  | 20        |
| 5.3.3    | Le pouvoir prédictif . . . . .   | 20        |
| 5.3.4    | Calcul du nombre de valeurs propres et choix des $F_k$ . . . . .   | 21        |
| 5.4      | Calcul de $R^2$ et des $w_k$ . . . . .   | 22        |
| 5.4.1    | Présentation . . . . .   | 22        |
| 5.4.2    | Présentation de la méthode des moindres carrés ordinaires . . . . .  | 23        |
| 5.4.3    | Méthode de Cholesky . . . . .  | 23        |
| 5.4.4    | Calcul de $R^2$ et $w_k$ . . . . .   | 25        |
| <b>6</b> | <b>Partie numérique - Présentation des résultats</b>   | <b>27</b> |
| 6.1      | Présentation . . . . .   | 27        |
| 6.2      | Le pouvoir prédictif . . . . .   | 29        |
| 6.3      | Les valeurs propres . . . . .  | 30        |
| 6.4      | La corrélation . . . . .   | 31        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 6.5      | Analyse de l'étude . . . . .   | 34        |
| 6.5.1    | Analyse de l'étude par région . . . . .  | 34        |
| 6.5.2    | Analyse de l'étude par pays . . . . .  | 35        |
| 6.5.3    | Analyse de l'étude par secteur . . . . .   | 36        |
| 6.6      | Comparaison des corrélations entre les périodes . . . . .  | 38        |
| 6.6.1    | Comparaison des corrélations entre les périodes région par région . . . . .  | 38        |
| 6.6.2    | Comparaison des corrélations entre les périodes pays par pays . . . . .  | 38        |
| 6.6.3    | Comparaison des corrélations entre les périodes secteur par secteur . . . . .  | 39        |
| 6.6.4    | Comparaison des corrélations entre les périodes pour chacun des secteurs par<br>entreprise . . . . .                         | 41        |
| <b>7</b> | <b>Partie numérique - Étude du portefeuille</b>  | <b>49</b> |
| 7.1      | Présentation . . . . .   | 49        |
| 7.2      | Les données . . . . .  | 49        |
| 7.2.1    | Présentation . . . . .   | 49        |
| 7.2.2    | Objectifs . . . . .  | 52        |
| 7.3      | Les rendements des portefeuilles . . . . .   | 53        |
| 7.3.1    | Présentation . . . . .   | 53        |
| 7.3.2    | Corrélation entre deux portefeuilles . . . . .   | 53        |
| 7.4      | Comparaison des corrélations entre les périodes . . . . .  | 54        |
| 7.4.1    | Comparaison des corrélations entre les périodes région par région . . . . .  | 54        |
| 7.4.2    | Comparaison des corrélations entre les périodes pays par pays . . . . .  | 55        |
| 7.4.3    | Comparaison des corrélations entre les périodes secteur par secteur . . . . .  | 56        |
| 7.5      | Corrélations entre actions et obligations . . . . .  | 57        |
| 7.6      | Corrélations entre actions cotées et obligations sur des périodes glissantes . . . . .                                       | 58        |
| 7.7      | Corrélations entre actions cotées et obligations sur des périodes glissantes pour d'autres<br>sociétés d'assurance . . . . . | 59        |
| <b>8</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>61</b> |
|          | <b>ANNEXES</b>   | <b>63</b> |
| <b>A</b> | <b>Bibliographie</b>   | <b>64</b> |
| <b>B</b> | <b>Diverses définitions</b>  | <b>65</b> |
| <b>C</b> | <b>Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton</b>   | <b>66</b> |
| <b>D</b> | <b>Démonstration de la normalité du rendement</b>  | <b>69</b> |
| <b>E</b> | <b>Démonstration du calcul de la corrélation</b>   | <b>71</b> |

## 2 Introduction

Afin de pouvoir obtenir le diplôme d'ingénieur en Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (MACS), ainsi que le diplôme du Master en Mathématiques et Informatique spécialisé en Algorithmiques, Modélisation et Images (AMI) j'ai eu la chance de réaliser mon stage de fin d'études, de mi-October 2013 à mi-Avril 2014 au sein de la société PRO BTP.

J'ai ainsi pu effectuer mon stage de fin d'études au sein de la Direction des Risques de PRO BTP et plus particulièrement au sein de la Direction des Risques Actif-Passif à Paris. Le stage consistait dans l'analyse des corrélations entre les différents actifs pour l'institution de prévoyance BTP-PREVOYANCE.

Le travail réalisé se divise en quatre parties.

La première partie du rapport présente l'entreprise PRO BTP : son histoire, ses activités, sa gouvernance, ses chiffres clés et la Direction qui m'a accueillie.

La deuxième partie sera une partie théorique afin de distinguer le cheminement évaluant la matrice de corrélation.

La troisième partie de cette étude sera une partie numérique dont le but est d'appliquer cette théorie à des données réelles.

La quatrième étape consistera à étudier les entreprises d'un portefeuille d'actions et d'obligations.

## 3 Présentation de PRO BTP

### 3.1 L'entreprise en quelques mots

Le groupe PRO BTP, qui est un groupe à but non lucratif, constitue le premier organisme professionnel de protection sociale en France pour le bâtiment et les travaux publics.

### 3.2 L'histoire de PRO BTP

La création du Groupe PRO BTP intervient juste après la seconde guerre mondiale.

C'est en 1947 que la Caisse Nationale de Retraite du Bâtiment, des Travaux Publics et des Industries Connexes (la CNRBTPIC) est créée dont l'objectif est de faire la promotion l'Association pour le Régime de Retraite Complémentaire des salariés (ARRCO) et l'Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres (AGIRC).

En 1954 interviendra la mise en place de la Caisse du Bâtiment et des Travaux Publics (CBTP, caisse qui ne sont autres que des organisations du même acabit que L'AGIRC et l'ARRCO), régime de retraite complémentaire des Etam (employés, techniciens et agents de maîtrise) du BTP. Cette initiative sera suivie successivement en 1959 par lesancements de la Caisse Nationale de Retraite des Ouvriers du Bâtiment et des Travaux Publics (CNRO) pour les ouvriers du BTP et en 1961 par le régime complémentaire pour les salariés, l'ARRCO.

Le groupe s'intéresse à l'action sociale. En 1964, il ouvre le premier établissement sanitaire et médico-social pour les personnes âgées, et en 1968 il ouvre le premier village de vacances.

La réunion de ces institutions va conduire, en 1993, au Groupe PRO BTP. Et c'est en 1997 qu'est créée la BTP-Retraite, qui est la fusion entre la CBTP et la CNRO. En 2001, est créé BTP-PRÉVOYANCE de la fusion entre la CNPO, la CBTP et la CNPBTPIC.

### 3.3 Les activités

PRO BTP assure la protection sociale de ses adhérents à travers différentes activités telles que la retraite complémentaire, la prévoyance, la santé, l'assurance et l'épargne.

- **Retraite complémentaire :**

Le Groupe PRO BTP assure la gestion des régimes de retraite complémentaire auprès des entreprises et des salariés du bâtiment et travaux publics.

Il s'occupe des déclarations de salaire et de cotisations, encaissements et gestion des droits, suivi des carrières, instruction des dossiers de retraite et paiement.

PRO BTP participe à la mise en place de l'Usine retraite de la retraite complémentaire grâce à son système d'information, qu'elle partage avec d'autres groupes (AGRIC, AUDIENS, B2V, IRP Auto, Lourmel) dans le cadre d'AMICAP.

- **La prévoyance :**

PRO BTP a développé des solutions collectives et individuelles, face aux accidents de la vie, qui protègent aussi bien les hommes que les femmes du BTP ainsi que leurs proches.

La prévoyance recouvre l'ensemble des risques liés à la personne (arrêt de travail, invalidité, décès...).

- **La santé :**

PRO BTP est l'acteur de référence de la complémentaire santé des salariés et des retraités du BTP. En 2012, il couvrait un peu plus d'un salarié sur deux du BTP et près d'un quart des retraités du secteur.

Les adhésions peuvent être souscrites soit collectivement par une entreprise pour ses salariés, soit à titre individuel par les artisans, les salariés et les retraités.

En cas de chômage, les salariés qui étaient couverts par un contrat collectif, bénéficient gratuitement de leur couverture santé pendant leur période de droits au chômage.

PRO BTP a construit un dispositif d'aides sociales aux plus vulnérables, avec des réductions pour les retraités ayant de faibles ressources et pour les apprentis du BTP.

PRO BTP est partenaire de GROUPAMA dans SÉVÉANE<sup>5</sup>, proposant ainsi aux adhérents un réseau d'opticiens et de chirurgiens dentistes et d'audio-prothésistes.

- **L'assurance :**

Les sociétés d'assurances familiales du BTP (SAF BTP) proposent des assurances destinées à la protection des personnes et des biens tels que le logement, les automobiles, l'assurance scolaire,...

- **L'épargne :**

Pour l'épargne individuelle ainsi que dans le champ de l'épargne salariale ou de l'épargne retraite, PRO BTP a développé une gamme reconnue comme performante sur le marché.

Dans le domaine de l'épargne individuelle, PRO BTP propose des contrats adaptés à chaque situation : assurance vie, épargne retraite, épargne Handicap.

Pour l'épargne collective, PRO BTP gère l'épargne salariale du BTP : la participation, l'intéressement et les plans d'épargne d'entreprise, notamment le PERCO BTP.



### 3.4 Organisation

#### 3.4.1 Les structures

Le groupe se divise en deux structures : la structure politique et la structure technique.

La structure politique définit les orientations politiques et stratégiques du groupe, veille au respect des obligations et des engagements des organismes du groupe et contrôle les conditions d'exécution des décisions.

La structure technique a pour objectif d'améliorer les coûts de fonctionnement des régimes de retraite et de prévoyance, d'établir une gamme de prestations cohérentes et un réseau de services communs.

#### Structure politique

PRO BTP Association sommitale

#### Structures techniques

PRO BTP Association de moyens

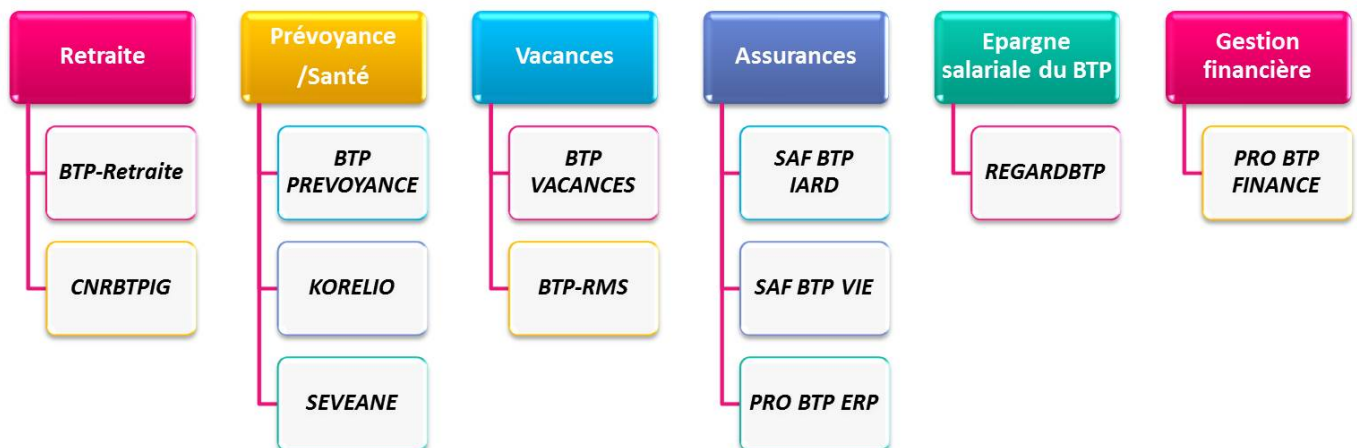


FIGURE 1 – Structures du Groupe PRO BTP

### 3.4.2 La direction

Depuis 2005, le directeur général du Groupe PRO BTP est Monsieur Paul Grasset.

L'équipe de direction se compose du Directeur général du groupe PRO BTP et des institutions et des directions d'institutions et d'entités techniques.

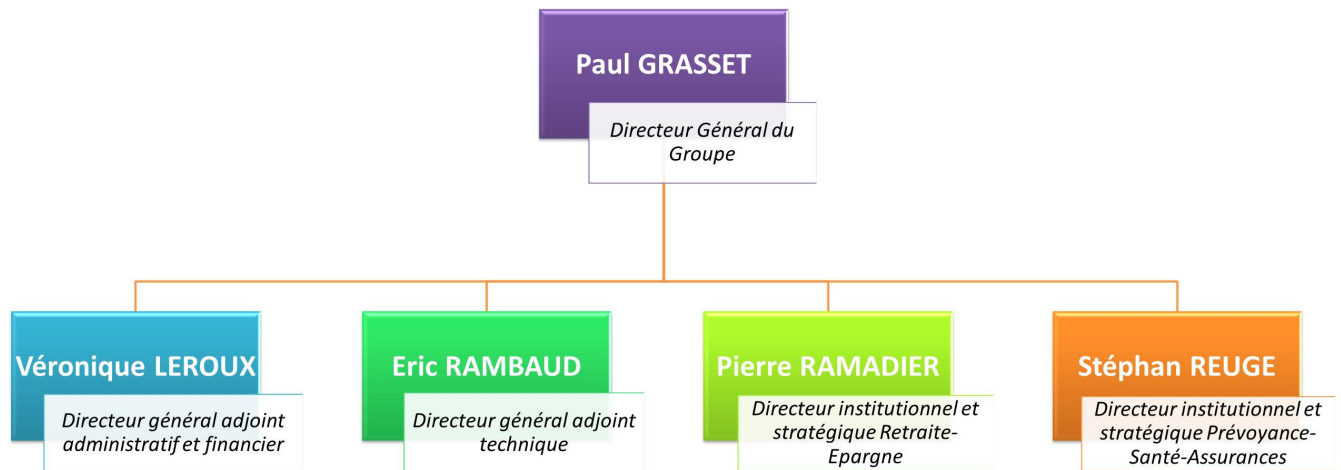


FIGURE 2 – Direction du Groupe PRO BTP

### 3.5 Chiffres clés

Voici quelques chiffres clés du groupe. En 2012, il y a eu :

- 3,5 millions d'adhérents
- 212 000 entreprises cotisantes
- 6,6 milliards de cotisations
- 89 millions d'euros dédiés à l'action sociale
- 8,8 millions de visites sur *www.probtp.com*
- 6 millions d'appels téléphoniques reçus
- 332 000 visites dans les agences Conseil
- 94,9% de satisfaction générale chez nos adhérents
- 6,19% de la masse salariale de l'entreprise consacrée à la formation

Pour l'épargne salariale :

- 16 000 entreprises adhérentes dont 13500 de moins de 10 salariés épargnants
- 365 000 salariés épargnants
- 200 millions d'euros collectés
- 1,8 milliard de capital géré
- 7 fonds à choisir par l'épargnant dans la gamme BTP Epargne, pour des placements plus ou moins performants et risqués
- 9,16% est la performance en 2012 du fonds "Prudent" le plus choisi (15,5% pour le fonds "Actions" le plus risqué)

Voici la répartition des cotisations en 2012 :

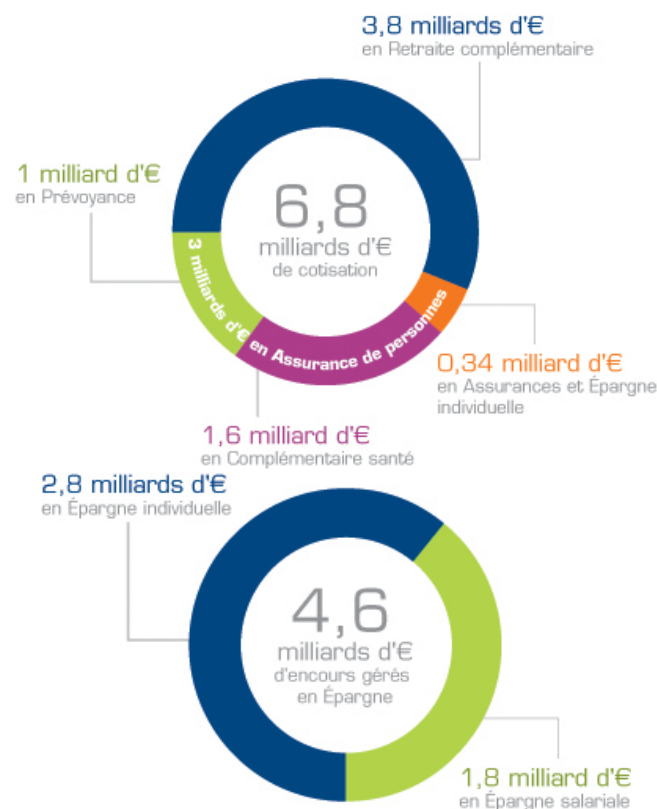


FIGURE 3 – Répartition des cotisations en 2012

### 3.6 La direction des Risques

Afin d'être conforme à la réglementation de la solvabilité 2, la Direction des Risques (DRIS) a été mise en place au sein de PRO BTP début 2012. Elle est de plus divisée en deux directions : la Direction des Risques Opérationnels (DROP) et la Direction des Risques Actif-Passif (DRAP). 9 salariés travaillent au sein de cette direction : le directeur de la DRIS, l'assistante de direction, la DROP regroupe 4 salariés, la DRAP regroupe 3 salariés.

#### • Les Risques Opérationnels

La Direction des Risques Opérationnels gèrent les risques liés aux pertes, aux dysfonctionnements humains (erreur, fraude, ...), aux dysfonctionnements des systèmes internes (informatique, ...), aux risques externes (inondation, ...).

#### • Les Risques Actif-Passif

La Direction Actif-Passif gère les risques liés à l'actif, au passif et à l'actif-passif. Elle planifie les évolutions possibles des engagements de financement, de l'épargne financière, de conservation en fonction de paramètres tels que la situation économique, le taux d'intérêt, le marché, ...

Voici les missions de la direction des risques opérationnels et de la direction des risques actif-passif :

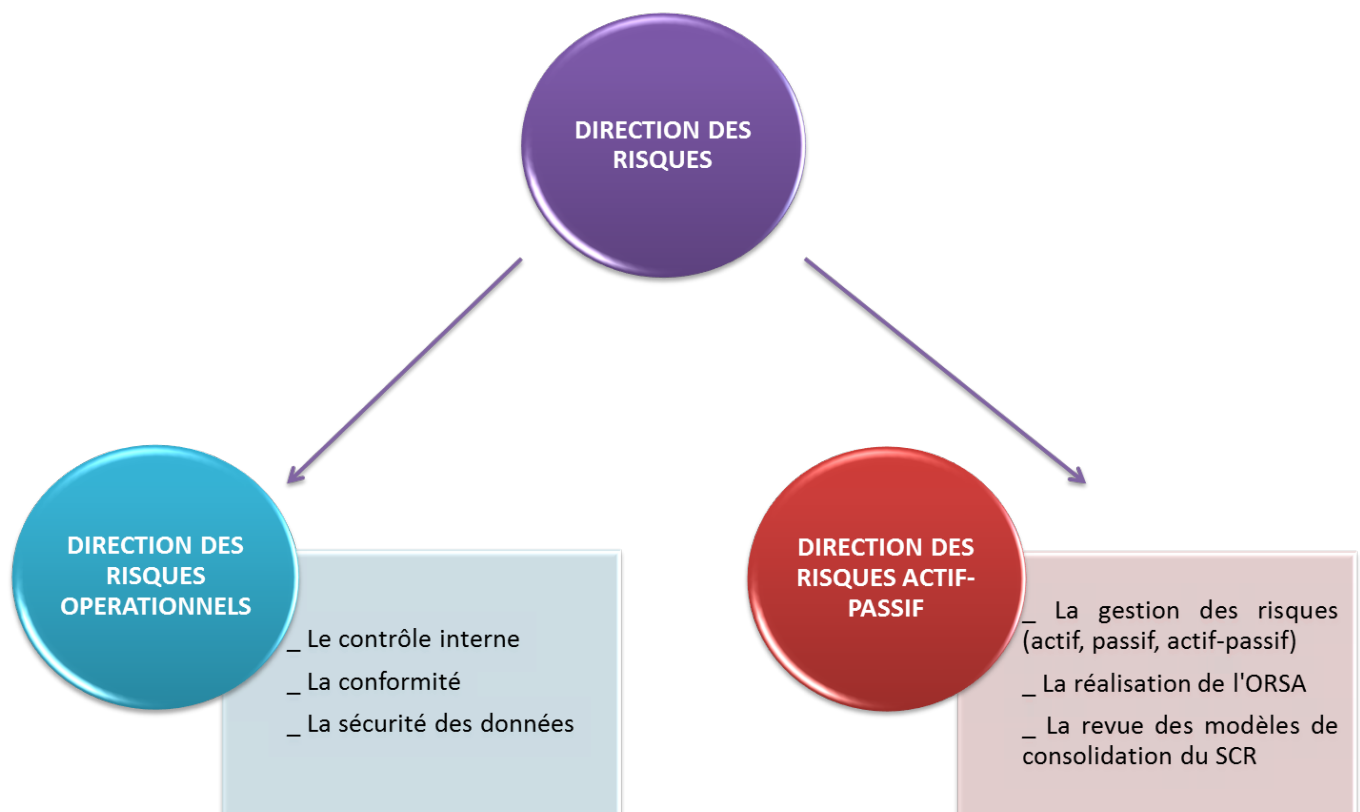


FIGURE 4 – Répartition de la Direction des Risques

## 4 Objectif

### 4.1 Présentation

L'objectif de cette partie est d'étudier les corrélations existantes entre différentes entreprises dont on détiendrait des actions ou des obligations au sein de notre portefeuille d'actifs.

Ceci consistera à déterminer l'intensité de la liaison entre les évolutions conjointes des rendements de ces entreprises.

Nous chercherons à comparer les corrélations sur différentes périodes de temps pendant lesquelles les volatilités sont plus ou moins fortes, afin de déterminer la variation des corrélations dans des périodes plus ou moins stressées.

### 4.2 Origine du modèle

Le modèle utilisé est essentiellement fondé sur la théorie plus connue sous la dénomination de modèle de la firme de Merton et qui s'inspire de la théorie de Black-Scholes.

