



Sup'Galilée
Centrale Marseille

RAPPORT DE STAGE DE FIN D'ETUDES

Décomposition de l'opérateur de rayonnement en valeurs singulières. Applications à des objets impédants.

Pierre PAYEN, ingénieur 3^{ème} année

Sup'Galilée : Mathématiques appliquées au calcul scientifique.

Centrale Marseille : Mathématiques pour les services.

Enseignants responsables :

M. Olivier Lafitte (Sup'Galilée)

M. Christophe POUET (Centrale Marseille)

Département d'accueil au CESTA : DAM/DGSA

Responsable de stage au CESTA : Bruno STUPFEL

Dates du stage : 2 Mai - 31 Sept 2016

Afin que l'étudiant puisse être jugé équitablement,
les corrections apportées à ce rapport de stage ont été volontairement limitées.

Ce document est la propriété du CEA et ne peut être utilisé, reproduit ou communiqué sans son autorisation

Table des matières

Introduction	1
Résumé	1
Plan du rapport	1
1 Le CEA en bref	2
2 Rappels	4
2.1 Rappels de physique, cas PEC	4
2.1.1 Équation intégrale pour le champ électrique	4
2.1.2 Champ lointain	5
2.1.3 Opérateur de rayonnement	6
2.1.4 Surface équivalente radar	7
2.2 Rappels de mathématiques	8
2.2.1 Espace fonctionnel H_{div}	8
2.2.2 Discrétisation du problème	8
2.2.3 Éléments finis de Rao-Wilton-Glisson	8
2.2.4 Décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de rayonnement	9
3 Contribution du stage	11
3.1 Condition d'impédance et opérateur de rayonnement	11
3.1.1 Formule de la condition d'impédance de Leontovitch dans le cas de l'approximation du plan tangent	11
3.1.2 CIOE	13
3.1.3 Représentation intégrale avec condition d'impédance	13
3.1.4 Champ lointain	14
3.1.5 Opérateur de rayonnement	14
3.2 Implémentation informatique	14
3.3 Développement d'outils de visualisation Scilab	15
4 Résultats	17
4.1 Validation des CI	17
4.1.1 CI de Leontovitch	17
4.2 Consistance de la SVD avec CI de Leontovich	17
4.3 Cas du maillage sphère-cône	21
5 Conclusion	27
5.1 Déroulement du stage	27
5.2 Bilan	27
5.2.1 Apport du stage au stagiaire	27
5.2.2 Apport du stage au CEA	28
5.3 Perspectives	28
A Annexes	29
A.1 Scilab	29
Références	31

Acronymes

<i>CI</i>	condition d'impédance
<i>EF</i>	éléments finis
<i>EI</i>	équation intégrale
<i>OR</i>	opérateur de rayonnement
<i>PEC</i>	perfect electric conductor : conducteur parfait
<i>RI</i>	représentation intégrale
<i>SVD</i>	singular value decomposition : décomposition en valeurs singulières

Notations physiques

\underline{E}	champ électrique
\underline{H}	champ magnétique
\underline{J}	courant électrique
\underline{K}	courant magnétique
\underline{E}^0	champ lointain
\mathcal{Z}	opérateur d'impédance
A^Γ	opérateur de rayonnement
σ	surface équivalente radar (SER)
f	fréquence de l'onde
k	nombre d'onde
η_0	impédance du vide
ϵ	permittivité diélectrique relative
μ	perméabilité magnétique relative

Notations mathématiques

Ω	l'objet d'étude, domaine fermé borné de \mathbb{R}^3
Γ	surface fermée, bord de Ω
\underline{n}	normale sortante à Γ
$\Delta\Omega$	domaine d'observation
h	longueur moyenne des arêtes d'un maillage
R_s	rayon de la sphère englobante d'un objet]

Conventions

Les équations de Maxwell sont considérées en harmonique, convention $e^{i\omega t}$.
Par abus de langage, l'induction magnétique \underline{H} est nommée champ magnétique (\underline{B}).
 $\underline{H} = \underline{B}/\mu_0$.

Introduction

Résumé

Ce rapport de stage de fin d'études porte sur le phénomène de diffraction des ondes électro-magnétiques (OEM) sur un objet dont la surface est modélisée grâce à une condition d'impédance (CI).

L'objectif principal est d'ajouter à un code Fortran résolvant l'équation intégrale (EI) la contribution des CI à l'opérateur de rayonnement (OR). Puis une décomposition en valeurs singulières (SVD) sera appliquée à cet OR. On comparera la surface équivalente radar (SER) entre l'OR et l'OR réduit par SVD afin de valider le code numérique.

En complément de cette mission, des codes Scilab ont été développés pour traiter et visualiser les résultats. Notamment nous visualiserons la consistance numérique de nos modèles en comparant les champs lointains singuliers entre eux.

Plan du rapport

La partie 1 présentera brièvement le CEA/CESTA.

Nous introduirons ensuite dans la partie 2.1, les équations qui caractérisent le phénomène. Dans un premier temps, nous poserons le problème physique, introduirons les termes et démontrerons les résultats pour un conducteur parfait. Cette partie aura pour but de justifier sur des cas simples les modèles plus complexes traités dans le code.

Puis en partie 2.2, nous poserons le cadre mathématique général, en rappelant des résultats importants sur la décomposition en valeurs singulières et la méthode des éléments finis.

La contribution effective du stage sera présentée en partie 3. C'est dans cette partie que l'opérateur d'impédance sera introduit et dans le cas de la CI de Leontovitch, sa formule sera montrée. Puis nous introduirons sa contribution dans l'opérateur de rayonnement. La partie du stage dédiée au développement en Scilab y sera également présentée.

Enfin les résultats numériques de consistance et des solutions sur des cas standards (sphère, sphère cône) seront présentés en partie 4.