## 5 Partie théorique

### 5.1 Expression du rendement normalisé des actifs d'une entreprise

#### 5.1.1 Présentation

Le modèle fait l'hypothèse que la corrélation entre deux entreprises peut être calculée sur la base des rendements des actifs du bilan de ces entreprises. Les valeurs de ces actifs ne sont pourtant pas observables, encore moins leurs rendements. Le modèle de Merton nous permettra donc de reconstituer ces valeurs à partir de données observables.

#### 5.1.2 Les données

Les données observables pour chaque entreprise sont :

- La capitalisation boursière
- La dette
- Le cours de l'action

et ceci à tous les pas de temps.

*Notations pour une entreprise :*

- $E$  : capitalisation boursière (Equity, market value, fonds propres)
- $D$  : dette (Debt, book value, total liabilities)
- $A$  : cours de l'action
- $\beta$  : rendement périodique du cours de l'action
- $\sigma_E$  : volatilité des actions
- $V$  : valeur des actifs
- $\sigma_V$  : volatilité des actifs

Cependant, nous ne connaissons pas encore la volatilité des actions. Pour pouvoir la calculer, nous allons la déduire des données observables. Ainsi, il suffit simplement d'utiliser le cours de l'action. Voici la méthode pour la déterminer :

$\forall \Delta t$  une période de temps et  $\beta_t$  le rendement des actifs d'une entreprise sur la période  $\Delta t$ .  $A_t$  est la valeur du cours en fin de période  $\Delta t$  et  $A_{t-1}$  la valeur du cours en début de période  $\Delta t$ . Alors le rendement des actifs d'une entreprise sur la période  $\Delta t$  est noté par :

$$\beta_t = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}$$

La volatilité s'exprime comme l'écart-type d'une série de rendements périodiques. Si nous souhaitons obtenir une volatilité annuelle à l'aide de données journalières, nous utilisons l'expression :

$$\sigma_{E(\text{annuelle})} = \sqrt{252} \sigma_{E(\text{journalière})}$$

(252 représente le nombre de jours ouvrés en un an).

Si nous souhaitons obtenir une volatilité annuelle à l'aide de données hebdomadaires, nous utilisons l'expression :

$$\sigma_{E(\text{annuelle})} = \sqrt{52} \sigma_{E(\text{hebdomadaire})}$$

(52 représente le nombre de semaines en un an).

Dans l'étude, nous retenons la deuxième expression puisque nous disposons de données hebdomadaires.

Par conséquent, nous connaissons donc  $E_t$ ,  $D_t$  et  $\sigma_E$ .

### 5.1.3 Le choix du modèle

Pour le choix du modèle, nous avons privilégié deux principaux critères :

- La robustesse du modèle
- un modèle dont les données nécessaires à la mise en œuvre sont à notre portée à moindre coût.

### 5.1.4 Modèle de la firme de Merton (ou encore modèle de Black-Scholes-Merton)

Nous travaillerons avec le modèle de la firme de Merton qui est fondé sur la théorie de l'évaluation des options du modèle de Black-Scholes.

Considérons une entreprise dont les actifs sont financés au passif par des fonds propres détenus par les actionnaires et de la dette détenue par les créanciers. L'égalité entre l'actif et le passif s'écrit par :

$$V = D + E$$

Voici un schéma représentant l'actif et le passif d'une entreprise :

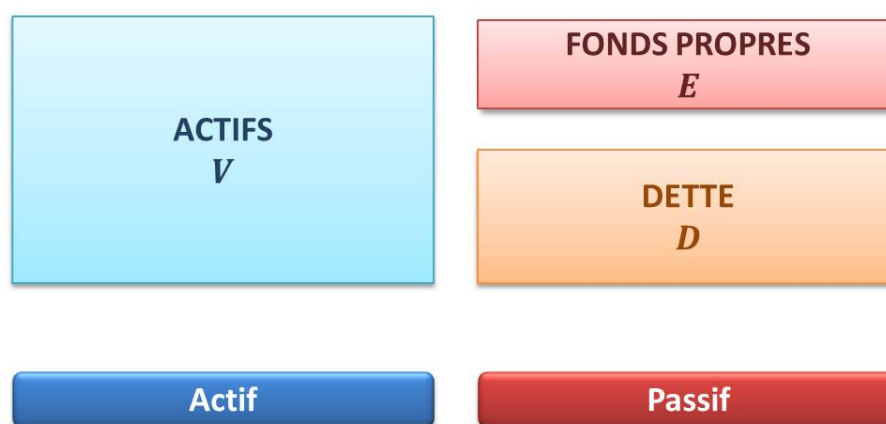


FIGURE 5 – Actif et Passif d'une entreprise

Le modèle de Merton suppose que la valeur de marché des actifs d'une entreprise suit un mouvement brownien géométrique et que la dynamique des entreprises est donnée par le processus d'Itô :

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma_V V_t dW_t$$

avec  $V_t$  la valeur des actifs de l'entreprise,  $\mu$  le taux sans risque,  $\sigma_V$  la volatilité de la valeur des actifs.

A l'échéance  $T$ , deux cas sont possibles :

- Si la valeur des actifs est supérieure à la valeur nominale de la dette  $V_T > D$ , la valeur des actifs est suffisante pour rembourser les créanciers : l'entreprise rembourse  $D$  aux créanciers et donne  $V_T - D$  aux actionnaires.
- Si la valeur des actifs est inférieure à la valeur nominale de la dette  $V_T < D$ , la valeur des actifs est insuffisante pour rembourser les créanciers et donc l'entreprise donne  $V_T$  aux créanciers mais ne donne rien aux actionnaires.

$\forall 0 < t < T$ , la valeur de marché des fonds propres à la date  $t$  se note

$$E_{t-1} = V_{t-1}\mathcal{N}(d_1) - D_t e^{-\mu\Delta t}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_{t-1}}{D_t}\right) + \left(\mu + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma_V\sqrt{\Delta t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{\Delta t}$$

et par Itô

$$\sigma_E = \sigma_V \frac{V_{t-1}}{E_{t-1}} \mathcal{N}(d_1)$$

où  $\mathcal{N}$  est la loi normale.

**Voir la démonstration en annexe (annexe C).**

### 5.1.5 Méthode de Newton-Raphson

Afin de déterminer la valeur des actifs d'une entreprise et la volatilité des actifs de cette même entreprise, nous utilisons la méthode de Newton-Raphson.

La méthode de Newton-Raphson est un algorithme permettant de trouver numériquement une approximation d'une racine d'une fonction réelle ( $f(x) = 0$ ). Pour cela, on cherche l'intersection de la droite tangente avec l'axe des abscisses. Pour déterminer cette approximation, l'algorithme va se baser sur le développement de Taylor au premier ordre.

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Donc, par récurrence, le point tangente entre la  $k^{ieme}$  tangente avec l'axe des abscisses se trouve par :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

avec  $x_0$  le point initial connu où  $(x_0, f(x_0))$  est un point tangente.



### 5.1.6 Calcul de $V_t$ et de $\sigma_V$

Rappelons que nous cherchons à déterminer les valeurs  $V_t$  et  $\sigma_V$  pour chaque pas de temps et chaque entreprise. Pour cela, nous utiliserons le logiciel *R* qui va calculer ces solutions numériques par la méthode de Newton-Raphson, présentée ci-dessus, en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} 0 &= E_{t-1} - V_{t-1}\mathcal{N}(d_1) + D_t e^{-\mu\Delta t}\mathcal{N}(d_2) \\ 0 &= E_{t-1}\sigma_E - V_{t-1}\sigma_V\mathcal{N}(d_1) \end{cases}$$

Nous trouvons alors  $\forall t > 0, V_t$  et  $\sigma_V$ .

### 5.1.7 Expression du rendement normalisé d'une entreprise

Une fois calculé la série temporelle représentant les valeurs de l'actif dans le temps, ainsi que la série temporelle représentant les volatilités aux différents instants, nous cherchons désormais à déterminer l'expression du rendement normalisé des actifs d'une entreprise. Étant l'hypothèse selon laquelle, la valeur des actifs suit une loi log-normale, nous pouvons exprimer  $V_t$  comme suit :

$$V_t = V_{t-1} e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_V W_{\Delta t}}$$

où  $\forall t > 0$   $W_{\Delta t}$  est un processus de Wiener où  $W_{\Delta t} \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$  et  $\Delta t$  est la durée de temps qui s'écoule entre  $t$  et  $t - 1$ .

A partir de cette étape, l'expression du rendement normalisé peut facilement être exprimée. L'objectif est de mettre en évidence le fait que le rendement normalisé de l'actif suit une loi normale centrée réduite. Pour cela, exprimons le processus de Wiener en fonction d'une variable aléatoire et d'une constante.

$$\begin{aligned} V_t &= V_{t-1} e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_V W_{\Delta t}} \\ \frac{V_t}{V_{t-1}} &= e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_V W_{\Delta t}} \\ \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right) &= \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_V W_{\Delta t} \\ \sigma_V W_{\Delta t} &= \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t \\ W_{\Delta t} &= \frac{1}{\sigma_V} \left( \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)\Delta t \right) \end{aligned}$$

Or  $\forall t > 0, W_{\Delta t} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta t})$ .

En posant  $U$  comme une variable aléatoire tel que  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , on peut écrire  $\forall t > 0, W_{\Delta t} \sim \sqrt{\Delta t}U$ . C'est à dire que nous avons :

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta t}U &= \frac{1}{\sigma_V} \left( \ln \left( \frac{V_t}{V_{t-1}} \right) - \left( \mu - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \Delta t \right) \\ r_{\Delta t} &= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{\Delta t}} \left( \ln \left( \frac{V_t}{V_{t-1}} \right) - \left( \mu - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \Delta t \right)\end{aligned}$$

On obtient que  $r_{\Delta t}$  suit une loi normale centrée réduite.

## 5.2 Expression des rendements des actifs d'une entreprise en fonction des facteurs systémiques et idiosyncratiques

### 5.2.1 Présentation générale

Avant d'évaluer la matrice de corrélation de ces entreprises, il est avant tout nécessaire de distinguer les diverses étapes permettant de la concevoir.

Pour cela, nous considérons un portefeuille  $P$  contenant  $N$  actifs émis par  $N$  entreprises distinctes. Nous disposons des rendements normalisés des actifs d'une entreprise  $i$  pour  $T$  périodes.

L'hypothèse générale du modèle à facteurs est que les rendements des actifs sont des fonctions linéaires d'un ou plusieurs facteurs, c'est à dire que nous pouvons décomposer le rendement normalisé  $r_i$  avec  $i \in \{1, \dots, N\}$  de la façon suivante :

$$r_i = \sqrt{R_i^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i$$

où :

- $K$  : est le nombre de facteurs explicatifs
- $F_k : k = 1, \dots, K$  sont les valeurs des **facteurs systémiques**
- $w_{k,i} : k = 1, \dots, K$  sont les coefficients qui mesurent les sensibilités des rendements des titres aux facteurs  $F_k$  est appelé bêta de l'actif  $i$  vis-à-vis du facteur  $k$ . Ils sont également appelés **poids**
- $\sqrt{R_i^2}$  : est le terme représentant l'exposition globale au marché de l'entreprise  $i$
- $\varepsilon_i$  : est le terme spécifique (ou résiduel) du titre  $i$ , c'est à dire le rendement des actifs d'une entreprise  $i$  non expliqué par les facteurs. Il est également appelé **facteur idiosyncratique**.

#### Hypothèses générales :

- $r_i, F_k, \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , c'est à dire que les rendements des actifs de l'entreprise  $i$ , les facteurs systémiques et les facteurs idiosyncratiques suivent une loi normale centrée réduite, et donc  $\mathbb{E}[r_i] = \mathbb{E}[F_k] = \mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$  pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, \dots, K$ .
- La corrélation entre deux facteurs systémiques est nulle tout comme la corrélation entre un facteur systémique et un facteur idiosyncratique, c'est à dire :  $\text{corr}(F_k, F_l) = \text{corr}(F_k, \varepsilon_i) = 0$  pour  $i = 1, \dots, N$  et  $k = 1, \dots, K$  ce qui revient à  $\mathbb{E}[F_k F_l] = \mathbb{E}[F_k \varepsilon_i] = 0$

- Enfin, la somme des poids est égale à 1, c'est à dire :  $\sum_{k=1}^K w_k^2 = 1$

**Voir la démonstration en annexe (annexe D).**

### 5.2.2 Calcul de la corrélation

L'expression du rendement normalisé des actifs d'une entreprise est reprise afin de connaître le mode de calcul de la corrélation entre deux entreprises.

Il va, en effet, permettre de calculer la matrice de corrélation. En effet, la corrélation entre deux entreprises  $i$  et  $j$  avec  $1 \leq i \leq N$  et  $1 \leq j \leq N$  a pour expression :

$$\begin{cases} \text{entreprise } i = \text{entreprise } j & \text{corr}(r_i, r_j) = 1 \\ \text{entreprise } i \neq \text{entreprise } j & \text{corr}(r_i, r_j) = \sqrt{R_i^2} \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} w_{k,j} \end{cases}$$

**Voir la démonstration en annexe (annexe E).**

### 5.2.3 Ce qu'il faut faire

Ainsi, pour estimer la matrice de corrélation, il est nécessaire de calculer les poids ainsi que l'exposition globale au marché correspondant pour chaque entreprise. Par conséquent, les étapes distinctes permettant d'évaluer la matrice de corrélation sont donc de :

- Déterminer le nombre de facteurs explicatifs
- Exprimer le rendement normalisé des actifs d'une entreprise en fonction des facteurs systémiques et idiosyncratiques
- Calculer les  $R^2$  et  $w_k$  pour chaque entreprise
- Calculer la matrice de corrélation

## 5.3 Calcul du nombre de facteurs explicatifs, de $F_k$ et des poids $w_k$

### 5.3.1 Présentation

Les rendements normalisés des actifs des entreprises étant calculés, nous cherchons désormais à déterminer la matrice des facteurs systémiques, et donc le nombre de facteurs explicatifs. En effet, le choix du nombre de facteurs explicatifs est lié aux facteurs systémiques. Il y a autant de facteurs systémiques qu'il y a de poids. Par conséquent, il est nécessaire de connaître le nombre exact de facteurs systémiques. Pour cela, nous allons utiliser le pouvoir prédictif de l'étude ainsi que l'analyse en composantes principales, qui va nous permettre de déterminer ces valeurs.

Les étapes de cette section :

- Calculer le pouvoir prédictif
- Déterminer le nombre de facteurs
- Déterminer les facteurs systémiques

### 5.3.2 Présentation de la méthode de l'ACP

L'analyse en composantes principales (ACP) est une méthode couramment utilisée en statistiques. C'est une méthode d'analyse de données. Elle va donc chercher à établir des relations entre les individus (les lignes) et à mettre en évidence les liaisons des variables (les colonnes).

L'ACP consiste à remplacer les variables  $x_1, \dots, x_p$  qui sont corrélées par de nouvelles variables artificielles  $c_1, \dots, c_p$  qui sont des combinaisons linéaires des  $x_1, \dots, x_p$  qui sont non corrélées entre elles et les plus liées avec les  $x_1, \dots, x_p$ .

- Les axes sont orthogonaux et sont des combinaisons linéaires des variables originelles
- Les vecteurs propres issus de l'analyse représentant les sensibilités des rentabilités au risque systémique

Nous disposerons donc d'une matrice de départ  $X$  de dimension  $(T, N)$ .  $T$  représente le nombre d'individus, et  $N$  représente le nombre de variables. A chaque individu  $j \in \{1, \dots, T\}$  est associé un vecteur  $x_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,N})$ . A chaque variable  $i$  est associé le vecteur  $x_i$ .

La première étape de l'analyse en composantes principales consistera à calculer les barycentres des individus. La deuxième étape sera de déterminer la matrice des données centrées réduites. Puis la troisième étape aura pour objectif de déterminer la matrice de variance-covariance (ou une matrice de corrélation). Nous disposerons alors d'une matrice de dimension  $(N, N)$ . La quatrième étape consistera à récupérer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice obtenue, ainsi que les composantes principales à partir de la matrice de covariance (ou la matrice de corrélation).

Les axes peuvent être déterminés selon les résultats obtenus.

### 5.3.3 Le pouvoir prédictif

La première étape consiste à estimer le pouvoir prédictif de l'analyse. L'analyse prédictive permet d'analyser des données historiques pour faire des prévisions sur des événements futurs.

Soient  $X$  la matrice initiale et  $Z$  la matrice des composantes principales de  $X$ . Notons  $y$  le vecteur solution et  $\hat{X}$  tel que  $\hat{X} = Zy$ . On a alors

$$\begin{aligned} X &= Zy + \hat{\epsilon} \\ X &= \hat{X} + \hat{\epsilon} \end{aligned}$$

Le résidu  $\hat{\epsilon}$  se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} &= X - \hat{X} \\ \hat{\epsilon} &= (X - \bar{X}\mathbb{1}) + (\bar{X}\mathbb{1} - \hat{X}) \\ (X - \bar{X}) &= \hat{\epsilon} - (\bar{X} - \hat{X}) \\ \|X - \bar{X}\mathbb{1}\|^2 &= \|\hat{\epsilon}\|^2 + \|\bar{X} - \hat{X}\mathbb{1}\|^2 \\ A &= C + B \end{aligned}$$

avec  $\bar{X}$  le barycentre de  $X$  de taille  $(T, 1)$  et  $\mathbb{1}$  la fonction indicatrice de taille  $(1, N)$ .

où  $A$  représente la variance totale,  $B$  représente la variance expliquée et  $C$  représente la variance inexpliquée (variance des résidus). Le coefficient de détermination  $RV^2$  peut alors être calculé

$$\begin{aligned} RV^2 &= \frac{B}{A} \\ RV^2 &= 1 - \frac{C}{A} \end{aligned}$$

Différents cas peuvent alors se présenter :

- Si  $RV^2$  est proche de 1, le modèle de régression linéaire est très bon puisque la variance expliquée se rapproche fortement de la variance totale, ce qui implique une variance des résidus très faible.
- Si  $RV^2$  est proche de 0, le modèle de régression linéaire est inadapté (estimation par la moyenne) et la variance des résidus est très forte.

Le pouvoir prédictif va nous permettre d'obtenir une première idée du nombre de facteurs explicatifs. En effet, en réalisant l'ACP de la matrice des rendements nous récupérons les composantes principales. Nous réalisons alors la régression entre la matrice des rendements et les dix premières composantes principales puis nous calculons le coefficient de détermination. Nous faisons de même pour les vingt premières composantes principales, et ainsi de suite. Nous obtenons plusieurs coefficients de détermination.

De plus nous prenons, au lieu de la matrice des composantes principales, une matrice aléatoire de même taille que la matrice des composantes principales. Nous faisons alors comme précédemment, c'est à dire une régression linéaire entre la matrice des rendements et les dix premières composantes de la matrice aléatoire puis nous calculons le coefficient de détermination. Nous faisons de même pour les vingt premières composantes de la matrice aléatoire, et ainsi de suite. Nous obtenons alors autant de coefficients de détermination qu'avec les composantes principales.

Nous comparons alors les coefficients de détermination obtenus entre les composantes principales et la matrice aléatoire. Nous nous arrêtons à un premier nombre de facteurs explicatifs lorsque l'apport des composantes principales supplémentaires est minimal (voir le graphe de la partie numérique).

#### 5.3.4 Calcul du nombre de valeurs propres et choix des $F_k$

Le pouvoir prédictif ainsi obtenu, il nous reste à déterminer le nombre de valeurs propres et les composantes principales. Pour se faire, nous réalisons les étapes suivantes :

- Réaliser une ACP de  $X$
- Récupérer la première composante principale ( $PC_1$ ) et la première valeur propre ( $val_1$ ) (pour l'axe factoriel 1)
- Réaliser une régression entre chaque rendement normalisé des actifs de chaque entreprise  $i \in \{1, \dots, N\}$  et la première composante principale

$$r_i = PC_1 y_i$$

- Récupérer les résidus pour chaque entreprise

$$\varepsilon_i = r_i - PC_1 y_i$$

- Construire la matrice des résidus de taille  $(T, N)$  à l'aide des  $N$  résidus obtenus
- Réaliser l'ACP de la matrice des résidus et récupérer la première valeur propre de la première composante principale
- Recommencer ce procédé autant de fois que le nombre du pouvoir prédictif retenu à la sous-section précédente

Nous obtenons alors  $N$  valeurs propres et  $N$  composantes principales. Cependant, nous n'utiliserons pas toutes ces données. En effet, en regardant plus précisément les valeurs propres obtenues, nous constatons qu'elles sont décroissantes et se stabilisent à un certain moment donné. Nous utilisons donc les premières valeurs propres, et les composantes principales associées à ces valeurs propres, jusqu'à la stabilisation. Notons  $K$  le nombre de valeurs propres jusqu'à cette stabilisation.

En effet, que nous prenions les  $K$  valeurs propres retenues ou bien l'ensemble, les résultats seront les mêmes puisque le pouvoir explicatif est maximal au rang  $K$ . Cependant, l'objectif est d'exprimer les rendements des actifs en fonction de facteurs systémiques et d'un facteur idiosyncratique afin de réduire le temps de calcul et de faciliter la résolution du système pour trouver la matrice de corrélation. Donc nous retenons les  $K$  valeurs propres. En effet, au-delà, l'apport des facteurs systémiques est nul.

Les facteurs systémiques peuvent donc être déduits. Il s'agit de la matrice composée des  $K$  composantes principales associées aux  $K$  premières valeurs propres. Il y aura donc  $K$  facteurs explicatifs  $F_k$ , avec  $k \in [1, K]$ , pour chaque actif aux différents temps.

## 5.4 Calcul de $R^2$ et des $w_k$

### 5.4.1 Présentation

Connaissant les rendements normalisés des actifs de chaque entreprise  $i \in \{1, \dots, N\}$  pour chaque pas de temps, il nous reste à déterminer les valeurs de  $R^2$  et de  $w_k$ . En effet, les rendements normalisés vont permettre de trouver ces valeurs, et donc de calculer la matrice de corrélation.

Il suffira donc de résoudre le problème sous forme d'une régression linéaire simple. Pour cela, nous utiliserons :

- la méthode des moindres carrés ordinaires : permettant de passer d'un système irrégulier à un système régulier
- la méthode de Cholesky : méthode de décomposition matricielle permettant de résoudre le système.

### 5.4.2 Présentation de la méthode des moindres carrés ordinaires

La méthode des moindres carrés ordinaires, permet de résoudre un système d'équations irrégulier par approximation par un système d'équations régulier.

Soient  $X$  est une matrice de taille  $(T, N)$  et  $b$  un vecteur de taille  $(T, 1)$ . On cherche à résoudre  $Xy = b$ . Or il nous est impossible de résoudre l'équation  $Xy = b$  car  $X$  n'est pas une matrice carrée. Alors on transforme cette équation sous la forme  ${}^tXXy = {}^tXb$ . Nous pouvons ainsi résoudre ce système en posant  ${}^tXX = \tilde{X}$  et  ${}^tXb = \tilde{b}$  ce qui nous permet d'obtenir  $\tilde{X}y = \tilde{b}$  où  $\tilde{X}$  est une matrice carrée de taille  $(N, N)$ . Il nous est ainsi possible de résoudre le système irrégulier grâce à ce système régulier.

Le problème des moindres carrés ordinaires  $\|Xy - b\| = \min_{z \in \mathbb{R}^N} \|Xz - b\|$  admet au moins une solution. Si nous reprenons  $\tilde{X}y = \tilde{b}$ ,  $y \in \mathbb{R}^N$  est solution du système des moindres carrés ordinaires.

Cette équation transformée qui est maintenant régulière sera résolue par décomposition de Cholesky.

### 5.4.3 Méthode de Cholesky

Le principe de la méthode est de se ramener à deux systèmes triangulaires, c'est à dire qu'on cherche à décomposer une matrice symétrique  $A$  de départ en produit de deux matrices  $L$  et  ${}^tL$

$$A = L {}^tL$$

où  $L$  est la matrice triangulaire inférieure de  $A$  et  ${}^tL$  la transposée de la matrice  $L$ .

**Théorème :** Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique décomposition de Cholesky de  $A$  sous la forme  $A = L {}^tL$ , où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

On a donc la matrice  $A$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1,1} & a_{N-1,2} & \dots & a_{N-1,N} \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

Les matrices  $L$  et  ${}^tL$  sont quant à elles de la forme

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N-1,1} & l_{N-1,2} & \dots & 0 \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{pmatrix}$$

$${}^tL = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{N1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{N,N-1} \\ 0 & 0 & \dots & l_{NN} \end{pmatrix}$$

Soit un couple  $(i, j)$  tel que  $\forall (i, j), 1 \leq i \leq j \leq N$ . Puisque  $L$  est triangulaire inférieure ( $l_{i,j} = 0, \forall j \geq i$ ) et  $A$  symétrique  $a_{i,j} = a_{j,i}$ , il suffit de satisfaire le système d'équations suivant :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^i l_{i,k} l_{j,k}$$

Pour trouver les coefficients de la matrice  $L$ , nous avons besoin des coefficients de la matrice  $A$ .

Ainsi, pour la ligne 1, nous avons

$$\begin{cases} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} \\ \vdots & \\ l_{N1} &= \frac{a_{N1}}{l_{11}} \end{cases}$$

Et pour les lignes suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } j < i & l_{ji} = 0 \\ \text{si } j = i & l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ \text{si } j = i + 1 & l_{ji} = \frac{a_{i,j+1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ii}} \\ \text{si } j = n & l_{Ni} = \frac{a_{i,N} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{Nk}}{l_{ii}} \end{cases}$$

Nous connaissons donc les éléments de la matrice triangulaire  $L$ . On pourra alors résoudre le système :

$$L {}^tL\lambda = b$$

L'objectif est de déterminer  $\lambda$ . Cependant, pour procéder à cette résolution, il faudra résoudre ce problème en deux étapes. La première étape va consister à résoudre l'équation

$$L\gamma = b$$

d'inconnue  $\gamma$ .

La deuxième étape va consister à résoudre le système triangulaire



$${}^tL\lambda = \gamma$$

d'inconnue  $\lambda$ .

$\lambda$  étant la solution recherchée.

#### 5.4.4 Calcul de $R^2$ et $w_k$

La section précédente nous a permis de calculer les facteurs systématiques  $F_k$ . Pour trouver les  $R^2$  et  $w_k$  nous allons donc reprendre les résultats obtenus. Nous allons également prendre la méthode des moindres carrés ordinaires et la décomposition de Cholesky présentées précédemment.

$$r_i = \sqrt{R_i^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i$$

Avec la méthode des moindres carrés ordinaires, la résolution du système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} r_{1,i} \\ r_{2,i} \\ \vdots \\ r_{T-1,i} \\ r_{T,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \dots & F_{1,K} \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \dots & F_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{T-1,1} & F_{T-1,2} & F_{T-1,3} & \dots & F_{T-1,K} \\ F_{T,1} & F_{T,2} & F_{T,3} & \dots & F_{T,K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{R_i^2} w_{1,i} \\ \sqrt{R_i^2} w_{2,i} \\ \vdots \\ \sqrt{R_i^2} w_{K,i} \end{pmatrix}$$

Pour cela, notons  $F$  la matrice des facteurs systématiques et  $B$  le vecteur des rendements normalisés de l'actif  $i$ .

$$F = \begin{pmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} & \dots & F_{1,K} \\ F_{2,1} & F_{2,2} & F_{2,3} & \dots & F_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{T-1,1} & F_{T-1,2} & F_{T-1,3} & \dots & F_{T-1,K} \\ F_{T,1} & F_{T,2} & F_{T,3} & \dots & F_{T,K} \end{pmatrix}$$

On note  $B_i$  le vecteur :

$$B_i = \begin{pmatrix} r_{1,i} \\ r_{2,i} \\ \vdots \\ r_{T-1,i} \\ r_{T,i} \end{pmatrix}$$

Nous allons donc chercher à résoudre  $FY_i = B_i$  où  $Y_i$  est inconnu. Cependant  $F$  n'est pas une matrice carrée. Ainsi, pour résoudre ce système, il est nécessaire de la transformer sous forme d'une

matrice carrée. Pour cela, nous utilisons la méthode des moindres carrés.

$$\begin{aligned} FY_i &= B_i \\ {}^tFFY_i &= {}^tFB_i \\ \tilde{F}Y_i &= \tilde{B}_i \end{aligned}$$

On note alors  $\tilde{F}$  la nouvelle matrice qui est une matrice carrée et  $\tilde{B}_i$  le nouveau vecteur. Nous pouvons donc résoudre facilement le système à l'aide de la décomposition de Cholesky.  $Y_i$  devient connu. Posons alors  $Y_i$  tel que :

$$Y_i = \begin{pmatrix} \sqrt{R_i^2} w_{1,i} \\ \sqrt{R_i^2} w_{2,i} \\ \vdots \\ \sqrt{R_i^2} w_{K,i} \end{pmatrix}$$

Sachant que la somme des poids au carré est égale à 1, on a

$$\begin{aligned} w_{1,i}^2 + w_{2,i}^2 + \dots + w_{K,i}^2 &= 1 \\ R_i^2(w_{1,i}^2 + w_{2,i}^2 + \dots + w_{K,i}^2) &= R_i^2 \\ R_i^2 &= Y_{1,i}^2 + Y_{2,i}^2 + \dots + Y_{K,i}^2 \\ R_i^2 &= \|Y_i\|_2^2 \end{aligned}$$

De plus,  $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{R_i^2} w_{k,i} &= Y_{k,i} \\ w_{k,i} &= \frac{Y_{k,i}}{\|Y_i\|_2} \end{aligned}$$

Pour chaque actif  $i$ , nous trouvons alors les valeurs des poids et de  $R_i^2$ . Nous pouvons donc calculer la corrélation entre deux actifs.

## 6 Partie numérique - Présentation des résultats

### 6.1 Présentation

Le portefeuille BTP long terme de PRO BTP contient des actifs cotés issus de 402 entreprises émettrices différentes après transparenisation. PRO BTP FINANCE nous a fourni des données pour 316 entreprises. On a supprimé 56 entreprises car la série des données n'était pas complète.

L'étude va donc porter sur 260 entreprises (dont 1 hors portefeuille) et 501 périodes de temps. La durée des périodes d'observations des données de marché nécessaires est hebdomadaire. Les observations s'étalent du 20 Mai 2004 jusqu'à fin Décembre 2013, soit une représentation de 9 années et demi.

Les entreprises à étudier viennent de tous horizons puisque ce ne sont pas seulement des entreprises françaises. En effet, les données sont mondiales : France, Royaume-Uni, États-Unis, Japon,... et également de tous secteurs : énergie, finance, industrie,...

Les 260 entreprises portent sur 5 régions géographiques, 22 pays et 10 secteurs d'activités

Nous disposons de la capitalisation boursière de chaque entreprise, ainsi que de sa dette. La valeur des actions se trouve facilement avec le cours de l'action pour chaque entreprise d'après la partie théorique.

Nous scinderons cette période de temps en trois périodes. Pour les déterminer, nous utilisons les figures du CAC40 et du Spread.

Voici la représentation du CAC40 :



FIGURE 6 – Représentation du CAC40

Voici la représentation du Spread :

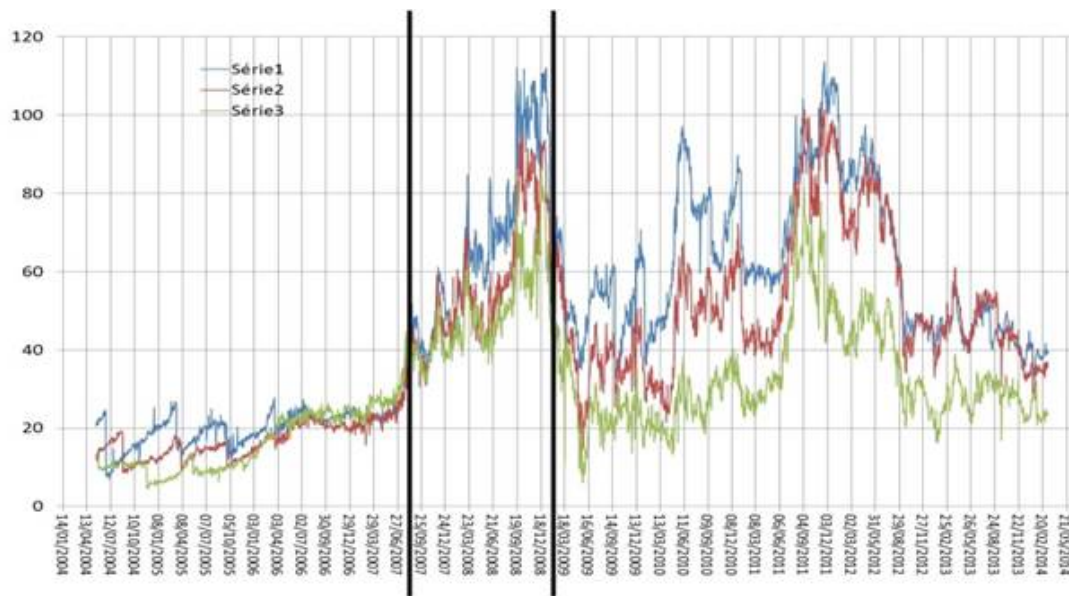


FIGURE 7 – Représentation du Spread

Le CAC 40 et le Spread nous permettent de choisir les trois périodes suivantes :

- **Période 1** : Du 20 Mai 2004 au 8 Juillet 2007
- **Période 2** : Du 9 Juillet 2007 au 9 Mars 2009
- **Période 3** : Du 10 Mars 2009 au 19 Décembre 2013
- **Période totale** : Du 20 Mai 2004 au 19 Décembre 2013

En effet, ces périodes ont été choisies de façon à avoir trois situations différentes : la période 1 est une période de faible agitation des marchés, tandis que la période 2 correspond à une période de crise, et enfin la période 3 représente une période de transition d'un marché en crise vers un marché apaisé. L'étude de ces trois périodes et de la période totale va nous permettre d'étudier l'évolution des corrélations suivant différentes conjonctures des marchés afin d'observer leur impact sur les niveaux de corrélation.

Nous noterons par la suite :

- **p1** : période 1
- **p2** : période 2
- **p3** : période 3
- **ptot** : période totale

Les résultats du pouvoir prédictif et des valeurs propres présentées ci-dessous sont effectués sur la période totale puisque le principe est le même sur les trois autres périodes.

## 6.2 Le pouvoir prédictif

Nous avons tracé et comparé le pouvoir prédictif du modèle prédit contre des facteurs aléatoires pour la durée totale des observations. Voici le graphe que nous obtenons :

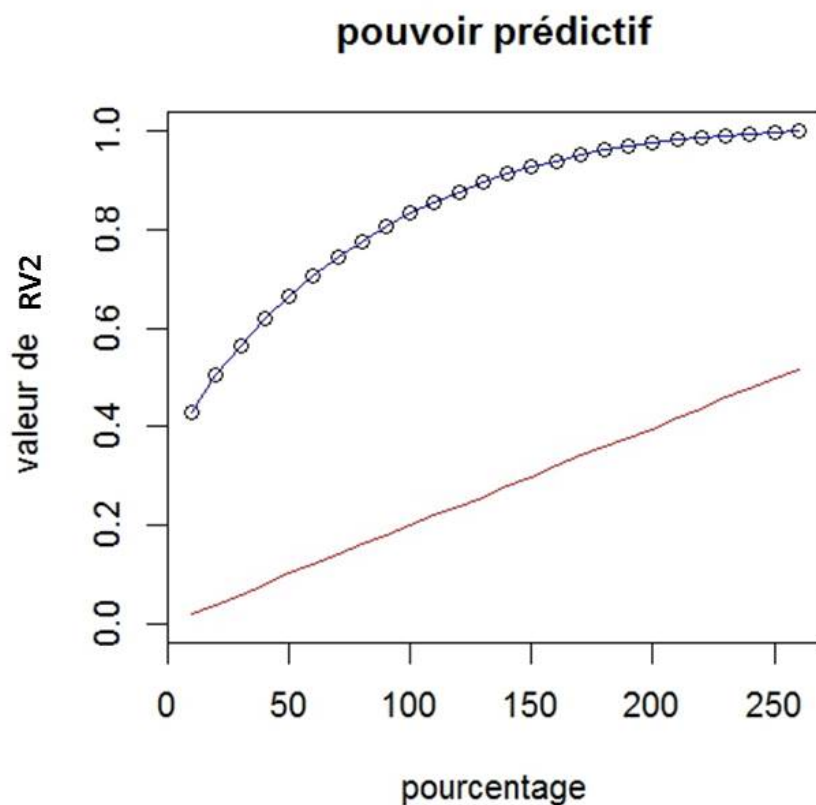


FIGURE 8 – Pouvoir prédictif du modèle prédit contre des facteurs aléatoires

Regardons également la différence entre le pouvoir prédictif des facteurs du modèle et les facteurs aléatoires :

| <b>Rang</b>                                | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> | <b>10</b> | <b>11</b> | <b>12</b> | <b>13</b> |
|--|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Matrice des composantes principales</b> | 42,72%   | 50,38%   | 56,54%   | 61,86%   | 66,50%   | 70,63%   | 74,36%   | 77,69%   | 80,68%   | 83,33%    | 85,70%    | 87,81%    | 89,67%    |
| <b>Matrice aléatoire</b>                   | 1,98%    | 3,79%    | 5,71%    | 7,90%    | 10,33%   | 12,15%   | 13,99%   | 16,33%   | 18,05%   | 19,93%    | 22,07%    | 23,72%    | 25,60%    |
| <b>Différence</b>                          | 40,74%   | 46,59%   | 50,83%   | 53,96%   | 56,16%   | 58,47%   | 60,37%   | 61,36%   | 62,64%   | 63,40%    | 63,63%    | 64,09%    | 64,07%    |

| <b>Rang</b>                                | <b>14</b> | <b>15</b> | <b>16</b> | <b>17</b> | <b>18</b> | <b>19</b> | <b>20</b> | <b>21</b> | <b>22</b> | <b>23</b> | <b>24</b> | <b>25</b> | <b>26</b> |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Matrice des composantes principales</b> | 91,31%    | 92,76%    | 94,05%    | 95,19%    | 96,17%    | 97,01%    | 97,74%    | 98,34%    | 98,84%    | 99,25%    | 99,58%    | 99,83%    | 100,00%   |
| <b>Matrice aléatoire</b>                   | 27,79%    | 29,83%    | 32,12%    | 34,16%    | 36,11%    | 37,66%    | 39,33%    | 41,77%    | 43,74%    | 45,87%    | 47,71%    | 49,72%    | 51,51%    |
| <b>Différence</b>                          | 63,52%    | 62,93%    | 61,92%    | 61,03%    | 60,06%    | 59,36%    | 58,41%    | 56,56%    | 55,10%    | 53,38%    | 51,87%    | 50,11%    | 48,49%    |

FIGURE 9 – Différence entre le pouvoir prédictif des facteurs du modèle et les facteurs aléatoires

L'objectif du pouvoir prédictif est de faire ressortir ce que l'étude de la matrice des composantes principales des rendements normalisés apporte de plus que l'étude basée sur une matrice composée de vecteurs aléatoires dans l'explication des rendements normalisés.

On constate, dans notre étude, que la différence entre les deux coefficients liés à chaque type de données (composantes principales vs vecteurs aléatoires) est croissante jusqu'à un certain rang, puis elle décroît à partir de ce rang. Ce rang correspond au nombre de facteurs à partir duquel l'apport de facteurs supplémentaires est négligeable. On observe également que le pouvoir prédictif des composantes principales est systématiquement supérieur à celui des vecteurs aléatoires, ce qui traduit le fait qu'elles sont plus indiquées pour expliquer les rendements normalisés.

Étant donné que la différence entre les deux coefficients est toujours croissante jusqu'au 120<sup>ème</sup> rang, nous prenons le nombre de facteurs comme étant égal à 120. Donc à partir de 120 facteurs, on a un pouvoir explicatif suffisamment grand. L'apport de composantes principales supplémentaires est négligeable.

### 6.3 Les valeurs propres

Étant donné les explications présentées dans la partie théorique nous réalisons le tracé de la courbe des valeurs propres associées aux 120 vecteurs propres retenus. Ce tracé fait apparaître une courbe décroissante qui converge à partir d'un certain rang. Le rang retenu comme étant le rang de convergence de la courbe déterminera le nombre de facteurs systémiques. Voici la représentation des premières valeurs propres pour les ACP réalisées :

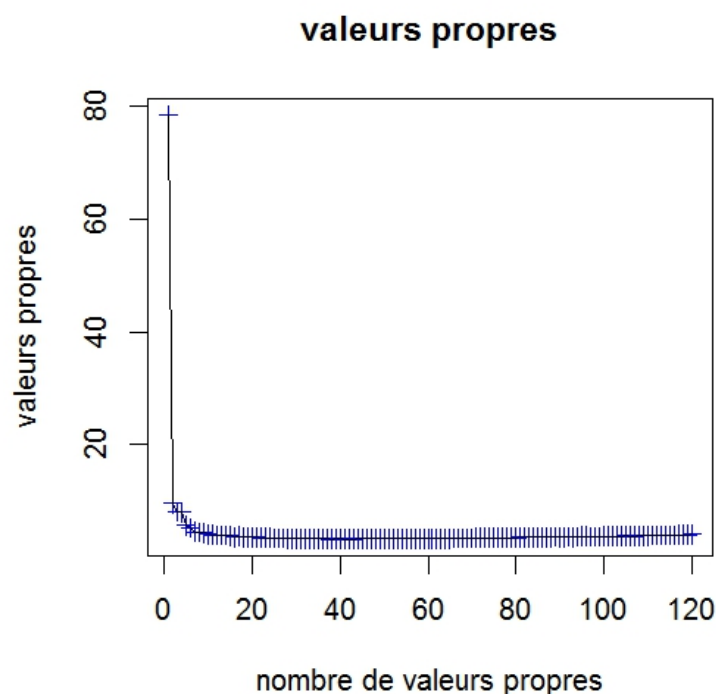


FIGURE 10 – Représentation des valeurs propres retenues sur  $[0; 120]$

On constate que les valeurs propres sont bien décroissantes. On peut constater que la courbe devient constante lorsque le nombre de valeurs propres augmente. Sur la figure, nous constatons qu'elle devient plus particulièrement constante pour les 30 valeurs propres. Nous allons donc récupérer les 30 premières composantes principales c'est à dire 30 facteurs systémiques, et donc notre  $K$  de départ est égale à 30 c'est à dire que le nombre de facteurs explicatifs est égal à 30.

## 6.4 La corrélation

En appliquant l'étude théorique démontrée précédemment, il nous est alors possible de déterminer la matrice de corrélation pour l'ensemble des entreprises.

Pour vérifier que les corrélations obtenues par le modèle sont cohérentes, nous allons comparer ces corrélations avec les corrélations empiriques pour l'ensemble des entreprises.