1 Le CEA en bref

LE COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE ET AUX ÉNERGIES ALTERNATIVES (CEA)

Acteur majeur en matière de recherche, de développement et d'innovation, le CEA, établissement public à caractère scientifique, technique, commercial et industriel, intervient dans quatre grands domaines :

- les **énergies bas carbone**,
- les **technologies pour l'information et la santé**
- les **très grandes infrastructures de recherche**
- la **défense et la sécurité**.

A travers la diversité de ses programmes, le CEA dispose de plusieurs atouts :

- une **culture croisée ingénieurs-chercheurs** propice aux synergies entre recherche fondamentale et innovation technologique,
- des **installations exceptionnelles** (supercalculateurs, réacteurs de recherches, grands instruments de la physique, lasers de puissance...),
- une réelle implication dans le **tissu industriel et économique**.

Implanté sur **10 centres** répartis sur toute la France, le CEA bénéficie d'une forte insertion régionale et de solides partenariats avec les autres organismes de recherche, collectivités locales et universités. Reconnu également comme un expert dans ses domaines de compétences, le CEA est pleinement inséré dans **l'espace européen de la recherche** et exerce une présence croissante au niveau international.

En 2013, le budget du CEA s'est élevé à 4,3 milliards d'euros.

Objectifs

Les objectifs du CEA sont très variés :

- mener, en appui aux développements technologiques et dans un cadre international, les recherches fondamentales sur la physique, la chimie et les sciences du vivant,
- améliorer les performances de l'industrie nucléaire actuelle et inventer l'énergie nucléaire de demain,
- apporter des solutions concrètes à la gestion des déchets nucléaires,
- développer les nouvelles technologies pour les énergies alternatives,
- progresser dans les technologies de l'information, les biotechnologies, la microélectronique, les nanotechnologies et les matériaux pour l'industrie,
- approfondir les connaissances sur les effets biologiques des rayonnements,
- améliorer, grâce aux technologies issues du nucléaire, les techniques d'imagerie médicale, la mise au point de nouveaux traitements médicaux, les connaissances sur la génétique, les cellules, les virus et les maladies dégénératives.
- garantir l'indépendance nationale en concevant, en fabriquant et en assurant la maintenance des armes nucléaires, outils de la politique de dissuasion. Le CEA en assure la crédibilité et la sécurité par son programme Simulation. Il aide à la surveillance de l'application des traités internationaux pour la non-prolifération nucléaire.

Organisation

Aujourd'hui, près de 16 129 chercheurs, ingénieurs, techniciens travaillent au CEA dans les 10 centres de recherche répartis dans plusieurs régions : en Île-de-France (Saclay, Fontenay-aux-Roses, Bruyères-le-Châtel), en région Centre (Le Ripault), en Aquitaine (Cesta), en Midi-Pyrénées (Gramat), en Bourgogne (Valduc), en Rhône-Alpes (Grenoble), en Languedoc-Roussillon (Marcoule) et en Provence-Alpes-Côte d'Azur (Cadarache).



Fig. 1 - Structure de problème

En cherchant à caractériser les données du problème, nous en déduisons le champ électromagnétique E pour une onde incidente E^i et une onde réfléchie E^r . Nous utilisons l'équation de Maxwell, qui nous permet de trouver le champ E à partir de E^i et E^r .

3.1.1 Équation intégrale pour le champ électrique

Nous allons dériver l'équation de Maxwell en régime harmonique (convention $e^{j\omega t}$) pour trouver l'expression intégrale du champ électrique.

On considère un objet électromagnétique V de surface S . Soit E^i le champ électromagnétique incident et E^r le champ réfléchi en tout point de l'espace.

Les équations de Maxwell en régime harmonique appliquées au champ E sont :

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{div}(E) &= \rho \\ (2) \quad \text{div}(H) &= 0 \\ (3) \quad \text{rot}(E) &= -j\omega H \\ (4) \quad \text{rot}(H) &= j\omega E + J \end{aligned}$$

Pour une onde incidente E^i et une onde réfléchie E^r , on a : $E = E^i + E^r$. On cherche à trouver l'expression de E^r en fonction de E^i et de la géométrie de l'objet.

2 Rappels

Cette section est un rappel des travaux effectués par Julien SCHORSCH [5] et servant de support à ce stage.

2.1 Rappels de physique, cas PEC

Le phénomène rencontré est celui de l'éclairement d'un objet Ω parfaitement conducteur par une onde électromagnétique plane monochromatique incidente $(\underline{E}^i, \underline{H}^i)$. Cette onde va alors à la fois se diffracter en une onde \underline{E}^d et créer sur la surface de cet objet des courants \underline{J} surfaciques. L'onde incidente, diffractée et totale (resp. $\underline{E}^i, \underline{E}^d, \underline{E} = \underline{E}^i + \underline{E}^d$) est solution des équations de Maxwell.

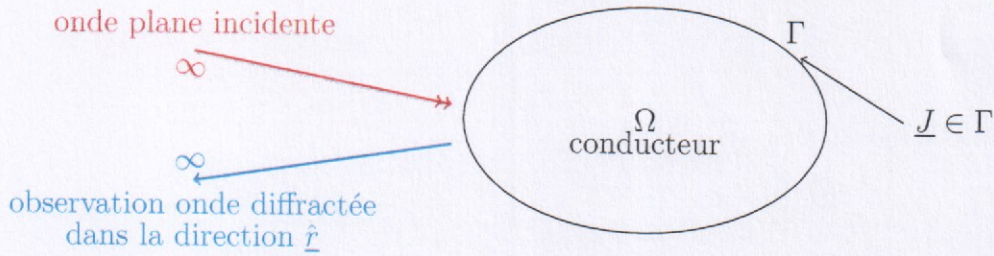


FIG. 1 – Schéma du problème.