Comparaison de la corrélation par le modèle et de la corrélation empirique :

- Entreprise 1 vs toutes les autres entreprises :

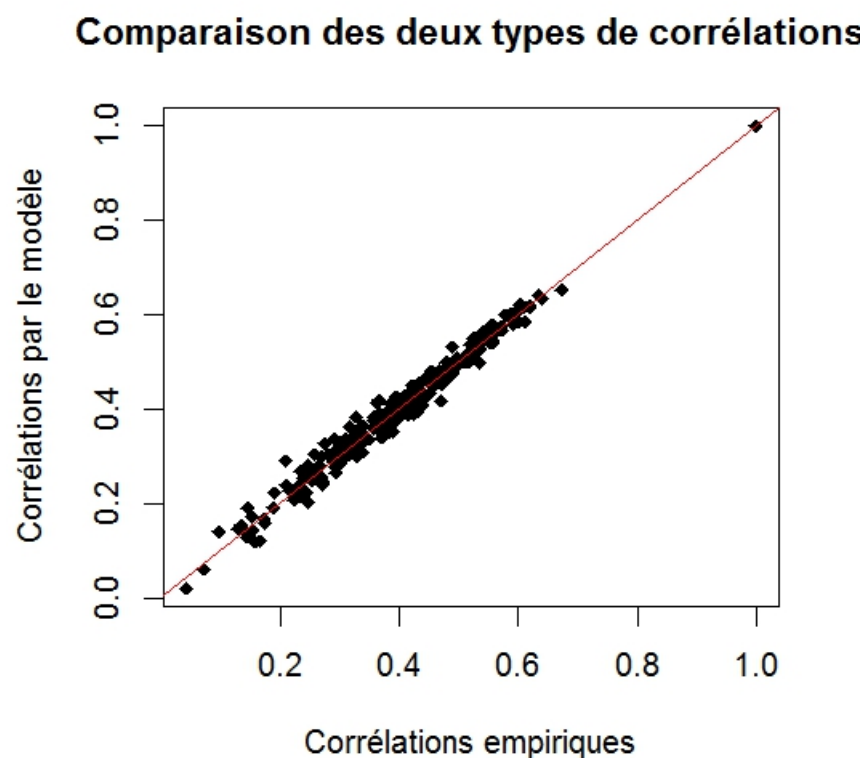


FIGURE 11 – Comparaison des corrélations du modèle vs corrélations empiriques

- Entreprise 20 vs toutes les autres entreprises :

### Comparaison des deux types de corrélations

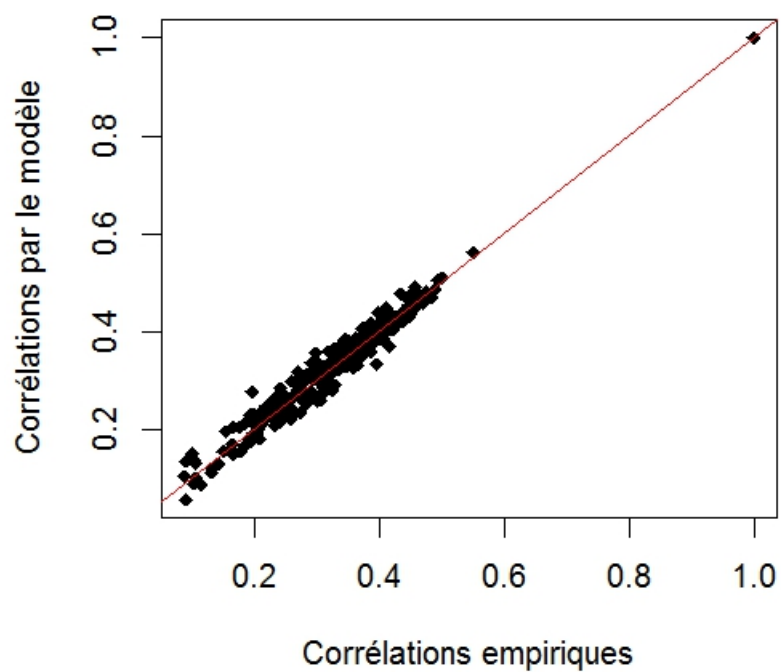


FIGURE 12 – Comparaison des corrélations du modèle vs corrélations empiriques



- Toutes les entreprises vs toutes les entreprises :

### Comparaison des deux types de corrélations

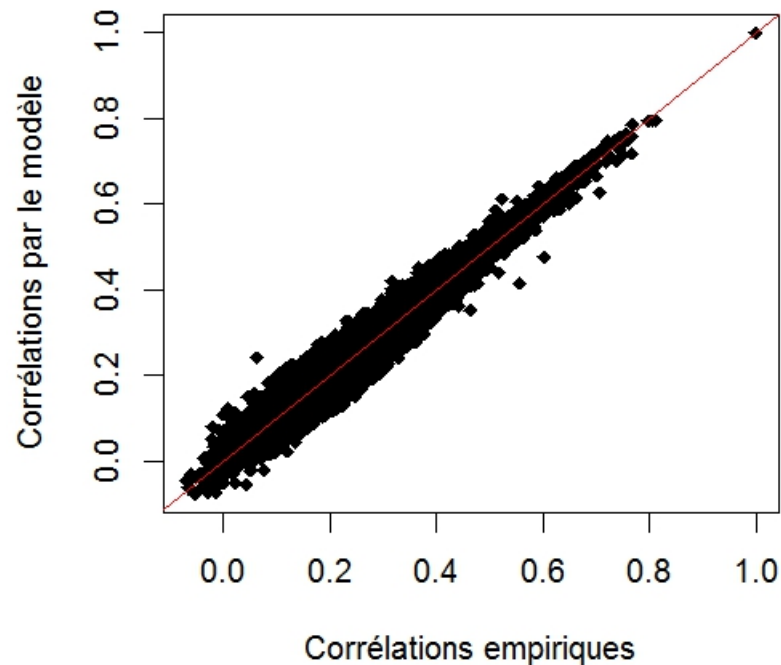


FIGURE 13 – Comparaison des corrélations du modèle vs corrélations empiriques

A l'aide des graphes ci-dessous, nous pouvons remarquer que la corrélation empirique et la corrélation par le modèle sont très proches. En effet, en traçant une droite d'équation  $y = x$ , nous remarquons que l'ensemble des points suivent cette droite. Ceci signifie donc que la corrélation empirique et la corrélation par le modèle sont assez proches. Nous pouvons donc dire que la matrice de corrélation obtenue par le modèle est viable.

Pour mieux appréhender les résultats de la matrice de corrélation, nous allons appliquer cette théorie à un ensemble d'entreprises dont nous détenons les informations, suivant différents axes d'étude. Le premier axe consistera à scinder le portefeuille par région, ensuite par pays et enfin par secteur d'activité.

## 6.5 Analyse de l'étude

### 6.5.1 Analyse de l'étude par région

La première étude consiste à regarder les corrélations des entreprises par région. La répartition des entreprises selon les régions est représentée sous cette forme :

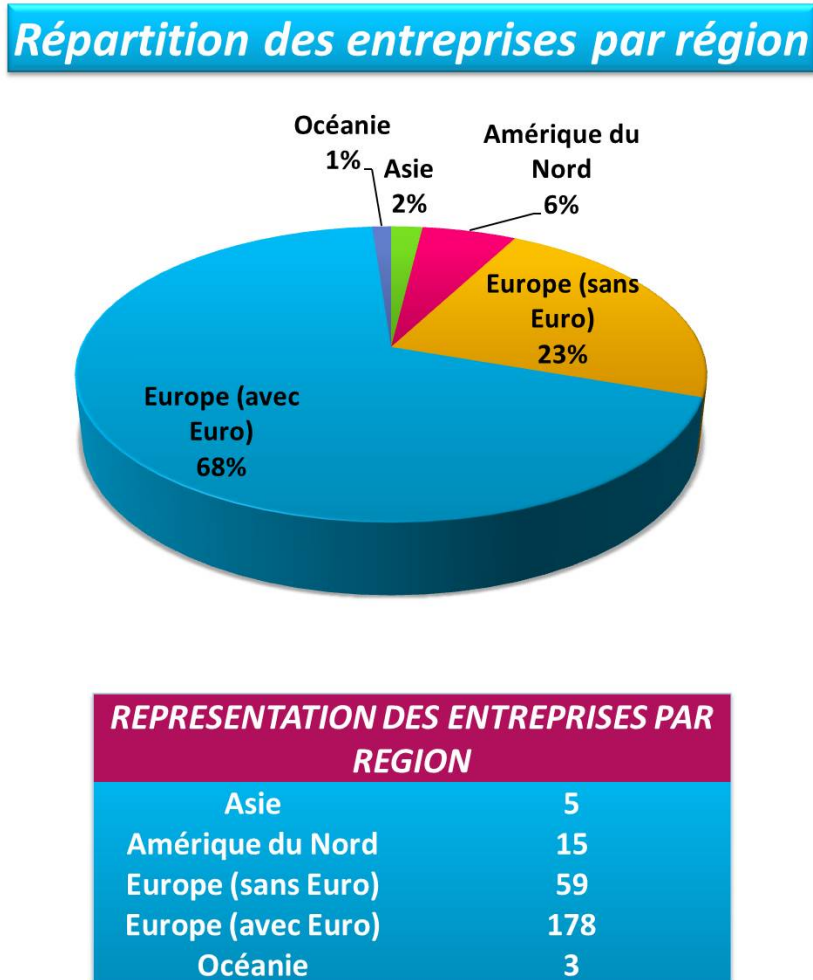


FIGURE 14 – Répartition des entreprises par région

L'Europe composée des pays ayant pour devise l'Euro, représente la plus grande part de répartition avec 178 entreprises (soit 68% du total), suivie par l'Europe composée de pays européens qui ne possèdent pas pour devise l'Euro avec 59 entreprises (soit 23% du total). L'Asie est représentée avec 5 entreprises (environ 2% du total), l'Amérique du Nord est représentée avec 15 entreprises (soit environ 6% du total) et enfin l'Océanie est représentée avec 3 entreprises (soit 1% du total).

Dans notre étude, l'Amérique du Nord est représentée avec les États-Unis et le Canada. L'Asie est représentée par le Japon et la Corée du Sud. L'Océanie est représentée par l'Australie. L'Europe sans Euro est composée par le Royaume-Uni, la Suisse et la Roumanie. Enfin, l'Europe Euro est composée de la France, l'Allemagne, l'Autriche, la Belgique, le Danemark, l'Espagne, la Finlande, la Grèce, l'Irlande, l'Italie, le Luxembourg, la Norvège, les Pays-Bas et de la Suède.

### 6.5.2 Analyse de l'étude par pays

La deuxième étude consiste à regarder les corrélations des entreprises au sein d'un même pays. La répartition des entreprises selon les pays est représentée sous cette forme :

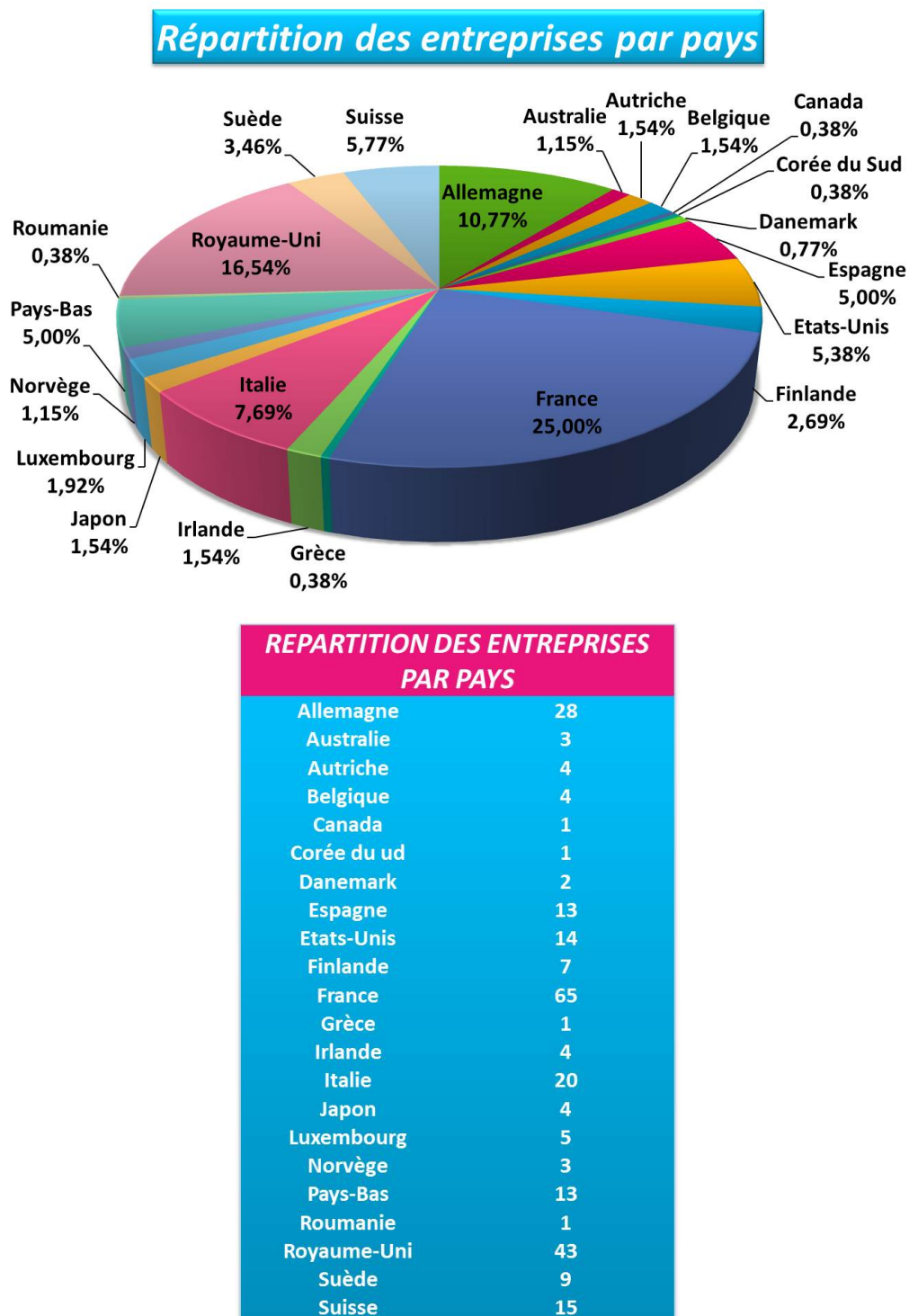


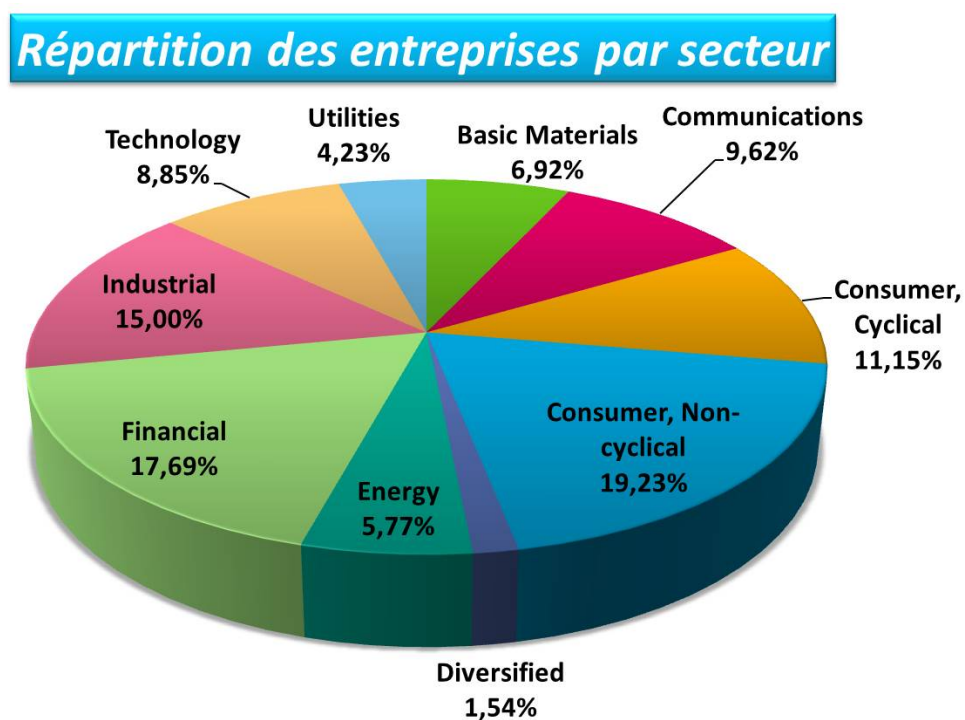
FIGURE 15 – Répartition des entreprises par pays

Nous pouvons constater que 22 pays sont représentés dans l'étude. Les pays présents dans l'étude sont l'Allemagne, l'Australie, l'Autriche, la Belgique, le Canada, la Corée du Sud, le Danemark, l'Espagne, les États-Unis, la Finlande, la France, la Grèce, l'Irlande, l'Italie, le Japon, le Luxembourg, la Norvège, les Pays-Bas, la Roumanie, le Royaume-Uni, la Suède et la Suisse.

La France est le pays le plus représenté avec 25% des entreprises (correspondant à 65 entreprises sur 260) suivie par le Royaume-Uni avec 16% des entreprises (correspondant à 43 entreprises sur 260). Le Canada, la Corée du Sud, la Grèce, la Roumanie sont, quant à eux, les pays les moins représentés puisqu'ils représentent chacun 0,38% des entreprises (ils possèdent chacun 1 entreprise sur les 260).

### 6.5.3 Analyse de l'étude par secteur

La première étude consiste à regarder les corrélations des entreprises pour chaque secteur. La répartition des entreprises selon les secteurs est représentée sous cette forme :



| <b>REPARTITION DES ENTREPRISES<br/>PAR SECTEUR</b> |    |
|--|----|
| Basic Materials                                    | 18 |
| Communications                                     | 25 |
| Consumer, Cyclical                                 | 29 |
| Consumer, Non-cyclical                             | 50 |
| Diversified  | 4  |
| Energy   | 15 |
| Financial  | 46 |
| Industrial   | 39 |
| Technology   | 23 |
| Utilities  | 11 |

FIGURE 16 – Répartition des entreprises par secteur

Nous disposons de dix secteurs : Basic Materials, Communications, Consumer-Cyclical, Consumer-Non-Cyclical, Diversified, Energy, Financial, Industrial, Technology et Utilities.

Voici des exemples de groupe des secteurs :

- **secteur de la technologie (technology)** : semi-conducteurs, ordinateurs, informatique,...
- **secteur industriel (industrial)** : électronique, aérospatial, défense, ingénierie, construction, matériels de construction, transport
- **secteur de la finance (financial)** : banque, assurance
- **secteur de l'énergie (energy)** : pétrole
- **secteur diversifié (diversified)** : édition/information, énergie/pétrochimie/agroalimentaire, sociétés de portefeuille/divers
- **secteur de la communication (communication)** : télécommunications, Internet, média, publicité
- **secteur de la consommation cyclique (consumer-cyclical)** : divertissement, constructeurs automobile, vente, compagnies aériennes,...
- **secteur de la consommation non-cyclique (consumer non-cyclical)** : alimentation, boissons, produits pharmaceutiques, services commerciaux, agriculture,...
- **secteur des matériaux de base (basic materials)** : chimie, exploitation minière, fer, acier, produits forestiers, papier
- **secteur utilitaire (utilities)** : électricité, gaz, eau

Les consommations non-cycliques représentent la plus grande part des secteurs avec 19%, soit 50 entreprises. Le deuxième secteur le plus représenté correspond au secteur financier avec 18% soit 46 entreprises. Le secteur diversifié est le secteur le moins représenté avec 1,54% du total des entreprises, soit seulement 4 entreprises.

## 6.6 Comparaison des corrélations entre les périodes

### 6.6.1 Comparaison des corrélations entre les périodes région par région

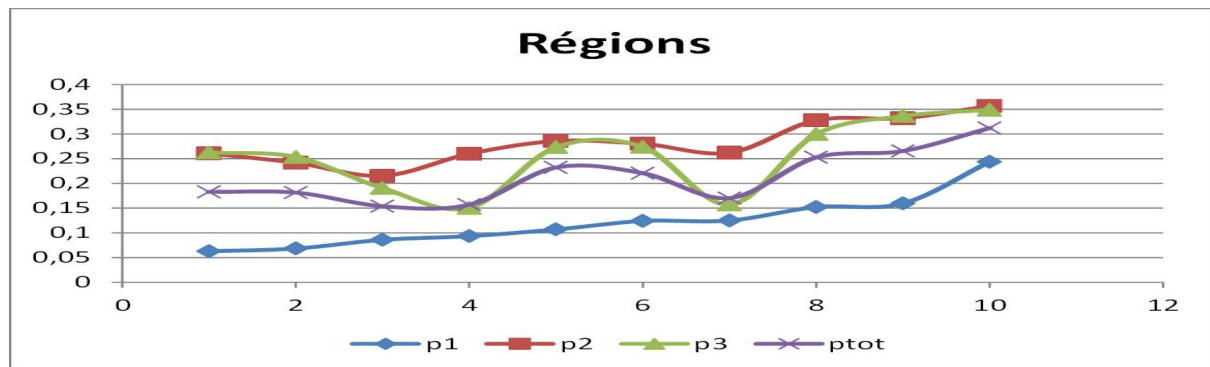


FIGURE 17 – Comparaison des périodes entre les régions

En période de faible agitation des marchés, les corrélations entre pays oscillent globalement entre 5% et 25%, ce qui permet un quatrième niveau de diversification. Trois régions (Asie, Océanie, Amérique) sont représentées par 23 entreprises.

En période de forte instabilité financière, les corrélations entre les différents régions augmentent. Ceci est certainement dû à un facteur systémique qui traduit l'inquiétude des investisseurs et à la mondialisation des mouvements des capitaux. Toutefois, le niveau de corrélation reste relativement limité puisqu'il oscille globalement entre 25% et 35%.

### 6.6.2 Comparaison des corrélations entre les périodes pays par pays

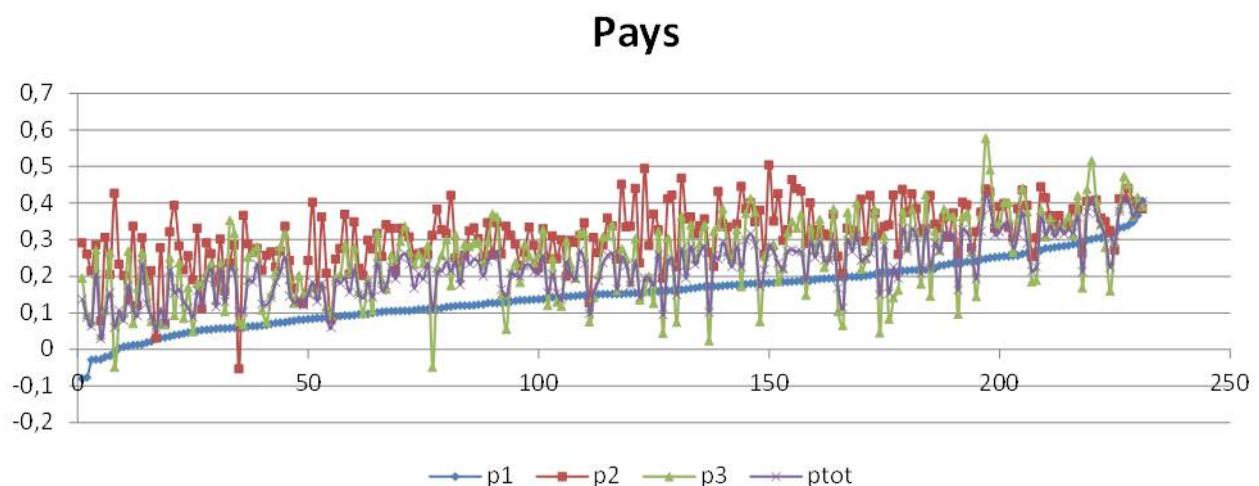


FIGURE 18 – Comparaison des périodes entre les pays



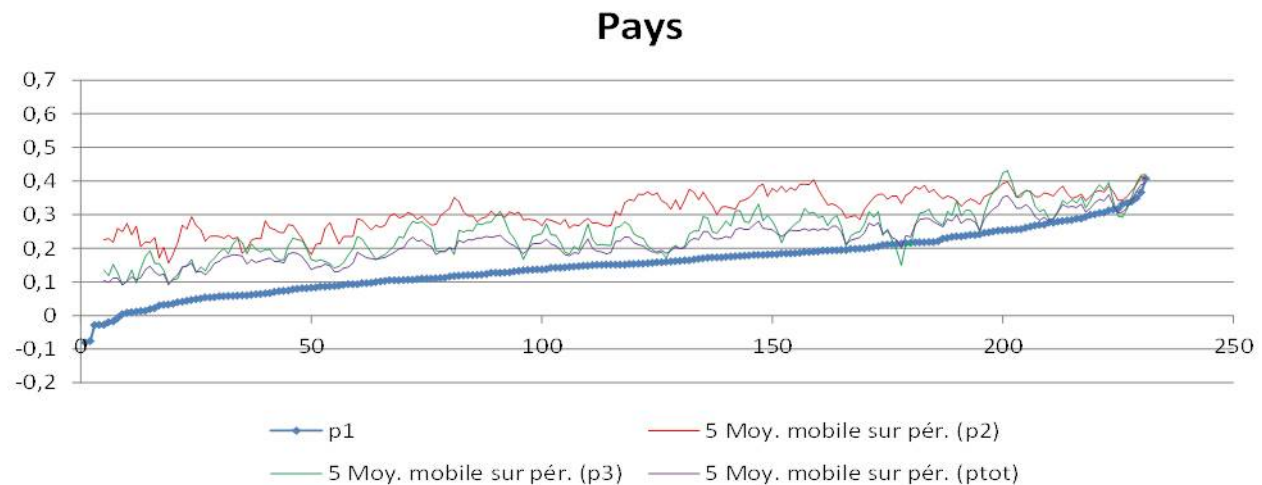


FIGURE 19 – Comparaison des périodes entre les pays avec moyenne mobile

En période de faible agitation des marchés, les corrélations entre pays oscillent globalement entre 5% et 25%, ce qui permet un troisième niveau de diversification. Toutefois les pays les plus représentés sont les pays de l'Europe.

En période de forte instabilité financière, les corrélations entre les différents pays augmentent. Ceci est également dû à un facteur systémique qui traduit l'inquiétude des investisseurs d'une part, et d'autre part les liaisons économiques entre les différents pays. Le niveau de corrélation reste relativement limité puisqu'il oscille globalement entre 20% et 40%.

### 6.6.3 Comparaison des corrélations entre les périodes secteur par secteur

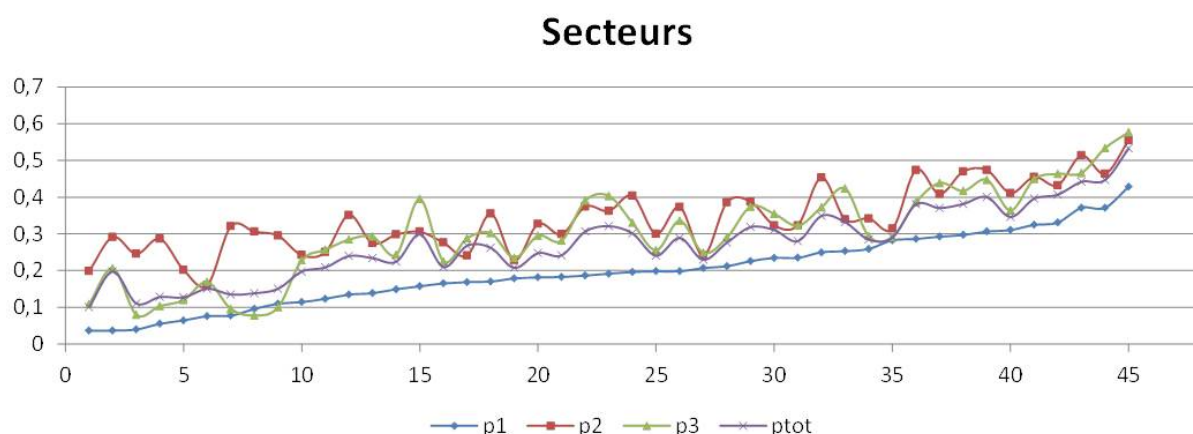


FIGURE 20 – Comparaison des périodes entre les secteurs

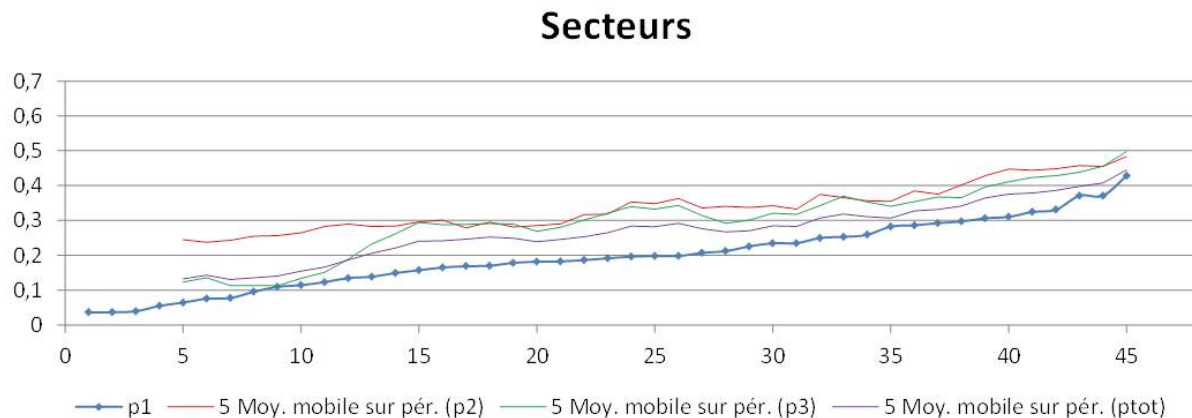


FIGURE 21 – Comparaison des périodes entre les secteurs avec moyenne mobile

On observe qu'en période de forte instabilité financière, les corrélations entre les différents secteurs d'activité augmentent. Ceci est certainement dû à un facteur systémique qui traduit l'inquiétude des investisseurs et qui se manifeste essentiellement par une baisse de la valeur de marché des entreprises, indépendamment de leurs caractéristiques fondamentales. Toutefois, le niveau de corrélation reste relativement limité puisqu'il oscille globalement entre 25% et 50%.

En période de faible agitation des marchés, les corrélations entre secteur oscillent globalement entre 15% et 40%, ce qui permet un deuxième niveau de diversification au niveau des secteurs d'activité.



#### 6.6.4 Comparaison des corrélations entre les périodes pour chacun des secteurs par entreprise

Voici la comparaison des corrélations pour les trois périodes pour chaque secteur.

- **basic materials :**

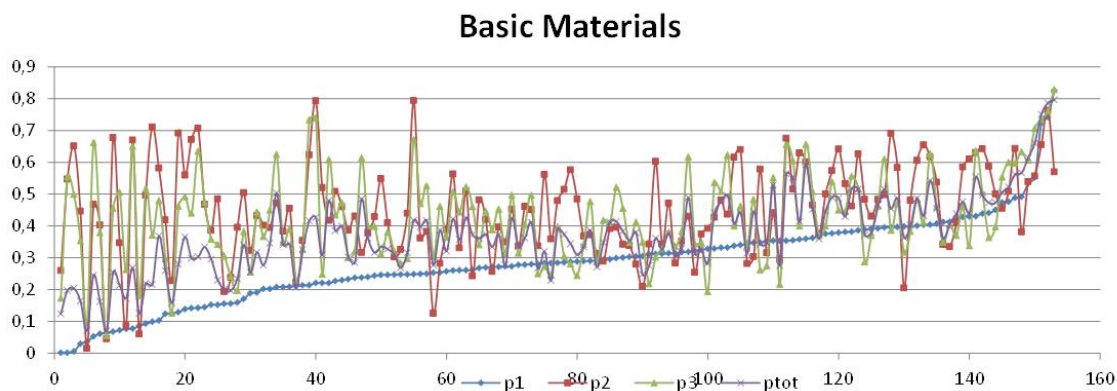


FIGURE 22 – Courbes des corrélations pour le secteur BASIC MATERIALS

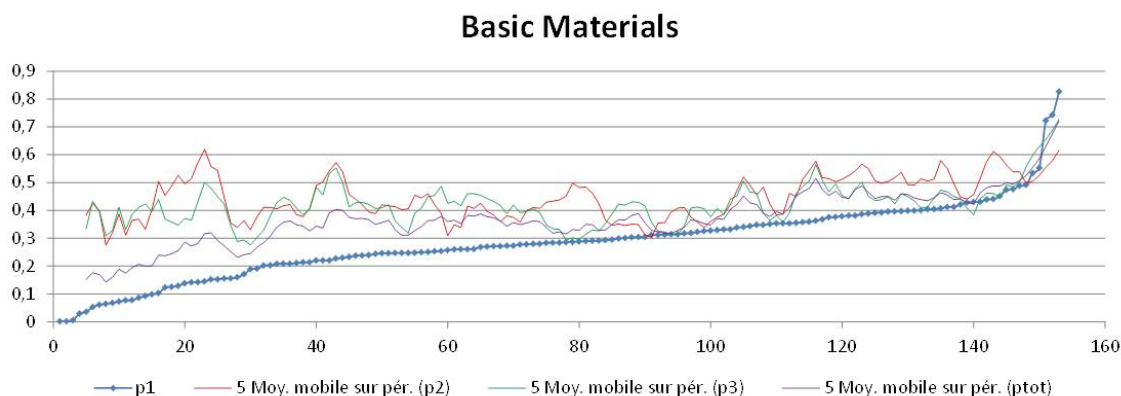


FIGURE 23 – Courbes des corrélations pour le secteur BASIC MATERIALS avec moyenne mobile

• **energy :**

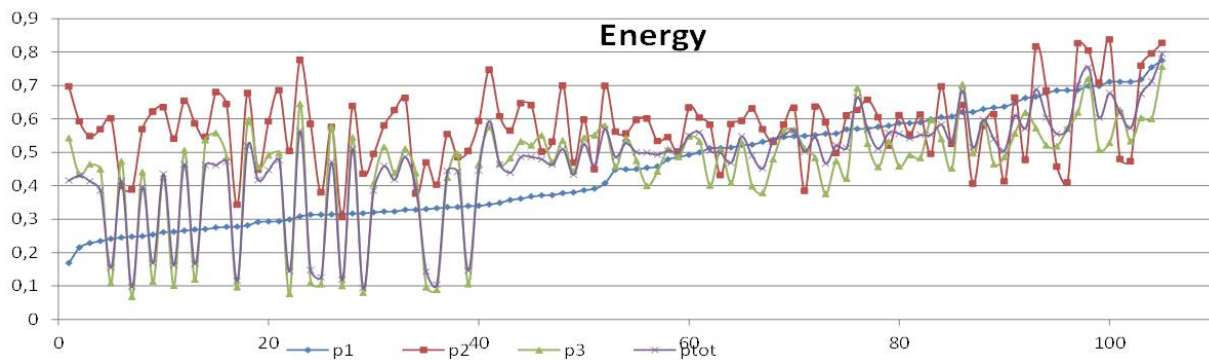


FIGURE 24 – Courbes des corrélations pour le secteur ENERGY

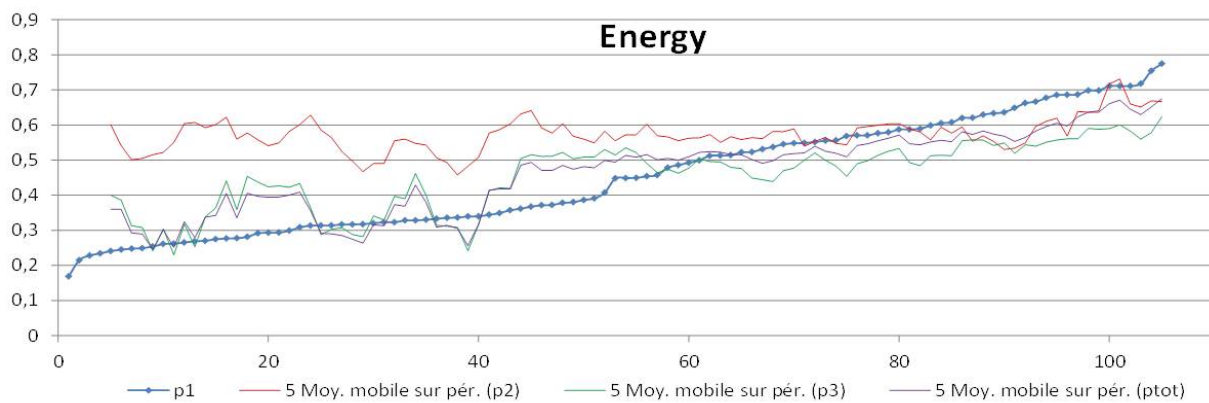


FIGURE 25 – Courbes des corrélations pour le secteur ENERGY avec moyenne mobile

• **utilities :**

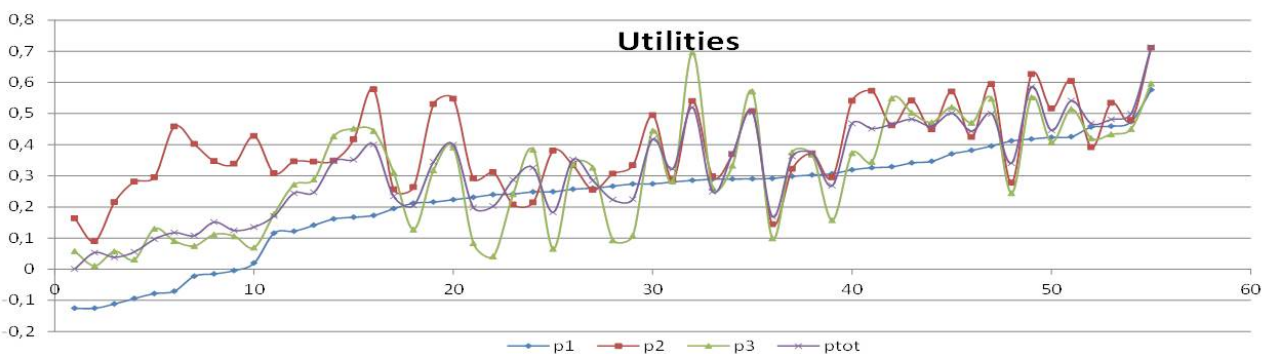


FIGURE 26 – Courbes des corrélations pour le secteur UTILITIES

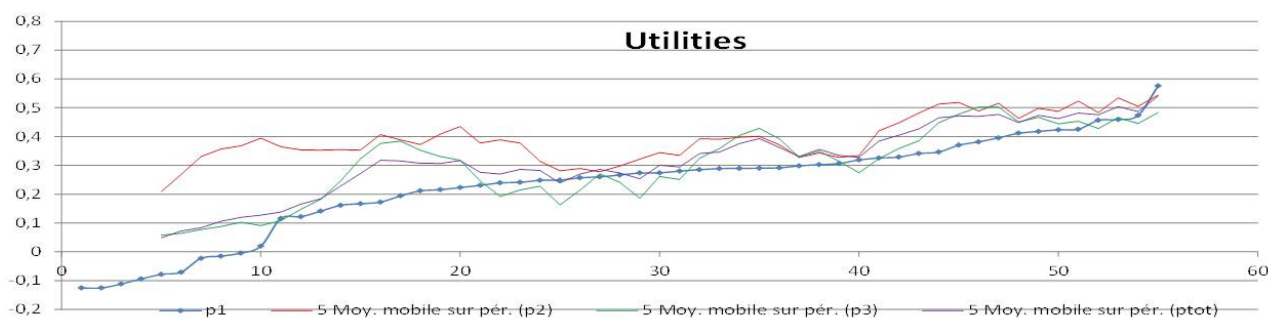


FIGURE 27 – Courbes des corrélations pour le secteur UTILITIES avec moyenne mobile

• **industrial :**

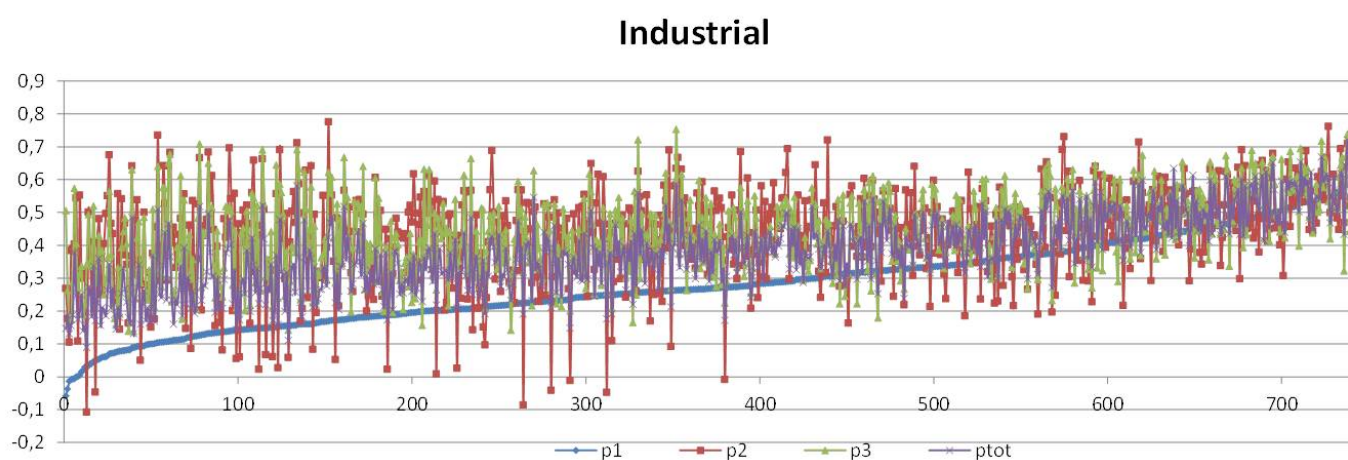


FIGURE 28 – Courbes des corrélations pour le secteur INDUSTRIAL

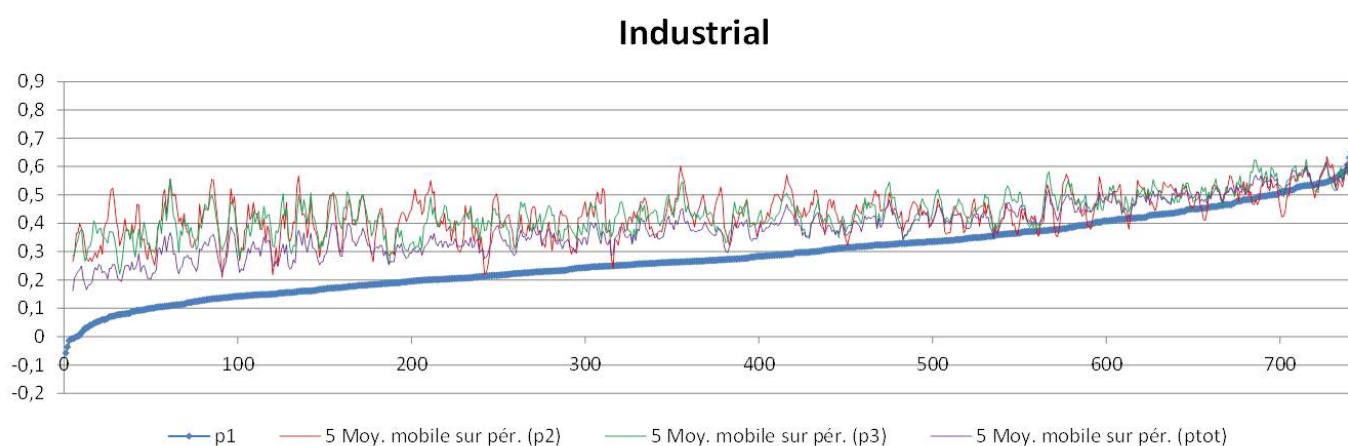


FIGURE 29 – Courbes des corrélations pour le secteur INDUSTRIAL avec moyenne mobile