En cherchant à caractériser les courants sur la surface Γ , nous en déduirons le champ lointain \underline{E}^0 pour enfin déterminer la SER σ de l'objet. Pour déterminer \underline{E}^0 nous utiliserons l'opérateur de rayonnement ¹, qui ne dépend que de l'objet et de son secteur angulaire d'observation.

2.1.1 Équation intégrale pour le champ électrique

Nous allons détailler comment des équations de Maxwell en régime harmonique (convention $e^{i\omega t}$) nous pouvons retrouver la représentation intégrale du champ électrique.

On considère un objet suffisamment régulier Ω de surface fermée Γ . Soit $(\underline{E}^i, \underline{H}^i)$ le champ électromagnétique incident et $(\underline{E}^d, \underline{H}^d)$ le champ diffracté en tout point de l'espace.

Les équations de Maxwell en régime harmonique appliquées au champ $(\underline{E}^d, \underline{H}^d)$ sont :

$$\text{div}(\underline{E}^d) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\text{div}(\underline{H}^d) = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot}(\underline{E}^d) = -i\omega\mu\underline{H}^d \quad (3)$$

$$\text{rot}(\underline{H}^d) = \underline{j} + i\omega\epsilon\underline{E}^d \quad (4)$$

¹Une autre possibilité est d'utiliser la décomposition en courants caractéristiques [3, 4]. Ces courants constituent une base complète de \underline{J} sur Γ , mais leur calcul est coûteux et chaque courant rayonne dans toutes les directions alors que la SVD permet de se réduire à un domaine $\Delta\Omega$

où ρ est la densité de charge (nulle en dehors de Ω), et μ, ϵ sont respectivement les perméabilités magnétique et diélectrique relative du matériau, \underline{j} le courant électrique surfacique et ω la pulsation de l'onde.

On pose $\underline{J} = \eta_0 \underline{j}$. La représentation intégrale du champ électrique diffracté dans Ω est alors

$$\underline{E}^d(\underline{r}) = -ik \int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \frac{i}{k} \underline{\text{grad}} \left(\int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \text{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \right) \quad (5)$$

où $g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$ est la solution de l'équation de Helmholtz $\Delta g + k^2 g = -\delta_{\underline{r}, \underline{r}'}$.

$$\underline{\text{grad}}_{\underline{r}'} g(\underline{r}, \underline{r}') = -\underline{\text{grad}}_{\underline{r}} g(\underline{r}, \underline{r}') = -(\underline{r} - \underline{r}') \frac{1 + ik|\underline{r} - \underline{r}'|}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} e^{-ik|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Mais sachant que l'on a un conducteur parfait $\underline{E}_t(\underline{r}) = 0$, pour tout $\underline{r} \in \Gamma$, alors $\underline{E}_t^d = -\underline{E}_t^i$ sur la surface et l'équation intégrale pour le champ électrique (EFIE, Electric Field Integral Equation) s'écrit :

$$(\text{EFIE}) \quad -\underline{E}_t^i(\underline{r}) = -ik \int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \frac{i}{k} \underline{\text{grad}}_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \text{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \right) \quad (6)$$

Cette équation intégrale permet de trouver \underline{J} et ainsi on en déduit \underline{E}^d de la représentation intégrale (5).

2.1.2 Champ lointain

Soit la représentation intégrale où \underline{j} est supposé connu, grâce à l'EFIE, le champ lointain est obtenu grâce à la condition de rayonnement de Silver-Müller :

On note $\hat{\underline{r}} = \underline{r}/|\underline{r}|$, avec $\underline{r} = r\hat{\underline{r}}$

$$\underline{E}^0(\underline{r}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} r e^{ikr} \underline{E}^d(\underline{r}) \quad (7)$$

En utilisant la représentation intégrale (5)

$$\underline{E}^0(\underline{r}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} r e^{ikr} \left[\underbrace{-ik \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}'}_{\underline{I}_1} - \frac{i}{k} \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{\text{grad}} \left(\underbrace{\int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \text{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}'}_{\underline{I}_2} \right) \right] \quad (8)$$

Pour la fonction de Green g , d'après [5]

$$g(\underline{r}, \underline{r}') \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} f(\underline{r}, \underline{r}') \quad \text{où } f(\underline{r}, \underline{r}') = \exp(ik\hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}')$$

$$\underline{\text{grad}}_{\underline{r}'} (g(\underline{r}, \underline{r}')) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -ik\hat{\underline{r}} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} f(\underline{r}, \underline{r}')$$

Comme Γ est une surface compacte, on peut intégrer des équivalences.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{I}_1 &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -ik \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \\ \Rightarrow \underline{I}_2 &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} \hat{\underline{r}} \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \operatorname{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \end{aligned}$$

On va démontrer que \underline{E}^0 et $\hat{\underline{r}}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}} \cdot \underline{E}^0 &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} r e^{ikr} \hat{\underline{r}} \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) \\ &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \cdot \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' + \hat{\underline{r}} \cdot \hat{\underline{r}} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \operatorname{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \end{aligned}$$

sachant que $\int_{\Gamma} \underline{\operatorname{grad}}_{\underline{r}'} f(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' = \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \operatorname{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' + \int_{\partial\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J} \cdot \underline{\tau}(\underline{r}') d\underline{r}'$ et comme Γ est fermé, $\partial\Gamma$ est de mesure nulle

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}} \cdot \underline{E}^0 &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \cdot \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') \cdot \underline{\operatorname{grad}}_{\underline{r}'} f(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \\ &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \cdot \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') \cdot ik \hat{\underline{r}} f(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \\ &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\approx} -ik \left[\frac{1}{4\pi} \hat{\underline{r}} \cdot \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \frac{1}{4\pi} \hat{\underline{r}} \cdot \int_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') f(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \right] = 0 \end{aligned}$$

\underline{E}^0 et $\hat{\underline{r}}$ sont bien orthogonaux, donc $\underline{E}^0 = \underline{E}_{tg}^0 = -\hat{\underline{r}} \times (\hat{\underline{r}} \times \underline{E}^0)$.

$$\begin{aligned} \underline{E}^0(\hat{\underline{r}}) &= -\hat{\underline{r}} \times (\hat{\underline{r}} \times r e^{ikr} \underline{E}^d) \\ &= -\hat{\underline{r}} \times (\hat{\underline{r}} \times r e^{ikr} \underline{I}_1) \quad \text{car } \hat{\underline{r}} \times \underline{I}_2 = 0 \\ &= \frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \times \left(\hat{\underline{r}} \times \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \right) \end{aligned} \quad (9)$$

2.1.3 Opérateur de rayonnement

La connaissance des courants \underline{J} grâce à l'EFIE permet donc de déterminer $\underline{E}^0(\hat{\underline{r}})$ le champ lointain rayonné par l'objet Γ dans une direction $\hat{\underline{r}}$ grâce à l'opérateur de rayonnement.

$$A^{\Gamma} : (\hat{\underline{r}}, \underline{J}) \mapsto A^{\Gamma}(\hat{\underline{r}}, \underline{J}) = \frac{4i\pi}{k} \underline{E}^0(\hat{\underline{r}}) \quad (10)$$

Soit d'après (9),

$$A^{\Gamma}(\hat{\underline{r}}, \underline{J}) = -\hat{\underline{r}} \times \left(\hat{\underline{r}} \times \int_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') f(\hat{\underline{r}}, \underline{r}') d\underline{r}' \right) \quad (11)$$

2.1.4 Surface équivalente radar

La SER est une mesure de la densité surfacique d'énergie des OEM rayonnée à l'infini d'une objet dans une direction donnée. Cette SER est donc fonction de la géométrie de l'objet mais aussi de la direction d'observation.

Maintenant que nous sommes capables de déterminer \underline{E}^0 , la SER σ de l'objet est définie pour une direction d'observation \hat{r} par

$$\sigma(\hat{r}) := 10 \log \left(\frac{\|\underline{E}^0(\hat{r})\|^2}{4k} \right) \quad (12)$$

2.2 Rappels de mathématiques

Nous sommes toujours dans le cas du conducteur parfait et nous repartons des formules précédentes. Nous rappelons que nous cherchons à résoudre sur Γ :

$$-\underline{E}_t^i(\underline{r}) = \underbrace{-ik \int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \frac{i}{k} \underline{\text{grad}}_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \text{div}_{\Gamma} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \right)}_{I_{PEC}} \quad (13)$$

2.2.1 Espace fonctionnel Hdiv

On constate que dans le 2eme terme de l'équation ci-dessus que l'on a besoin de la divergence surfacique $\text{div}_{\Gamma} \underline{J}$. Il faut donc que notre espace nous permette de donner un sens à $\int g \text{div}_{\Gamma} \underline{\Phi}$.

Cet espace est

$$U = H_{\text{div}}(\Gamma) = \{ \underline{\Phi} \in L^2(\Gamma, \mathbb{C}^3), \text{div}_{\Gamma} \underline{\Phi} \in L^2(\Gamma) \}$$

De plus le fait que les courants sont tangents à la surface fait que l'on rajoute à U la condition $\underline{\Phi} \cdot \underline{n} = 0$.

2.2.2 Discrétisation du problème

On discrétise Γ en un ensemble de mailles : soit $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n = \bigcup_j^n K_j; \quad X^h = U|_{\Gamma_n} := H_{\text{div}}(\Gamma_n)$$

Puisque X^h est de dimension finie, on peut trouver une base $(\Phi_i)_{i=1,\dots,n}$ de cet espace. On va alors résoudre le problème approché sur Γ_n en utilisant la base de cet espace. Cependant il faut que cette base vérifie la condition de continuité tangentielle des champs le long des arêtes.

Ces fonctions de base sont celles de Rao-Wilton-Glisson[7, Prop 5.4, p.40].

2.2.3 Éléments finis de Rao-Wilton-Glisson

Soit K une maille de notre domaine Γ_n , un triangle de sommets $(a_j)_{j=1,2,3}$. Dans une maille K on pose \underline{n} la normale sortante sur une arête :

$$\begin{aligned} \Phi_j(x) &= \frac{x - a_{j-1}}{2|K|} \quad \forall x \in K \\ \Phi_j(x) \cdot \underline{n}_i &= \frac{\delta_{i,j}}{\|\underline{k}'_j\|} \quad \forall x \in \underline{k}'_i \\ \tilde{J}|_K &= \sum_{i=1}^3 I_{i,K} \Phi_i, \quad I_{i,K} = \int_{\underline{k}'_i} \underline{J} \cdot \underline{n}_i dl \end{aligned}$$

Les Φ_j sont les fonctions de bases définies sur une maille. Puisqu'une arête est commune uniquement à 2 mailles comme Γ est fermée, il existe autant de fonctions de base que

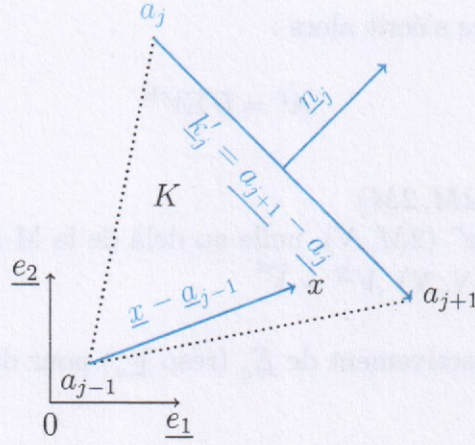


FIG. 2 – Fonction de base de Rao-Wilton-Glisson

d'arêtes et chaque fonction de base a son support sur les 2 triangles ayant cette arête commune.