• **technology :**

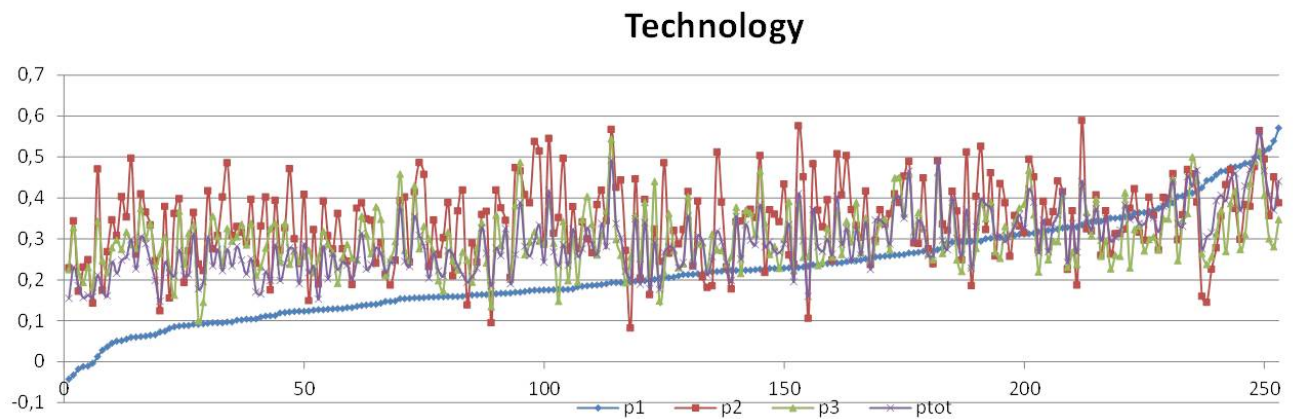


FIGURE 30 – Courbes des corrélations pour le secteur TECHNOLOGY

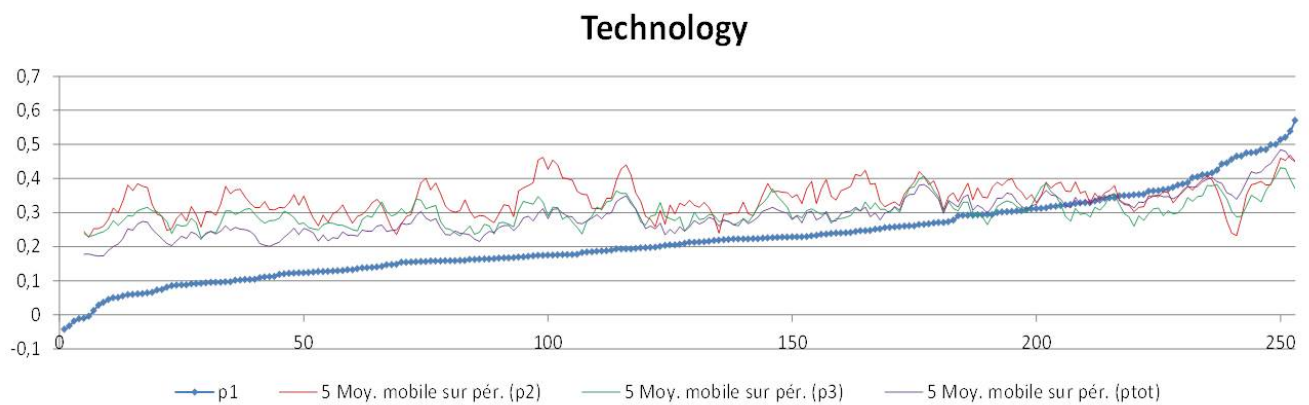


FIGURE 31 – Courbes des corrélations pour le secteur TECHNOLOGY avec moyenne mobile

• **financial :**

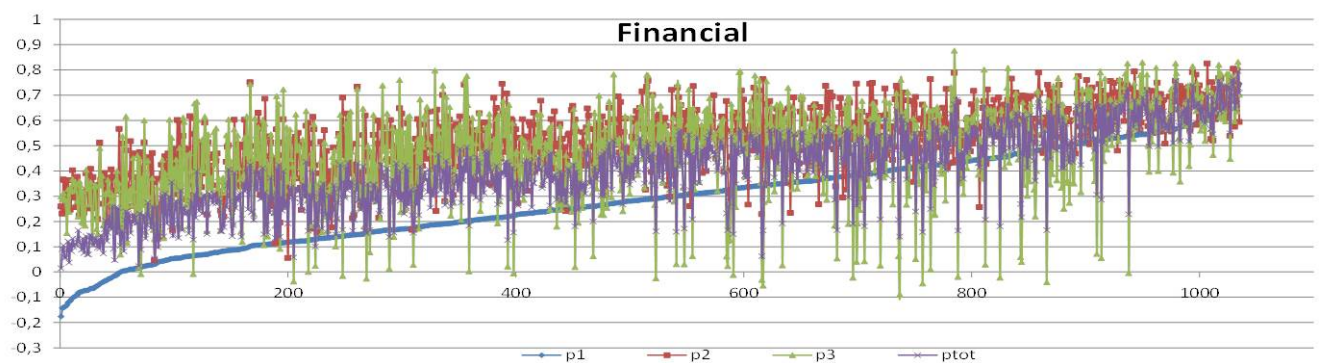


FIGURE 32 – Courbes des corrélations pour le secteur FINANCIAL



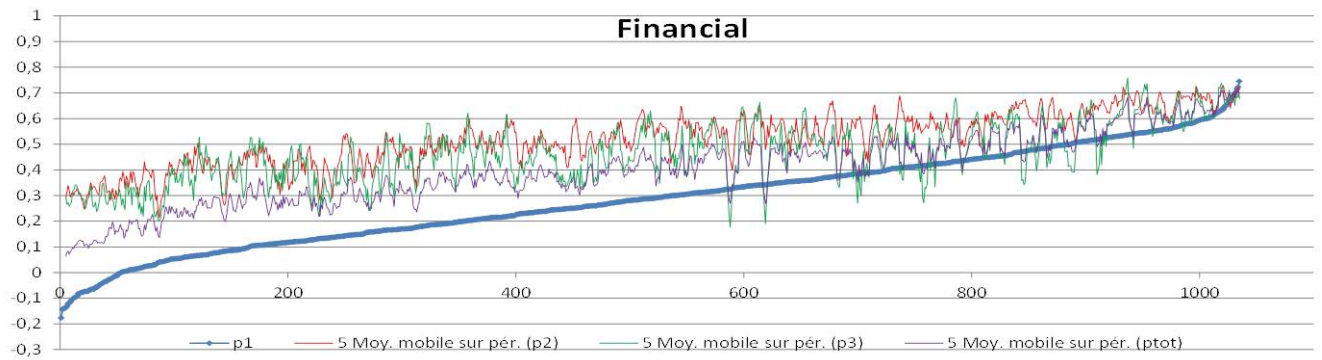


FIGURE 33 – Courbes des corrélations pour le secteur FINANCIAL avec moyenne mobile

• **communication :**

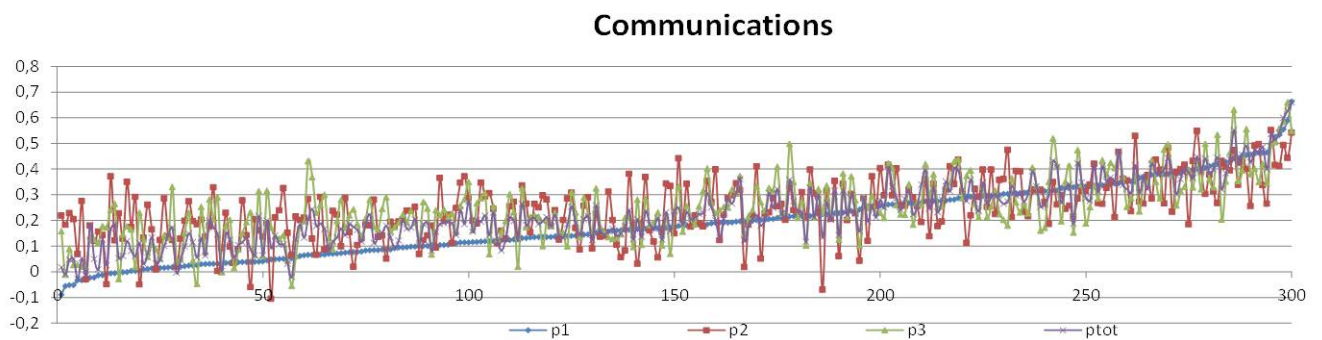


FIGURE 34 – Courbes des corrélations pour le secteur COMMUNICATIONS

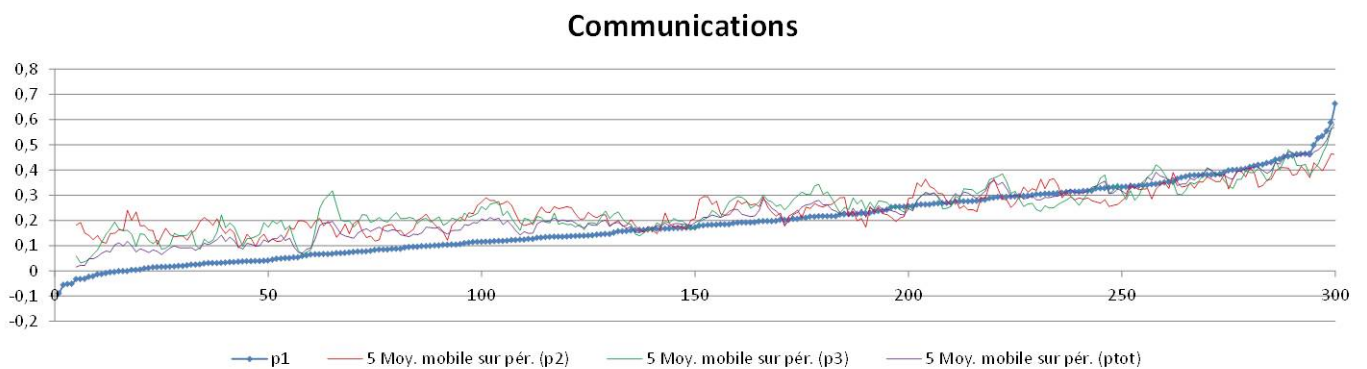


FIGURE 35 – Courbes des corrélations pour le secteur COMMUNICATIONS avec moyenne mobile

• **consumer cyclical :**

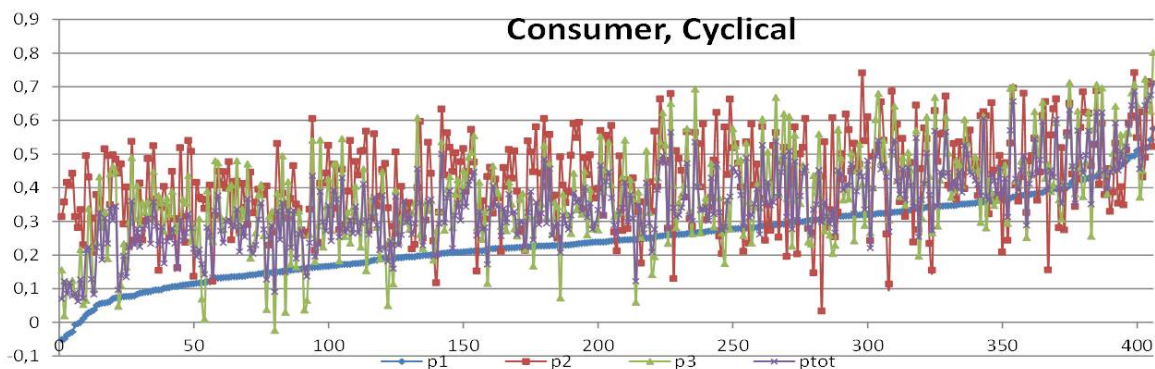


FIGURE 36 – Courbes des corrélations pour le secteur CONSUMER CYCLICAL

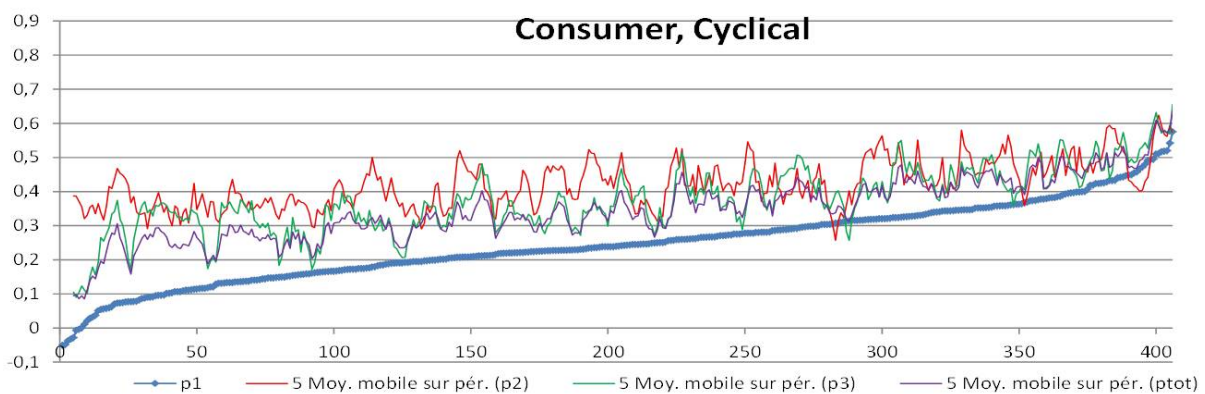


FIGURE 37 – Courbes des corrélations pour le secteur CONSUMER CYCLICAL avec moyenne mobile

• **consumer non-cyclical :**

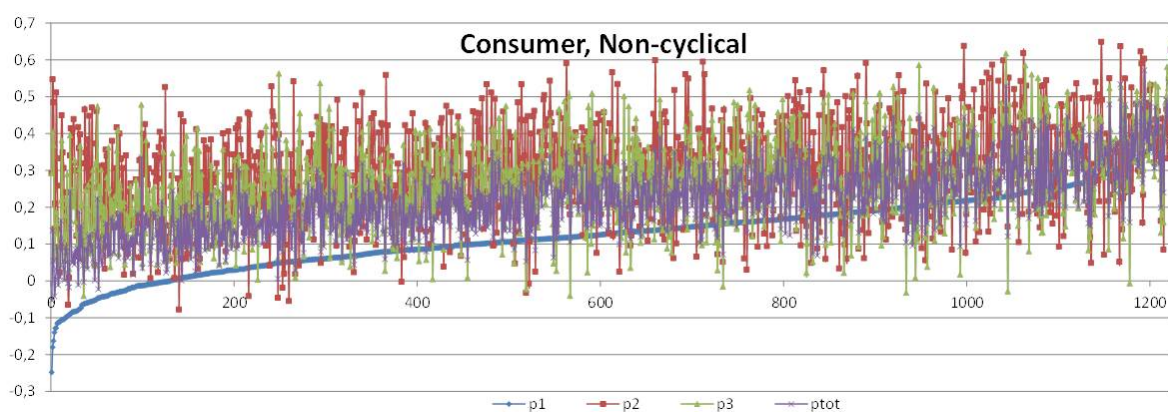


FIGURE 38 – Courbes des corrélations pour le secteur CONSUMER NON-CYCLICAL

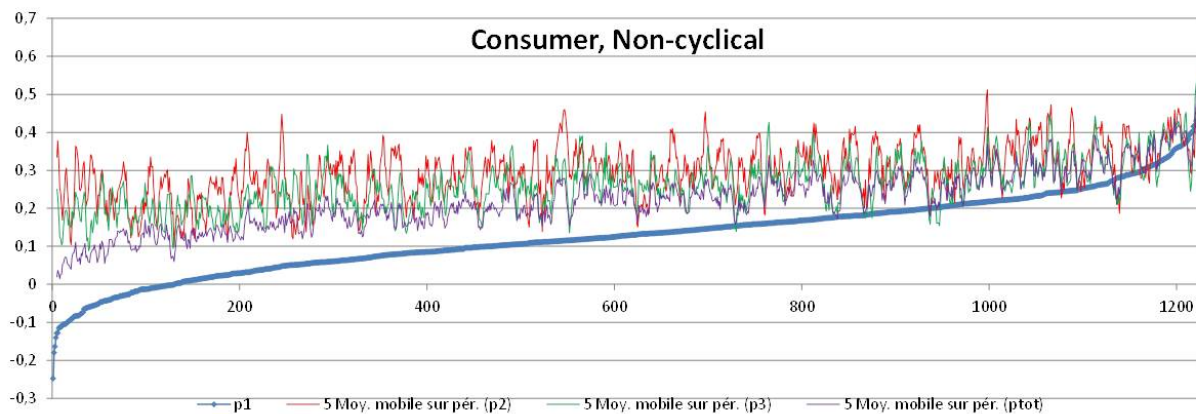


FIGURE 39 – Courbes des corrélations pour le secteur CONSUMER NON-CYCLICAL avec moyenne mobile

- **diversified :**

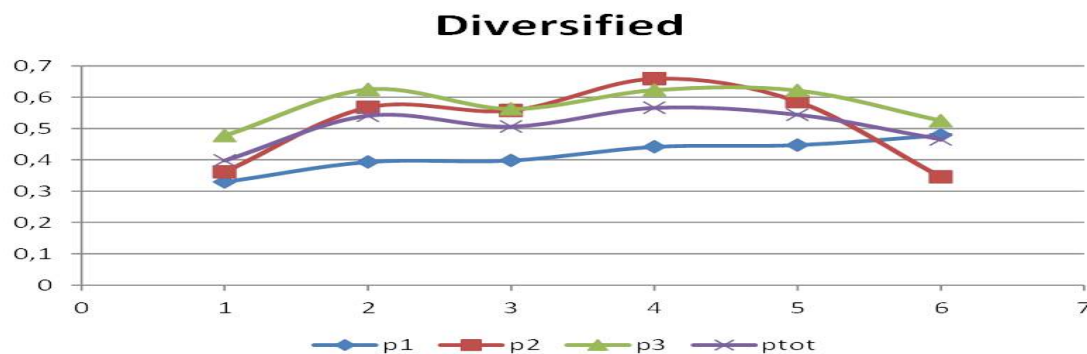


FIGURE 40 – Courbes des corrélations pour le secteur diversified

Dans notre cas, la période 1 correspond à la période calme, la période 2 représente la période de crise, et la période 3 correspond à la période juste après la crise, plus calme que la période 2.

On constate alors que dans la plupart des représentations, les corrélations de la période 1 sont en général plus faibles que les corrélations de la période 2. On remarque également que les corrélations de la période 3 sont en général plus faibles que les corrélations de la période 2, mais supérieures aux corrélations de la période 1.

Par conséquent, on pourrait émettre l'hypothèse que la crise a pour conséquence que les entreprises soient plus corrélées entre elles qu'au cours de la période plus calme (période 1). La crise disparaissant, les entreprises seraient alors redevenues moins corrélées entre elles comme à la première période, mais la crise étant encore légèrement présente, les corrélations entre entreprises restent plus importantes qu'au cours de la première période (période calme).

Le secteur « diversified » comportant peu de corrélations, et donc peu d'informations, il ne nous est pas possible de faire des conclusions pertinentes.

Après études des corrélations au sein des entreprises d'un même secteur d'activité, il apparaît que nous pouvons les regrouper en trois catégories suite à l'étude.

- **Catégorie 1 : "Technology", "Consumer Non-Cyclical", "Communications"**

En période de forte instabilité financière, les corrélations entre les entreprises du secteur augmentent mais restent relativement limitées, puisqu'elles restent inférieures à 50%.

En période de faible agitation des marchés, les corrélations entre les entreprises du secteur sont encore plus faibles, puisqu'elles sont souvent inférieures à 30%, ce qui signifie qu'un premier niveau de diversification peut avoir lieu au niveau du choix des entreprises retenues pour investissement au sein de ce secteur.

- **Catégorie 2 : "Basic Materials", "Consumer Cyclical", "Industrial"**

En période de forte instabilité financière, les corrélations entre les entreprises du secteur augmentent et deviennent assez fortes, puis qu'elles oscillent globalement entre 30% et 55%.

En période de faible agitation des marchés, les corrélations entre les entreprises du secteur oscillent globalement entre 15% et 45%.

- **Catégorie 3 : "Financial"**

Il s'agit du secteur au sein duquel les entreprises sont le plus fortement corrélées entre elles. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que ces entreprises sont quasiment interdépendantes au travers de leur mécanisme de fonctionnement sur les marchés financiers, qui consiste à se prêter quotidiennement des fonds afin de financer leur activité à court terme.

En période de forte instabilité financière, les corrélations entre les entreprises du secteur oscillent globalement entre 40% et 70%.

En période de faible agitation des marchés, les corrélations entre les entreprises du secteur oscillent globalement entre 10% et 50%.



## 7 Partie numérique - Étude du portefeuille

### 7.1 Présentation

Dans le cadre de l'étude du portefeuille de PRO BTP, nous sommes amenés à étudier les actions et les obligations présentes dans ce portefeuille. Bien sûr, certaines entreprises ne figurent pas parmi les 260 entreprises de l'étude précédente. Mais ces 260 entreprises vont nous être très utiles, et nous allons voir pourquoi. L'étude portera, comme précédemment, sur la période totale et sur les trois périodes.

Cette partie présente la répartition entre les actions et les obligations.

Voici le portefeuille étudié. Il dispose de :

- 402 entreprises pour une valeur de marché de  $3021M$  €
- 62 entreprises communes entre actions et obligations pour une valeur de marché de  $870M$  €
- Représenté par les 260 entreprises pour une valeur de marché de  $1940M$  € (64%)
- Pour les 260 entreprises, PRO BTP Finance a fourni un historique sur 501 semaines pour la capitalisation boursière, la dette et la valeur d'une action.

Pour les actions cotées :

- 203 entreprises pour  $746M$  € de valeur de marché
- Représenté par 160 entreprises sur les 260 étudiées, pour  $453M$  € (60%)

Pour les obligations corporates :

- 261 entreprises pour  $2275M$  € de valeur de marché
- Représenté par 136 entreprises sur les 260 étudiées, pour  $1487M$  € (65%)

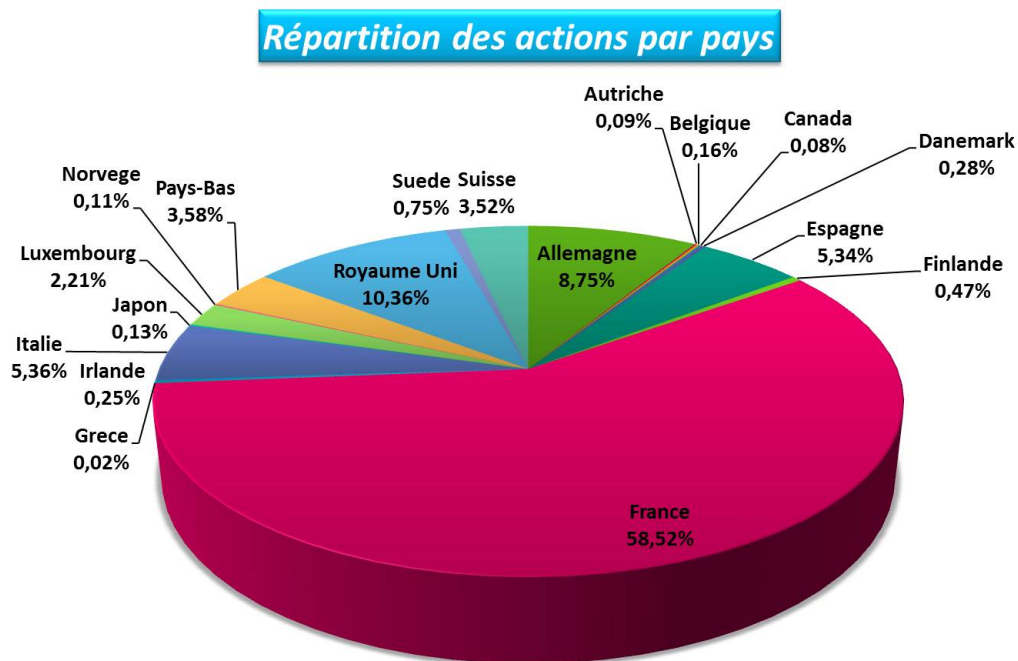
Nous allons donc utiliser les données disponibles (260 entreprises) et étendre l'étude à l'ensemble du portefeuille (402 entreprises).