Le but est alors de déterminer la famille $I = (I_j)_{j=1,\dots,N}$ inconnue du problème et définie sur chaque arête qui permet d'avoir $\hat{J} = \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i \approx J$

2.2.4 Décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de rayonnement

Soit l'opérateur de rayonnement défini en page 6 :

$$A^\Gamma(\hat{r}, J) = -\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \int_\Gamma J(r') f(\hat{r}, r') dr' \right)$$

En plus de la discrétisation en maillage, on va aussi discrétiser le domaine angulaire d'observation $\Delta\Omega \approx \hat{\Delta}\Omega = (\hat{r}_i)_{i=1,\dots,M}$ en supposant $M \ll N$. Sur une direction d'observation \hat{r}_i :

$$\hat{A}^\Gamma(\hat{r}_i, J) = -\hat{r}_i \times \hat{r}_i \times \int_{\Gamma_n} \sum_{j=1}^N I_j \Phi_j(r') f(\hat{r}_i, r') dr'$$

On peut alors écrire matriciellement l'OR A^Γ

$$\hat{A}_{i,j}^\Gamma = -\hat{r}_i \times \hat{r}_i \times \int_{\Gamma_n} \Phi_j(r') f(\hat{r}_i, r') dr' \quad (14)$$

Cependant le terme (i, j) de cette matrice est un élément de la surface Γ , et possède donc deux composantes. On va donc réécrire la matrice afin de différencier les 2 composantes. La convention qui a été choisie dans le programme est de contenir dans les M premières lignes les composantes selon \underline{e}_θ puis dans les suivantes celles selon \underline{e}_ϕ .

On a alors une matrice \hat{A}^Γ de taille $(2M, N)$

$$\tilde{A}^\Gamma = \begin{pmatrix} \hat{A}^{\Gamma\theta} \\ \hat{A}^{\Gamma\phi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{A}_{i,j}^{\Gamma\theta} = \hat{A}_{i,j}^\Gamma \cdot \underline{e}_\theta(\hat{r}_i) \\ \hat{A}_{i,j}^{\Gamma\phi} = \hat{A}_{i,j}^\Gamma \cdot \underline{e}_\phi(\hat{r}_i) \end{matrix}$$

Et la SVD de cette matrice s'écrit alors :

$$\hat{A}^\Gamma = U \Sigma V^H \quad (15)$$

avec

- U matrice unitaire $(2M, 2M)$
- Σ matrice "diagonale" $(2M, N)$, nulle au delà de la M -ième ligne.
- V matrice unitaire (N, N) , $V^H = \bar{V}^t$

A l'avenir, on parlera respectivement de \underline{E}_q (resp \underline{V}_q) pour désigner la q -ième colonne de U (resp. V).

De plus, les coefficients de Σ non nuls sont appelés les valeurs singulières. Elles sont notées $\mu_q = \Sigma(q, q)$ et sont strictement décroissantes : pour tout q , $\mu_q > \mu_{q+1}$.

$$\text{Ainsi } \hat{A}^\Gamma = \sum_{q=1}^N \mu_q \underline{E}_q \underline{J}_q^*.$$

\hat{A}^Γ est un opérateur continu et compact de $U \subset L^2(\Gamma)$ dans $C^p(S_\infty)$ pour tout p dans \mathbb{N} et où S_∞ est la sphère unité (dit opérateur régularisant). Alors les valeurs propres de \hat{A}^Γ décroissent exponentiellement vite vers 0 [2, p.491, Lemme A-4].

$$\exists C \in \mathbb{R}^+, \mu_q \leq \frac{C}{q^p}, \forall p \in \mathbb{N}$$

On peut écrire $\hat{A}^\Gamma = \tilde{A}^\Gamma + Res$ où

$$\tilde{A}^\Gamma = \sum_{q=1}^Q \mu_q \underline{E}_q \underline{J}_q^*, \quad Res = \sum_{q=Q+1}^N \mu_q \underline{E}_q \underline{J}_q^*$$

On pourrait chercher Q tel que l'erreur $\|A^\Gamma \underline{J} - \tilde{A}^\Gamma \underline{J}\|_{L^2(S_\infty)}$ soit satisfaisante. Dans notre cas, ce travail a déjà été fait, et

$$Q > 2 + (kR_s)^2 \frac{\Delta\theta\Delta\phi}{\pi^2} \quad (16)$$

La matrice de l'opérateur de rayonnement considéré est alors \hat{A}^Γ réduit à ses Q premières valeurs singulières, noté \tilde{A}^Γ .

$$\tilde{A}^\Gamma = \tilde{U} \tilde{\Sigma} V^H \quad (17)$$

avec

- \tilde{A}^Γ matrice (Q, N)
- \tilde{U} matrice unitaire (Q, Q)
- $\tilde{\Sigma}$ matrice diagonale (Q, Q) .
- V matrice unitaire (N, N) , $V^H = \bar{V}^t$

3 Contribution du stage

L'apport de ce stage est l'ajout de conditions d'impédance à l'opérateur de rayonnement. Dans un premier temps, nous définirons ce qu'est une condition d'impédance et l'apport final sera présenté en fin de section.

3.1 Condition d'impédance et opérateur de rayonnement

On va d'abord définir ce qu'est une condition d'impédance, et comment la calculer dans le cas de l'approximation des plans tangents.

3.1.1 Formule de la condition d'impédance de Leontovitch dans le cas de l'approximation du plan tangent

La condition d'impédance modélise le fait que notre objet est parfaitement conducteur et recouvert d'une couche d'épaisseur d possédant des caractéristiques électromagnétiques (ϵ_1, μ_1) [3, p.143]. Cette condition se formule sur Γ par :

$$\begin{aligned} -\underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{E}) - \mathcal{Z}(\underline{n} \times \underline{H}) &= 0 \\ \underline{E}_{tg} - \mathcal{Z}\underline{J} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Où \mathcal{Z} est l'opérateur d'impédance. On va retrouver la formule dans le cas où la surface peut être localement approchée par un plan infini de normale \underline{e}_z (quitte à faire des homothéties) et sur lequel l'onde incidente arrive avec un angle θ .



Dans tout ce qui suit, \underline{H} et \underline{J} sont normalisés par η_0

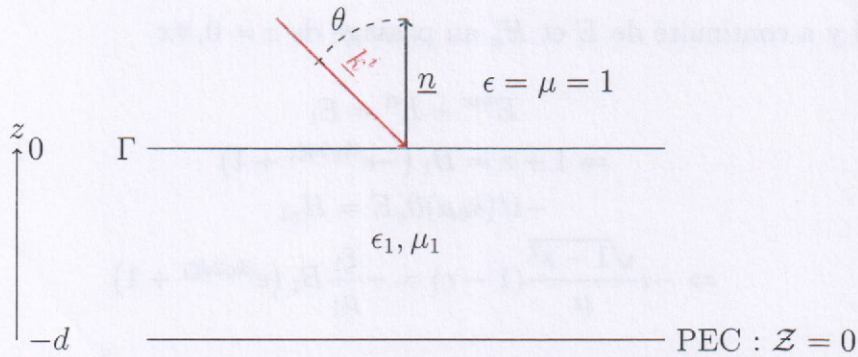


FIG. 3 – Vue en coupe de l'approximation du plan tangent.

Rappel de Maxwell en convention harmonique pour $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} \underline{\text{rot}} \underline{H} &= i \frac{k}{\eta} \underline{E} \\ \underline{\text{rot}} \underline{E} &= -ik\eta \underline{H} \\ k &= k_0 \sqrt{\epsilon \mu} & \eta &= \sqrt{\mu / \epsilon} \end{aligned}$$

Les composantes (x, y, z) de ces champs en polarisation électrique sont :

$$\begin{aligned}\underline{E} &= (0, E, 0)^t \\ \underline{H} &= -\frac{i}{k_0\mu}(\partial_z E, 0, -\partial_x E)^t \quad \underline{J} = (0, H_x, 0)^t\end{aligned}$$

Les solutions sont $E = e^{ixk_x} (Ae^{izk_z} + Be^{-izk_z})$ avec $k_x = k_0s$, $s = \sin(\theta)$, $0 \leq s \leq 1$. C'est une onde propagative. Ainsi pour $z > 0$ on a $E = E^i + E^d$ où $E^i = e^{i(xk_x + zk_0\sqrt{1-s^2})}$ et $E^d = re^{i(xk_x - zk_0\sqrt{1-s^2})}$.

Ainsi dans le matériau, en notant $\xi_1 = \sqrt{\epsilon_1\mu_1 - s^2}$

$$\begin{aligned}E_1 &= e^{ixk_x} (A_1 e^{ik_0 z \xi_1} + B_1 e^{-ik_0 z \xi_1}) \\ H_1 &= e^{ixk_x} \frac{\xi_1}{\mu_1} (A_1 e^{ik_0 z \xi_1} - B_1 e^{-ik_0 z \xi_1})\end{aligned}$$

La condition de conducteur parfait en $z = -d$ s'écrit

$$\begin{aligned}Z = 0 &\Rightarrow E_1 = 0 \\ e^{(ixk_x - ik_0 d \xi_1)} (A_1 + B_1 e^{ik_0 2d \xi_1}) &= 0 \quad \forall x\end{aligned}$$

On a donc dans le matériau

$$\begin{aligned}A_1 &= -B_1 e^{ik_0 2d \xi_1} \\ E_1 &= e^{ixk_x} B_1 (-e^{ik_0(z+2d)\xi_1} + e^{-ik_0 z \xi_1}) \\ H_{x1} &= -e^{ixk_x} \frac{\xi_1}{\mu_1} B_1 (e^{ik_0(z+2d)\xi_1} + e^{-ik_0 z \xi_1})\end{aligned}$$

Et comme il y a continuité de E et H_x au passage de $z = 0$, $\forall x$

$$\begin{aligned}E^{inc} + E^d &= E_1 \\ \Rightarrow 1 + r &= B_1 (-e^{ik_0 2d \xi_1} + 1) \\ -i/(k_0\mu) \partial_z E &= H_{x1} \\ \Rightarrow -i \frac{\sqrt{1-s^2}}{\mu} (1-r) &= -\frac{\xi_1}{\mu_1} B_1 (e^{ik_0 2d \xi_1} + 1)\end{aligned}$$

Notons

$$\alpha = (-e^{ik_0 2d \xi_1} + 1) \quad \beta = \frac{\xi_1}{\mu_1} (e^{ik_0 2d \xi_1} + 1) \frac{\mu}{i\sqrt{1-s^2}}$$

On a le système

$$\begin{cases} \alpha B_1 - r = 1 \\ \beta B_1 + r = 1 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad B_1 = \frac{2}{\alpha + \beta}, \quad A_1 = -\frac{2e^{ik_0 2d \xi_1}}{\alpha + \beta}$$

Dans le cas de la condition d'impédance de Leontovitch, Z est un scalaire fois l'identité, c'est à dire $\underline{E}_{tg} = Z \underline{n} \times \underline{H} \Rightarrow \underline{E} = Z \underline{H}_x$ quand $z = 0$.

$$Z = -\frac{\mu_1}{\xi_1} \left(\frac{1 - e^{ik_0 2d\xi_1}}{1 + e^{ik_0 2d\xi_1}} \right)$$

En notant $t_1 = -\frac{\sin^2 \theta}{n_1^2}$; $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ sachant $\xi_1 = \sqrt{n_1^2 - s^2}$, $s = \sin(\theta)$; $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$

$$Z = i \frac{\eta_1}{\sqrt{1+t_1}} \tan(k_1 d \sqrt{1+t_1}) \quad (19)$$

Quand on a un matériau à fort indice, i.e $|n_1| \ll 1$, $t_1 \approx 0$.