### 7.2 Les données

#### 7.2.1 Présentation

Étudions tout d'abord l'ensemble du portefeuille de PRO BTP. Nous disposons alors d'un ensemble de portefeuilles d'actions et d'un ensemble de portefeuilles d'obligations.

Voici la représentation des différents pays dans le portefeuille actions par rapport à la valeur de marché de chaque entreprise :

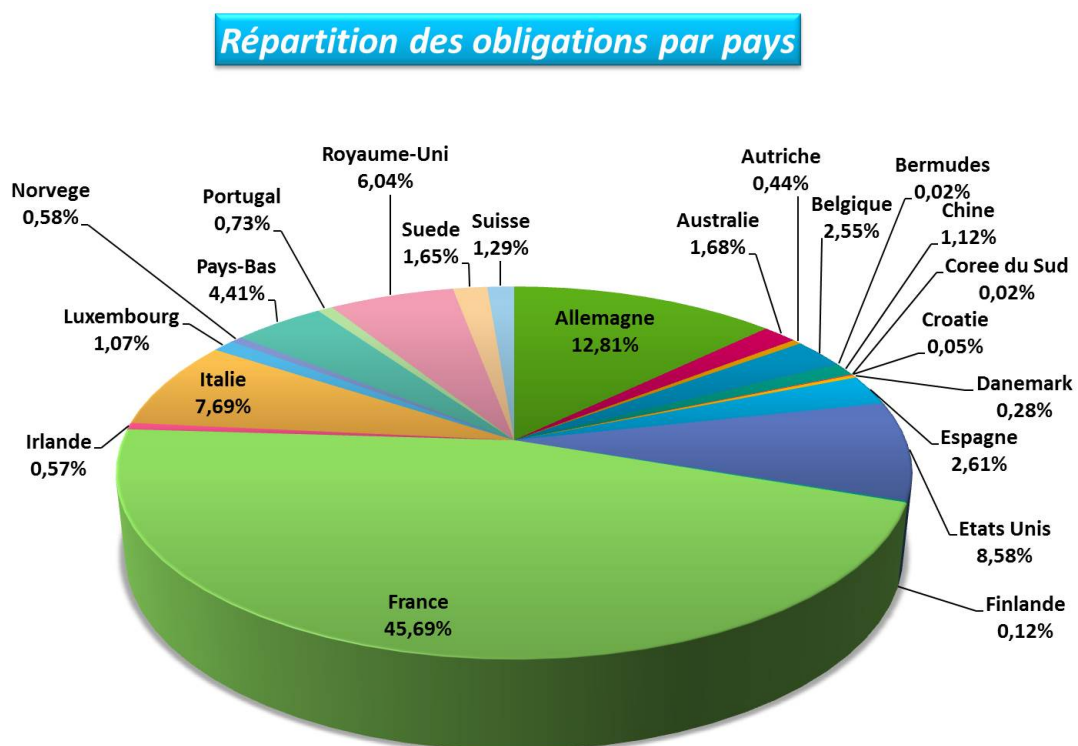


| REPARTITIONS DES ACTIONS PAR PAYS |                |
|-----------------------------------|----------------|
| ALLEMAGNE                         | 65 250 661,90  |
| AUTRICHE                          | 681 363,65     |
| BELGIQUE                          | 1 230 110,45   |
| CANADA                            | 588 619,27     |
| DANEMARK                          | 2 103 298,33   |
| ESPAGNE                           | 39 808 175,04  |
| FINLANDE                          | 3 507 451,89   |
| FRANCE                            | 436 537 404,93 |
| GRECE                             | 145 195,43     |
| IRLANDE                           | 1 885 820,63   |
| ITALIE                            | 40 002 010,94  |
| JAPON                             | 1 004 959,46   |
| LUXEMBOURG                        | 16 518 053,42  |
| NORVEGE                           | 794 235,00     |
| PAYS-BAS                          | 26 687 140,07  |
| ROYAUME UNI                       | 77 305 315,50  |
| SUEDE                             | 5 625 577,86   |
| SUISSE                            | 26 283 543,47  |
| SOMME                             | 745 958 937,22 |

FIGURE 41 – Représentation de la répartition des actions par pays

En ce qui concerne les actions, 18 pays sont présentés. Les pays les plus présents sont la France avec 58,52%, suivie par le Royaume-Uni avec 10,36% et l'Allemagne avec 8,75%. Les pays les moins présents sont la Grèce avec seulement 0,02% et le Canada avec 0,08%.

Voici la représentation des différents pays dans le portefeuille obligations par rapport à la valeur de marché de chaque entreprise :



| REPARTITIONS DES OBLIGATIONS PAR PAYS |                  |
|---------------------------------------|------------------|
| ALLEMAGNE                             | 288 060 934,98   |
| AUSTRALIE                             | 38 199 086,26    |
| AUTRICHE                              | 9 925 367,52     |
| BELGIQUE                              | 58 086 265,41    |
| BERMUDES                              | 498 144,52       |
| CHINE                                 | 25 403 908,05    |
| COREE REP.SUD                         | 505 025,34       |
| CROATIE                               | 1 165 589,82     |
| DANEMARK                              | 6 329 678,76     |
| ESPAGNE                               | 59 432 072,81    |
| ETATS UNIS                            | 195 258 930,79   |
| FINLANDE                              | 2 723 755,47     |
| FRANCE                                | 1 023 235 228,34 |
| IRLANDE                               | 13 073 268,49    |
| ITALIE                                | 175 009 050,67   |
| LUXEMBOURG                            | 40 632 243,09    |
| NORVEGE                               | 13 243 467,13    |
| Pays-Bas                              | 100 309 278,27   |
| Portugal                              | 16 513 678,94    |
| ROYAUME UNI                           | 137 372 783,18   |
| SUEDE                                 | 37 505 216,83    |
| SUISSE                                | 32 879 211,23    |
| SOMME                                 | 2 275 362 185,89 |

FIGURE 42 – Représentation de la répartition des obligations par pays

Pour les obligations, 22 pays sont représentés. Les pays les plus représentés sont la France avec 45,69%, suivie par l'Allemagne avec 12,81% et les États-Unis avec 8,58%. Les pays les moins présents sont les Bermudes avec 0,02% et la Corée du Sud avec 0,02%.

### 7.2.2 Objectifs

Nous allons calculer les corrélations :

- Région par région
- Pays par pays
- Secteur par secteur
- Entre portefeuille des actions et des obligations

## 7.3 Les rendements des portefeuilles

### 7.3.1 Présentation

Les études des corrélations vont porter sur le portefeuille "actions", et sur le portefeuille "obligataire". Certaines entreprises parmi celles dont on détient des titres financiers (actions ou obligations) dans le portefeuille action ou le portefeuille obligataire ne font pas partie des entreprises pour lesquelles nous avons eu des informations de marché. Nous mettons en place une méthode d'approche.

Dans le portefeuille actions et le portefeuille obligations, certaines entreprises figurent parmi les 260 entreprises étudiées précédemment. Dans ce cas, nous reprenons alors leurs rendements normalisés calculés. Cependant, d'autres entreprises n'y figurent pas. Dans ce cas nous devons alors approcher ces entreprises par celles déjà existantes et figurant parmi les 260, c'est à dire que nous regardons le pays de cette entreprise que l'on cherche à approcher, le secteur de celle-ci, ainsi que son groupe s'il est vraiment nécessaire afin de trouver l'entreprise la plus proche figurant parmi les 260 entreprises de l'étude.

Le rendement d'un portefeuille est la combinaison linéaire des rendements de chaque entreprise, c'est à dire que pour le portefeuille  $A_p$ , on a

$$A_p = \alpha_{p,1}r_{p,1} + \alpha_{p,2}r_{p,2} + \dots + \alpha_{p,m}r_{p,m}$$

où  $m$  est le nombre d'entreprises distinctes du portefeuille,  $r_{p,i} \forall i \in \{1, \dots, m\}$  est le rendement de l'entreprise  $i$  (entreprise figurant dans le portefeuille  $A_p$ ), et  $\alpha_{p,i}$  est la proportion de l'actif considéré au sein du portefeuille. Elle s'écrit :

$$\alpha_{p,i} = \frac{\text{valeur marché}_{p,i}}{\sum_{nb=1}^m \text{valeur marché}_{p,nb}}$$

La somme des poids du portefeuille vaut 1, c'est à dire

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{p,i} = 1$$

### 7.3.2 Corrélation entre deux portefeuilles

Rappelons que le portefeuille  $A_p$  a pour expression

$$\begin{aligned} A_p &= \alpha_{p,1}r_{p,1} + \alpha_{p,2}r_{p,2} + \dots + \alpha_{p,m}r_{p,m} \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_{p,i}r_{p,i} \end{aligned}$$

et le portefeuille  $A_q$  ayant pour expression

$$\begin{aligned} A_q &= \alpha_{q,1}r_{q,1} + \alpha_{q,2}r_{q,2} + \dots + \alpha_{q,n}r_{q,n} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{q,j}r_{q,j} \end{aligned}$$

La corrélation entre les deux portefeuilles s'écrit donc

- Pour  $p \neq q$

$$\begin{aligned} \text{corr}(A_p, A_q) &= \sum_{i=1}^m \alpha_{p,i} \sum_{i=1}^n \alpha_{q,i} \text{corr}(r_{p,i}, r_{q,i}) \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_{p,i} \sum_{j=1}^n \alpha_{q,i} \sqrt{R_{p,i}^2 R_{q,j}^2} \sum_{k=1}^K w_{k,p,i} w_{k,q,j} \end{aligned}$$

- Pour  $p = q$

Par définition

$$\text{corr}(A_p, A_q) = 1$$

## 7.4 Comparaison des corrélations entre les périodes

### 7.4.1 Comparaison des corrélations entre les périodes région par région

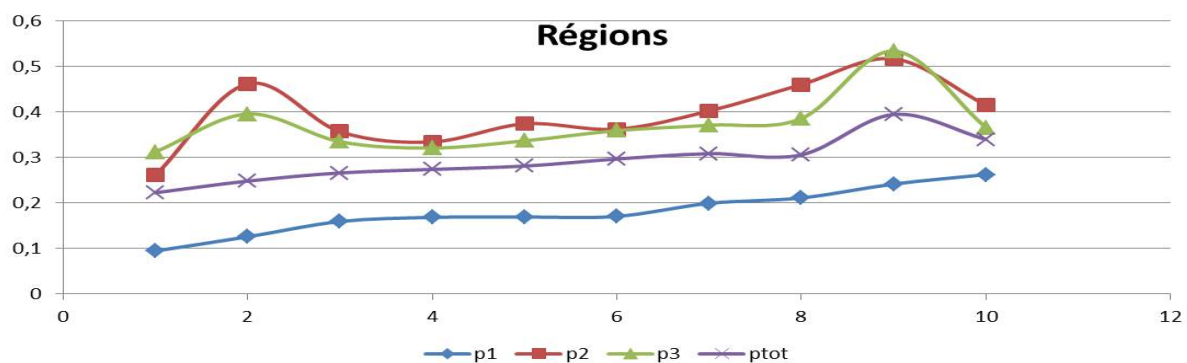


FIGURE 43 – Comparaison des périodes région par région

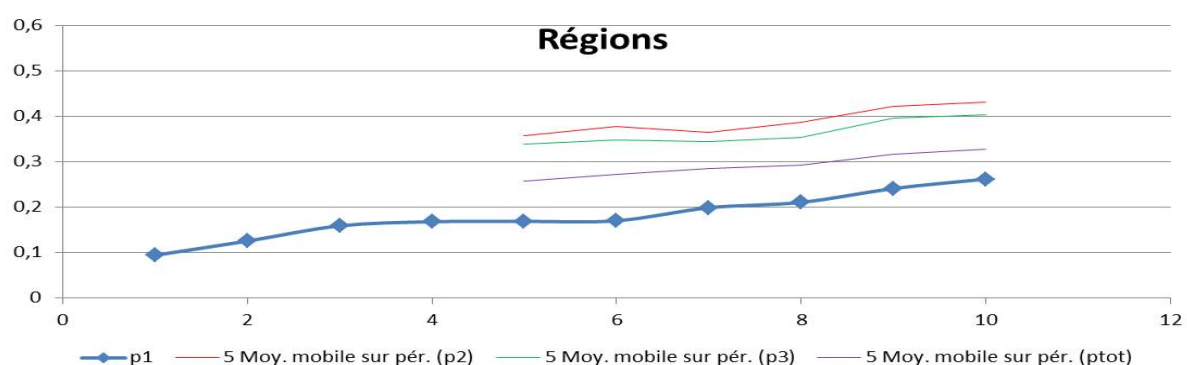


FIGURE 44 – Comparaison des périodes région par région avec moyenne mobile

En période calme des marchés les corrélations entre régions sont faibles. Cependant, en période agitée des marchés, les corrélations restent élevées, ce qu'on pourrait associer essentiellement à la conjoncture de marché. La troisième période est très proche de la deuxième période.

### 7.4.2 Comparaison des corrélations entre les périodes pays par pays

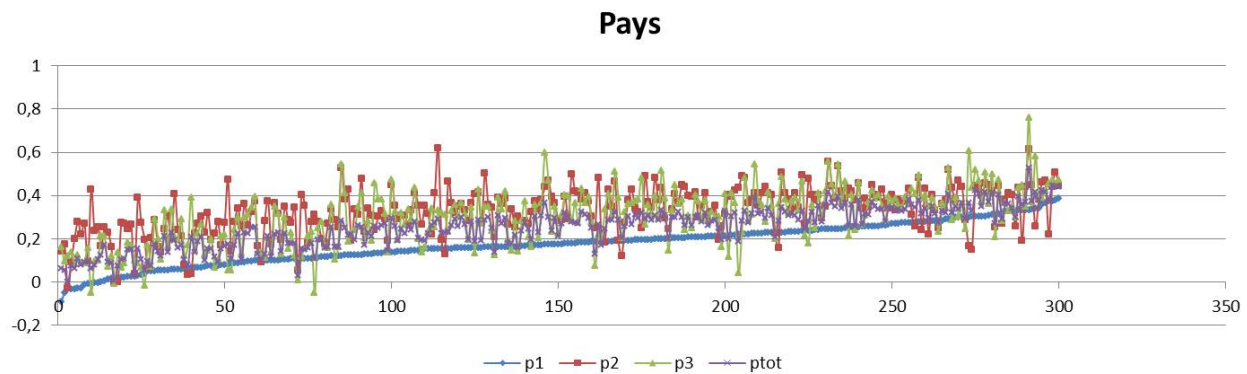


FIGURE 45 – Comparaison des périodes pays par pays

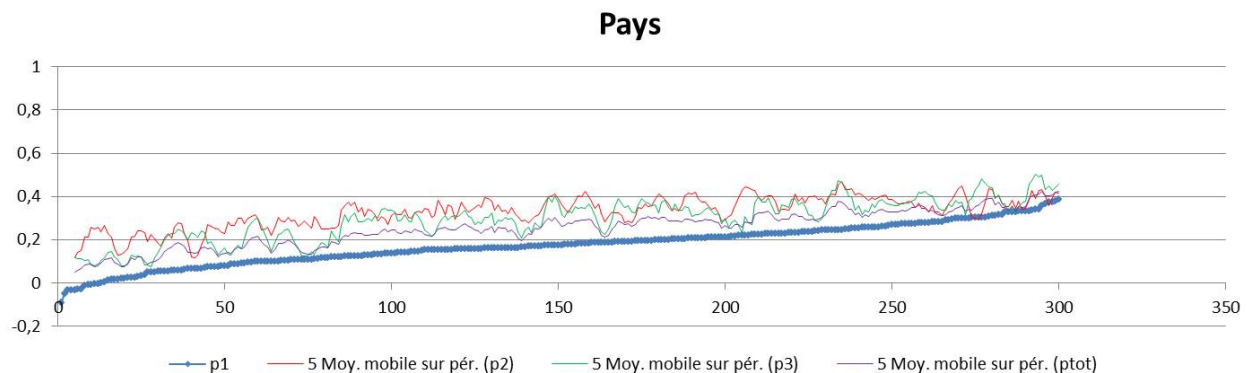


FIGURE 46 – Comparaison des périodes pays par pays avec moyenne mobile

Les conclusions sont les mêmes que pour l'étude région par région. En période calme des marchés les corrélations entre pays sont faibles. Cependant, en période agitée des marchés, les corrélations restent élevées, ce qu'on pourrait associer essentiellement à la conjoncture de marché. La troisième période est très proche de la deuxième période.

### 7.4.3 Comparaison des corrélations entre les périodes secteur par secteur

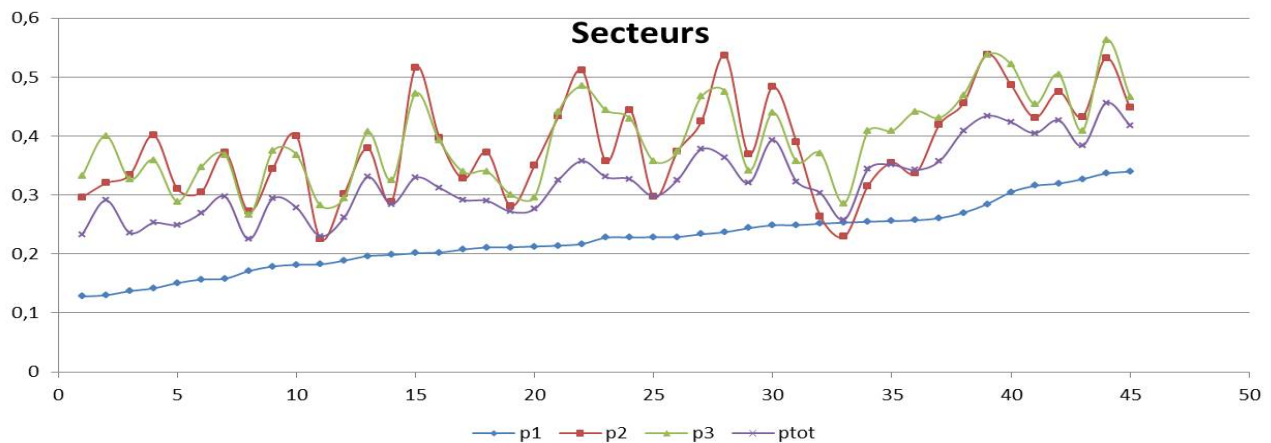


FIGURE 47 – comparaison des périodes secteur par secteur

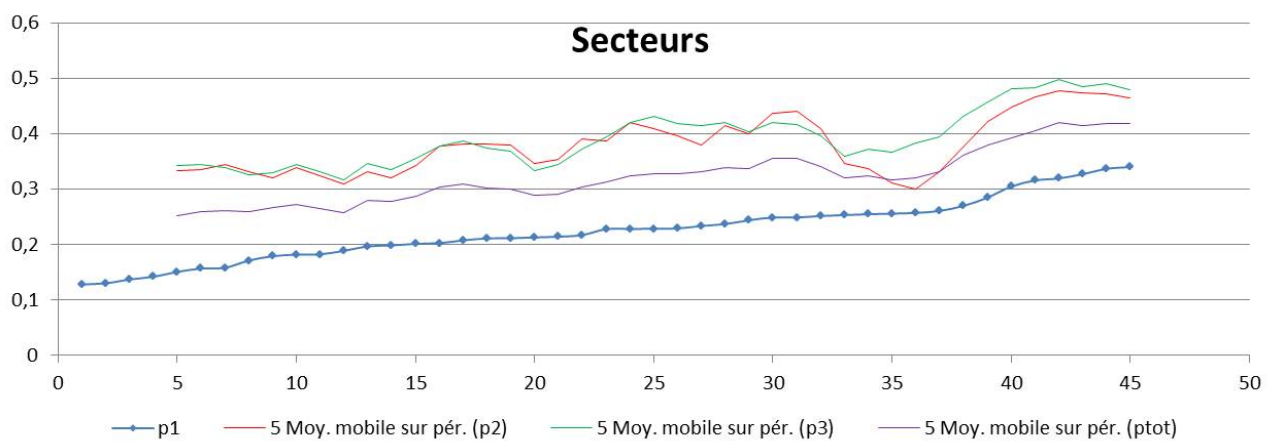


FIGURE 48 – comparaison des périodes secteur par secteur avec moyenne mobile

Les conclusions sont les mêmes que pour l'étude région par région et l'étude pays par pays. En période calme des marchés les corrélations entre secteurs sont faibles. Cependant, en période agitée des marchés, les corrélations restent élevées, ce qu'on pourrait associer essentiellement à la conjoncture de marché. La troisième période est très proche de la deuxième période.



## 7.5 Corrélations entre actions et obligations

| Période            | p1            | p2            | p3            | ptot          |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>Corrélation</b> | <b>29,96%</b> | <b>45,69%</b> | <b>46,09%</b> | <b>39,96%</b> |

FIGURE 49 – Corrélations entre le portefeuille actions et le portefeuille obligations pour les différentes périodes

| Période   | p1            | p2            | p3            | ptot          |
|---|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>Corrélation avec <math>\mu = 0,02</math></b> | <b>25,95%</b> | <b>39,52%</b> | <b>38,27%</b> | <b>33,65%</b> |
| <b>Corrélation avec <math>\mu = 0,03</math></b> | <b>25,95%</b> | <b>39,51%</b> | <b>38,27%</b> | <b>33,65%</b> |
| <b>Corrélation avec <math>\mu = 0,04</math></b> | <b>25,95%</b> | <b>39,51%</b> | <b>38,27%</b> | <b>33,65%</b> |

FIGURE 50 – Corrélations entre le portefeuille actions et le portefeuille obligations pour les différentes périodes

On constate que le taux sans risque a très peu d'influence sur les corrélations obtenues entre les actions et les obligations figurant parmi les 260 entreprises de l'étude. On conclut que, la sensibilité du modèle au taux sans risque étant très faible, la corrélation entre actions et obligations peut être assimilée à une corrélation Action-Spread.

On constate que les corrélations entre actions et obligations pour l'ensemble du portefeuille sont plus grandes que les corrélations entre actions et obligations pour les entreprises du portefeuille figurant parmi les 260 entreprises de 5% à 10% environ. Ceci est dû aux rapprochements réalisés. En effet, lorsqu'on réalise des rapprochements la corrélation entre deux entreprises (par exemple  $i$  et  $j$  où  $i$  est rapproché par  $j$ ) est égale à 100%, ce qui fausse les résultats. Le deuxième tableau est donc plus proche des vraies corrélations, tout en gardant une marge d'erreur puisque nous disposons de 260 entreprises données contre 402 entreprises dans le portefeuille.

La corrélation entre Actions et Obligations du portefeuille en période calme reste relativement faible (environ 30% pour l'ensemble des entreprises du portefeuille et 26% pour les entreprises figurant parmi les 260), ce qui traduit une assez bonne diversification entre les deux classes d'actif. Cette corrélation est plus élevée en période de crise, ce qui pourrait se justifier par des facteurs systémiques plutôt que par des éléments fondamentaux des valeurs des entreprises concernées.

## 7.6 Corrélations entre actions cotées et obligations sur des périodes glissantes

Pour les entreprises figurant parmi les entreprises connues, nous allons regarder les corrélations entre actions cotées et obligations sur des périodes glissantes à horizon un an :

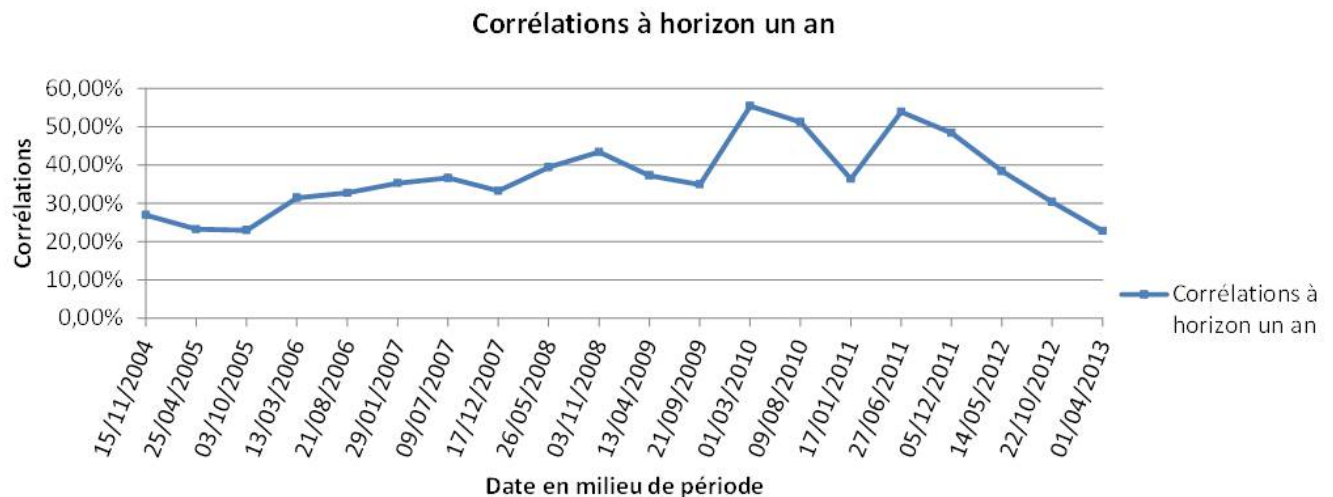


FIGURE 51 – Corrélations entre actions cotées et obligations à horizon un an

En période calme la corrélation reste relativement faible (30%), ce qui traduit une assez bonne diversification entre les deux classes d'actif.

La corrélation est plus élevée en période de crise (jusqu'à 55%), ce qui pourrait se justifier par des facteurs systémiques plutôt que par des éléments fondamentaux des valeurs des entreprises concernées.

## 7.7 Corrélations entre actions cotées et obligations sur des périodes glissantes pour d'autres sociétés d'assurance

Pour les entreprises figurant parmi les entreprises connues, nous allons regarder les corrélations entre actions cotées et obligations sur des périodes glissantes à horizon un an pour les sociétés d'assurance SAF VIE, SAF IARD, ERP :

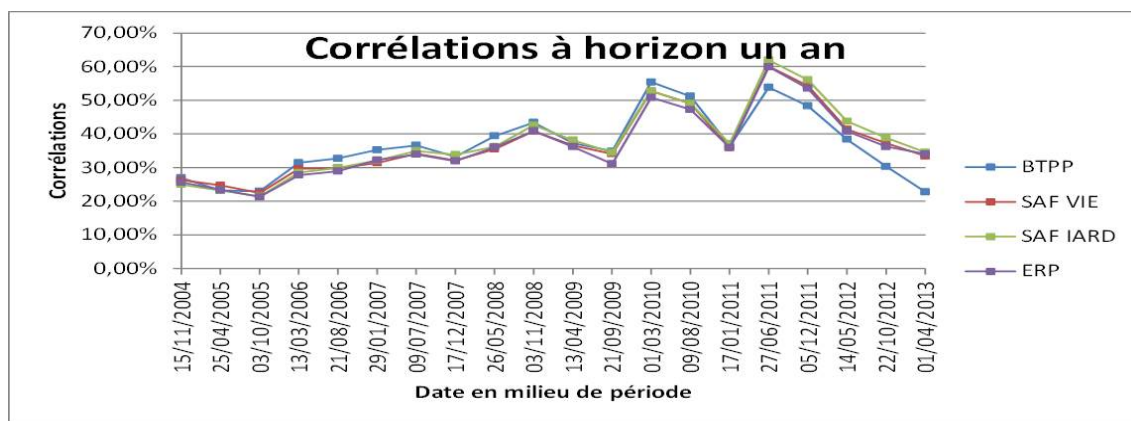


FIGURE 52 – Corrélation entre actions cotées et obligations à horizon un an pour d'autres sociétés d'assurances

Les courbes représentant les corrélations entre actions cotées et obligations pour les sociétés d'assurance suivent la même courbe que celle de BTPP. Les conclusions sont les mêmes que la sous-section précédente. En période calme la corrélation reste relativement faible (30%), ce qui traduit une assez bonne diversification entre les deux classes d'actif.

La corrélation est plus élevée en période de crise (jusqu'à 55% – 60%), ce qui pourrait se justifier par des facteurs systémiques plutôt que par des éléments fondamentaux des valeurs des entreprises concernées.



## 8 Conclusion

En conclusion, il est important de rappeler que nous avons réalisé une étude permettant d'étudier les corrélations entre actifs. Ce projet a été réalisé en langage VBA et langage R. Ce stage de fin d'études m'a donc permis de progresser dans ces langages.

Au cours de mon cursus, j'ai pu acquérir de nombreuses connaissances que j'ai pu appliquer durant le stage de fin d'études. Ce stage de fin d'études a été très instructif. Il m'a permis d'acquérir de nouvelles connaissances et d'autres compétences et m'a permis de prendre du recul par rapport à l'ensemble des connaissances acquises et des missions demandées et confiées.

Il m'a également permis de mieux appréhender le monde du travail et de découvrir le monde de l'actuariat, le domaine des risques, et de mieux connaître en quoi consiste le travail de la Direction des Risques.

Ce stage a été très enrichissant et intéressant. Il m'a donné envie de continuer dans cette voie.



# ANNEXES

## A Bibliographie

- *Hermann KOUAMO*, "**Correlation Model for Wholesale Credit Risk Economic Capital**", Groupe Risques
- *Arnaud GUYADER*, "**Régression linéaire**", Université Rennes 2, 2012-2013
- *Joao Predo Pereira*, "**Credit Risk**", Finance Departement, ISCTE Business School, Lisbonne, 8 Juin 2012
- *Julien JACQUES*, "**Analyse en composantes principales**", Polytech'Lille
- *François LONGIN*, "**Cours management bancaire, Séance 3, Le risque de crédit, Le modèle de Merton**", ESSEC
- figure du CAC40 : *www.abcbourse.com*
- figure du Spread : PRO BTP



## B Diverses définitions

- **Solvabilité** : Mesure de la capacité d'une personne physique ou morale à payer ses dettes sur le court, moyen et long terme.
- **Solvabilité 2** : Réforme réglementaire européenne du monde de l'assurance. Son objectif est de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité.
- **Actif** : Ce qui, dans un bilan, figure l'ensemble des biens matériels et immatériels détenus par une entreprise.
- **Passif** : Ce qui, dans le bilan d'une entreprise, d'une société d'une association, figure l'ensemble des dettes à l'égard des associés et des tiers (fonds propres, réserves, provisions, dettes à long terme, moyen et court terme et, le cas échéant, bénéfice net).
- **Action** : Titre de propriété représentant une part de capital dans certaines sociétés.
- **Obligation** : Titre négociable, représentant une des fractions égales d'un prêt consenti à une société privée ou à une collectivité publique lors de l'émission d'un emprunt (dit emprunt obligataire).
- **Risque systémique** : Risque qu'un événement particulier entraîne par réactions en chaîne des effets négatifs considérables sur l'ensemble du système pouvant occasionner une crise générale de son fonctionnement.
- **Risque idiosyncratique** : Risque lié à une position en particulier. Plus un portefeuille est concentré, moins il y a de positions, plus ces positions sont importantes et plus le risque idiosyncratique est élevé.
- **ORSA** : Ensemble de processus constituant un outil d'analyse décisionnelles et stratégiques visant à évaluer, de manière continue et prospective, le besoin global de solvabilité lié au profit de risque spécifique de l'organisme assureur.
- **Transparisation** : Il s'agit d'une démarche mise en œuvre par certaines sociétés de gestion et certains investisseurs institutionnels visant à renforcer la transparence des fonds d'investissement. L'objectif est d'aider les investisseurs à identifier les moteurs de performances et corrélativement les dangers.
- **Obligation corporate** : Obligation émise par une entreprise privée ou une association.

## C Démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton

*Démonstration.* Le prix du call d'une option européenne s'écrit

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\mu(T-t)}h \mid \mathfrak{F}_t]$$

sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ , où  $h$  est le payoff avec  $h = (V_T - D)_+$ .

$$\begin{aligned} E_t &= e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(V_T - D)_+ \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T \mathbb{1}_{\{V_T > D\}} \mid \mathfrak{F}_t] - D e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{V_T > D\}} \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T \mathbb{1}_{\{V_T > D\}} \mid \mathfrak{F}_t] - D e^{-\mu(T-t)} \mathbb{Q}(V_T > D \mid \mathfrak{F}_t) \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} a &= e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T \mathbb{1}_{\{V_T > D\}} \mid \mathfrak{F}_t] \\ b &= D e^{-\mu(T-t)} \mathbb{Q}(V_T > D \mid \mathfrak{F}_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T \mathbb{1}_{\{V_T > D\}} \mid \mathfrak{F}_t] \\ &= e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} \mathbb{1}_{\left\{ V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > D \right\}} \mid \mathfrak{F}_t \right] \\ &= V_t e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} \mathbb{1}_{\left\{ V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > D \right\}} \mid \mathfrak{F}_t \right] \end{aligned}$$

Changement de probabilité :

Soit  $\mathbb{Q}^*$  et  $\mathbb{Q}$  deux mesures de probabilités telles que :

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} = e^{-\frac{\sigma_V^2}{2}T + \sigma_V W_T}$$

avec  $W_T$  un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}$ . Alors

$$\hat{W}_T = W_T - \sigma_T$$

est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}^*$ .

$a$  devient

$$\begin{aligned}
a &= V_t e^{-\mu(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} \mathbb{1}_{\left\{ V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > D \right\}} \mid \mathfrak{F}_t \right] \\
&= V_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V (\hat{W}_{T-t} + \sigma_V (T-t))} > D \right\}} \mid \mathfrak{F}_t \right] \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V (\hat{W}_{T-t} + \sigma_V (T-t))} > D \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( V_t e^{\left(\mu + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V \hat{W}_{T-t}} > D \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( e^{\left(\mu + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V \hat{W}_{T-t}} > \frac{D}{V_t} \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( \left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) (T-t) + \sigma_V \hat{W}_{T-t} > \ln \left( \frac{D}{V_t} \right) \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( - \left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) (T-t) - \sigma_V \hat{W}_{T-t} < \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( -\sigma_V \hat{W}_{T-t} < \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) (T-t) \mid \mathfrak{F}_t \right)
\end{aligned}$$

De plus  $\hat{W}_{T-t} \stackrel{\mathcal{L}}{\sim}_{\mathbb{Q}^*} \sqrt{T-t} U$  avec  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Donc

$$\begin{aligned}
a &= V_t \mathbb{Q}^* \left( -\sigma_V \hat{W}_{T-t} < \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) (T-t) \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( -\sigma_V \sqrt{T-t} U < \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) (T-t) \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( -U < \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \left( \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right) (T-t) \right) \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathbb{Q}^* \left( -U < \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \frac{\left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right)}{\sigma_V} \sqrt{T-t} \mid \mathfrak{F}_t \right) \\
&= V_t \mathcal{N} \left( \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \frac{\left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right)}{\sigma_V} \sqrt{T-t} \right) \\
&= V_t \mathcal{N}(d_1)
\end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \ln \left( \frac{V_t}{D} \right) + \frac{\left( \mu + \frac{\sigma_V^2}{2} \right)}{\sigma_V} \sqrt{T-t}$$

Regardons  $b$

$$\begin{aligned} b &= De^{-\mu(T-t)} \mathbb{Q}(V_T > D \mid \mathfrak{F}_t) \\ &= De^{-\mu(T-t)} \mathbb{Q}\left(V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > D \mid \mathfrak{F}_t\right) \end{aligned}$$

Posons  $c = \mathbb{Q}\left(V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > D \mid \mathfrak{F}_t\right)$ . Alors

$$\begin{aligned} c &= \mathbb{Q}\left(V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > D \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t}} > \frac{D}{V_t} \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_V W_{T-t} > \ln\left(\frac{D}{V_t}\right) \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(-\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) - \sigma_V W_{T-t} < \ln\left(\frac{V_t}{D}\right) \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(-\sigma_V W_{T-t} < \ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) \mid \mathfrak{F}_t\right) \end{aligned}$$

Or  $W_{T-t} \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \sqrt{T-t}U$  avec  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Alors  $c$  est égal à

$$\begin{aligned} c &= \mathbb{Q}\left(-\sigma_V W_{T-t} < \ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(-\sigma_V \sqrt{T-t}U < \ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t) \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(-U < \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)\right) \mid \mathfrak{F}_t\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)\right)\right) \\ &= \mathcal{N}(d_2) \end{aligned}$$

D'où

$$b = De^{-\mu(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_2 = \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)\right)$$

Donc

$$E_t = V_t \mathcal{N}(d_1) - De^{-\mu t} \mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \frac{\left(\mu + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)}{\sigma_V} \sqrt{T-t} \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)\right) \end{aligned}$$

□

## D Démonstration de la normalité du rendement

*Démonstration.* Nous cherchons à démontrer que le rendement  $r_i$  des actifs d'une entreprise  $i$ , avec  $i \in \{1, N\}$ , suit bien une loi normale centrée réduite, c'est à dire que :

$$E[r_i] = 0 \quad \text{Var}(r_i) = 1$$

Nous avons vu, ci-dessus, que l'expression du rendement des actifs pour toute entreprise  $i$  avec  $i \in \{1, N\}$  est écrite sous la forme suivante :

$$r_i = \sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i$$

Pour démontrer que la variance de  $r_i$  vaut 1, nous allons utiliser la variance des facteurs systémiques et idiosyncratiques.

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_i) &= \text{Var} \left( \sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i \right) \\ &= \text{Var} \left( \sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} F_k \right) + \text{Var}(\sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i) + 2\text{cov} \left( \sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} F_k, \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i \right) \end{aligned}$$

Or, d'après les hypothèses, les facteurs systémiques et idiosyncratiques suivent respectivement une loi normale centrée réduite et la covariance entre un facteur systémique et un facteur idiosyncratique est nulle ( $F_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $\text{cov}(F_k, \varepsilon_i) = 0$ ) alors on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_i) &= R_i^2 \text{Var} \left( \sum_k w_{k,i} F_k \right) + (1 - R_i^2) \text{Var}(\varepsilon_i) \\ &= R_i^2 \sum_k w_{k,i}^2 \text{Var}(F_k) + (1 - R_i^2) \\ &= R_i^2 \sum_k w_{k,i}^2 + (1 - R_i^2) \end{aligned}$$

Et comme, d'après les hypothèses, la somme des poids est égale à 1 on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_i) &= R_i^2 \sum_k w_{k,i}^2 + (1 - R_i^2) \\ &= R_i^2 + (1 - R_i^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc  $\text{Var}(r_i) = 1$

Pour démontrer que l'espérance de  $r_i$  est égale à 0, nous allons utiliser l'espérance des facteurs systémiques et idiosyncratiques.

$$\begin{aligned} E(r_i) &= E \left( \sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i \right) \\ &= E(\sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} F_k) + E(\sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i) \\ &= \sqrt{R_i^2} \sum_k w_{k,i} E(F_k) + \sqrt{1 - R_i^2} E(\varepsilon_i) \end{aligned}$$

Et d'après les hypothèses,  $E(F_k) = 0$  et  $E(\varepsilon_i) = 0$ . Donc

$$E(r_i) = 0$$

*Ce qui prouve bien que  $r_i$  suit une loi normale centrée réduite.*

□

## E Démonstration du calcul de la corrélation

La corrélation entre deux entreprises  $i$  et  $j$  avec  $1 \leq i \leq N$  et  $1 \leq j \leq N$  a pour expression :

$$\text{corr}(r_i, r_j) = \frac{\text{cov}(r_i, r_j)}{\sqrt{\text{Var}(r_i)\text{Var}(r_j)}}$$

Deux déclinaisons peuvent alors être exprimées : entreprise  $i \neq$  entreprise  $j$  et entreprise  $i =$  entreprise  $j$ .

- **Pour  $i \neq j$**

D'après la démonstration précédente, le rendement normalisé des actifs de l'entreprise  $i$   $r_i$ , tout comme le rendement normalisé des actifs de l'entreprise  $j$   $r_j$ , suit un loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ , c'est à dire que  $E(r_i) = E(r_j) = 0$  et  $\text{Var}(r_i) = \text{Var}(r_j) = 1$ . Donc la corrélation peut être exprimée de la façon suivante :

$$\text{corr}(r_i, r_j) = \text{cov}(r_i, r_j)$$

On sait que le rendement normalisé des actifs d'une entreprise  $i$  a pour expression :

$$r_i = \sqrt{R_i^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i$$

L'expression du produit des rendements des actifs de deux entreprises  $i$  et  $j$  nous donne alors :

$$\begin{aligned} r_i r_j &= \left( \sqrt{R_i^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i \right) \left( \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,j} F_k + \sqrt{1 - R_j^2} \varepsilon_j \right) \\ r_i r_j &= \sqrt{R_i^2} \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} w_{k,j} F_k F_k + \sqrt{R_i^2} \sqrt{1 - R_j^2} \varepsilon_j \sum_{k=1}^K w_{k,i} F_k \\ &\quad + \sqrt{R_j^2} \sqrt{1 - R_i^2} \varepsilon_i \sum_{k=1}^K w_{k,j} F_k + \sqrt{1 - R_i^2} \sqrt{1 - R_j^2} \varepsilon_i \varepsilon_j \end{aligned}$$

Par conséquent, la corrélation entre les deux entreprises  $i$  et  $j$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{corr}(r_i, r_j) &= \text{cov}(r_i, r_j) \\ &= \sqrt{R_i^2} \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} w_{k,j} \text{cov}(F_k, F_k) + \sqrt{R_i^2} \sqrt{1 - R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} \text{cov}(F_k, \varepsilon_j) \\ &\quad + \sqrt{R_j^2} \sqrt{1 - R_i^2} \sum_{k=1}^K w_{k,j} \text{cov}(F_k, \varepsilon_i) + \sqrt{1 - R_i^2} \sqrt{1 - R_j^2} \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Cependant, la corrélation entre deux facteurs systémiques et la corrélation entre un facteur systémique et un facteur idiosyncratique est égale à  $corr(F_k, F_l) = \frac{cov(F_k, F_l)}{\sqrt{Var(F_k)Var(F_l)}}$  et  $corr(F_k, \varepsilon_i) = \frac{cov(F_k, \varepsilon_i)}{\sqrt{Var(F_k)Var(\varepsilon_i)}}$ .

Or on sait que  $\varepsilon_i, F_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Donc la corrélation entre les deux facteurs systémiques est égale à la covariance,  $corr(F_k, F_l) = cov(F_k, F_l)$ , et la corrélation entre un facteur systémique et un facteur idiosyncratique est également égale à la covariance,  $corr(F_k, \varepsilon_i) = cov(F_k, \varepsilon_i)$ .

Par conséquent, la corrélation entre les deux entreprises  $i$  et  $j$  est donnée par :

$$\begin{aligned} corr(r_i, r_j) &= cov(r_i, r_j) \\ &= \sqrt{R_i^2} \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} w_{k,j} cov(F_k, F_k) \\ &= \sqrt{R_i^2} \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} w_{k,j} Var(F_k) \\ &= \sqrt{R_i^2} \sqrt{R_j^2} \sum_{k=1}^K w_{k,i} w_{k,j} \end{aligned}$$

- **Pour  $i = j$**

La corrélation entre une entreprise et elle-même est égale à 1 par définition :

$$corr(r_i, r_j) = 1$$