3.1.2 CIOE

On présente brièvement les condition d'impédance d'ordre élevé (CIOE)[6]. Cependant, le reste du rapport se concentrera sur le cas Leontovitch, qui a été implémenté avec succès et non les CIOE.

$$(CIO1) : \underline{E}_t = \sum_{p=1}^2 \tau_p a_0^p J^p + \frac{a_1}{k^2} L \underline{J} \quad (20)$$

$$(21)$$

L est l'opérateur de Hodge :

$$L \underline{J} = \underline{\text{grad}}_{\Gamma} \text{div}_{\Gamma} \underline{J} - \underline{\text{rot}} ((\underline{n} \cdot \underline{\text{rot}} \underline{J}) \underline{n})$$

On notera que la condition de Leontovitch s'obtient pour $a_1 = 0$, $a_0^1 = a_0^2$, $\tau_1 = \underline{e}_{\theta}$, $\tau_2 = \underline{e}_{\phi}$ (revêtement isotrope).

3.1.3 Représentation intégrale avec condition d'impédance

Les démonstrations du cas PEC peuvent être reprises pour le cas d'un objet impédant.

$$\underline{E}_{tg} = Z \underline{J}; \underline{K} = \underline{n} \times \underline{E}_{tg}; \underline{K} = \eta \underline{k}$$

En répétant le travail de la partie 2.1, on obtient la contribution des courants magnétiques $\underline{K} = \underline{n} \times \underline{E}$ au champ \underline{E}^d :

$$\begin{aligned} \underline{E}^d(\underline{r}) = & -ik \int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' - \frac{i}{k} \underline{\text{grad}} \left(\int_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \text{div} \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \right) \\ & - \int_{\Gamma} \left(\underline{\text{grad}}_{\underline{r}'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) \times \underline{K}(\underline{r}') d\underline{r}' \end{aligned} \quad (22)$$

3.1.4 Champ lointain

En répétant le protocole pour le conducteur parfait, on a :

$$\begin{aligned} \underline{E}^0(\underline{r}) &= (8) - \underbrace{re^{ikr} \lim_{|r| \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \left(\underline{\text{grad}}_{\underline{r}'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) \times \underline{K}(\underline{r}') d\underline{r}'}_{I_3} \\ &\Rightarrow I_3 \stackrel{|r| \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \hat{\underline{r}} \times \underline{K}(\underline{r}') d\underline{r}' \end{aligned} \quad (23)$$

Sachant que dans le cas PEC, $\hat{\underline{r}} \cdot \underline{E}^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}} \cdot \underline{E}^0 &= \hat{\underline{r}} \cdot (I_3) \\ &\stackrel{|r| \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} \underbrace{\hat{\underline{r}} \cdot [\hat{\underline{r}} \times \underline{K}(\underline{r}')] f(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}'}_0 = 0 \end{aligned}$$

De nouveau, on a bien $E^0 = E_{tg}^0 = -\hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{r}} \times \underline{E}^0$.

Puis on arrive à une nouvelle formule pour le champ lointain \underline{E}^0 .

$$\begin{aligned} \underline{E}^0 &= -\hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{r}} \times \underline{E}^0 \\ &= \frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \times \left(\hat{\underline{r}} \times \int_{\Gamma} f(\hat{\underline{r}}, \underline{r}') \underline{J}(\underline{r}') d\underline{r}' \right) - \hat{\underline{r}} \times (\hat{\underline{r}} \times I_3) \\ &\stackrel{(9)}{=} (9) + \frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \times \left(\hat{\underline{r}} \times \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \hat{\underline{r}} \times \underline{K}(\underline{r}') d\underline{r}' \right) \\ &= (9) - \frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \hat{\underline{r}} \times \underline{K}(\underline{r}') d\underline{r}' \end{aligned}$$

Or sur Γ , $\underline{K} = \underline{n} \times \underline{E} = \underline{n} \times \underline{E}_{tg} = \underline{n} \times \underline{ZJ}$

$$\underline{E}^0(\hat{\underline{r}}) = (9) - \frac{ik}{4\pi} \hat{\underline{r}} \times \underline{n} \times \int_{\Gamma} f(\underline{r}, \underline{r}') \underline{ZJ}(\underline{r}') d\underline{r}' \quad (24)$$

3.1.5 Opérateur de rayonnement

Par définition (10),

$$A^{\Gamma}(\hat{\underline{r}}, \underline{J}) = (11) + \hat{\underline{r}} \times \underline{n} \times \int_{\Gamma} f(\hat{\underline{r}}, \underline{r}') \underline{ZJ}(\underline{r}') d\underline{r}' \quad (25)$$

L'objectif du stage est alors d'implémenter \mathcal{Z} .

3.2 Implémentation informatique

Il se trouve que dans le programme, l'opérateur \mathcal{Z} est déjà présent !

Nous nous sommes limités à la condition de Leontovitch $\mathcal{Z} = \underline{ZId}$ et nous avons implémenté le terme correspondant dans l'opérateur de rayonnement, puis nous avons vérifié que le champ lointain obtenu par SVD de l'OR et celui obtenue par l'OR directement (25) sont identiques.

Ces comparaisons se trouvent en partie 4.1.

3.3 Développement d'outils de visualisation Scilab

En plus de la tâche principale d'ajout des CI dans l'opérateur de rayonnement, une tâche supplémentaire de création d'outils de visualisation sous Scilab a été demandée. J'ai choisi de respecter les critères suivants pour la réaliser :

Critère	Description
Portabilité	Les outils doivent être aussi proches que possible de la syntaxe Matlab pour une réutilisation facile des scripts existants ou à défaut, un portage facile.
Indépendance	Les outils doivent avoir un minimum de dépendance entre eux et utiliser au mieux les fonctions Scilab.
Simplicité	Les outils possèdent une documentation propre respectant la norme Scilab, afin d'être facilement compris.

TAB. 1 – Tableau des critères principaux

Ainsi c'est une trentaine de fonction qui ont été ajoutées (cf Annexe A.1), allant de l'émulation de fonction Matlab (trisurf, axis, whitebg, sort, etc) à des fonctions de recherche de sphère minimale à un nuage de points, en passant par le dessin de champs de vecteurs en 3D.

Toutes ces fonctions sont nécessaires pour interagir avec le code Fortran à différents niveaux : ainsi, les fonctions de recherches de chaînes de caractères permettent de lire un fichier de paramètres et d'en extraire la structure Scilab. Cela n'est pas utile si le calcul est à faire, mais l'est beaucoup plus si le calcul a déjà été fait sur un cluster par exemple.

Cependant, étant le seul à utiliser ces outils, la gestion des exceptions n'a pas été prise en compte, et de nombreux bugs peuvent apparaître.

trisurf

trisurf de Matlab.

Séquence d'appel

`trisurf(nodes,x,y,z [,opt_args])`

Paramètres

nodes :
matrice réelle taille (nelements x npointpartelement).

x,y,z :
vecteurs réels taille (npoints)

opt_args :
arguments optionnels par couple 'key',val

Description

Va représenter le maillage défini par les points en X,Y,Z et les éléments définis par les points NODES.

Détails de opt_args:

- **key = 'value'** : val est un vecteur de réel taille (nelement). Appliquera une couleur relative à value sur chaque élément. Par défaut, vecteur de 1.
- **key = 'min'** : val est un réel. Si 'value' est indiqué, appliquera une couleur relative à [min,value] sur chaque élément. Par défaut, %inf.
- **key = 'max'** : val est un réel. Si 'value' est indiqué, appliquera une couleur relative à [value,max] sur chaque élément. Par défaut, -%inf.
- **key = 'color'** : val est un entier. Appliquera la couleur color sur la surface; Par défaut, 2.

Exemples

```
nodes = [ 1 2 ; 1 1 ]
x = [ 1 1 - ]
y = [ 1 1 - ]
z = [ 1 1 - ]
// Affichage simple
trisurf(nodes,x,y,z)
pause
// On change la couleur
trisurf(nodes,x,y,z, 'value', 1)
value = [-1 1]
pause
trisurf(nodes,x,y,z, 'value', value)
pause
// On change l'échelle
trisurf(nodes,x,y,z, 'value', value, 'min', 0, 'max', 1)
```

Voir aussi

- [plot3d](#)

Auteurs

- Pierre Payen (06/2016)

FIG. 4 – Exemple d'aide intégrée à la documentation Scilab.

4 Résultats

4.1 Validation des CI

4.1.1 CI de Leontovitch

On lance les calculs avec le domaine d'observation angulaire en degrés $\Delta\Omega = [20, 40] \times [-5, 5]$ et $\delta\theta = 3, \delta\phi = 3 \Rightarrow M_\theta = 6$, sur un objet sphérique de rayon 1m maillé sur 264 éléments avec un onde de fréquence 50Mhz et $Z = 0.22 + 0.191i$ (matériau fort indice) : le programme renvoie l'erreur relative dans un fichier dont on extrait la partie qui nous intéresse.

# Test	SER(OPRAY)	- SER(EXACTE)	/	SER (EXACTE)
# idir	serTM	phaseTM	serTE	phaseTE
1	1.435E-07	3.583E-08	2.820E-08	6.344E-08
2	1.344E-07	3.561E-08	2.171E-08	5.890E-08
3	1.261E-07	3.538E-08	1.529E-08	5.440E-08
4	1.182E-07	3.515E-08	8.826E-09	4.992E-08
5	1.434E-07	3.626E-08	2.519E-08	6.332E-08

TAB. 2 – Erreur relative entre les SER et les phases des 2 solutions, cas Leontovitch. La lère colonne représente la p-ième direction d'observation (θ_i, ϕ_j) avec $p = M_\theta(i - 1) + j$. Seules les 5 premières directions sont affichées.

On peut voir dans Tab 2 que l'erreur est d'au plus de l'ordre de 10^{-7} . J'ai répété le processus pour d'autres paramètres et d'autres maillages, on obtient toujours une erreur relative de cet ordre de grandeur, ce qui valide le code.

4.2 Consistance de la SVD avec CI de Leontovich

Les résultats qui vont suivre servent à démontrer la consistance du modèle, puis l'impact des valeurs singulières sur les choix des champs singuliers. Les objets modélisés et les paramètres ont été choisis arbitrairement et ne représentent rien de factuel.

Cas d'un matériau M1 d'impédance $Z = 3.17 * 10^{-3} + 9.82 * 10^{-1}i$.

L'objet est une sphère de rayon 1m. L'onde incidente est de fréquence 40 Mhz.

La figure 5 représente les valeurs singulières normalisées pour le maillage le plus fin de l'objet. On peut révéifier leur décroissance, mais le Q est si petit (0.02) que l'on ne peut pas voir le plateau (décroissance immédiate).

La figure 6 représente l'erreur relative des valeurs singulières entre ce maillage de référence et les autres. Une pente $O(h)$ est affichée à titre indicatif, mais aucune vitesse de convergence n'est attendue théoriquement. L'erreur est affichée en norme L^2 . Mais comme les champs sont des vecteurs complexes, pour pouvoir être affichés, on a pris $\|\underline{E}\|_{L^2} = \sqrt{|E^\theta|^2 + |E^\phi|^2}$.

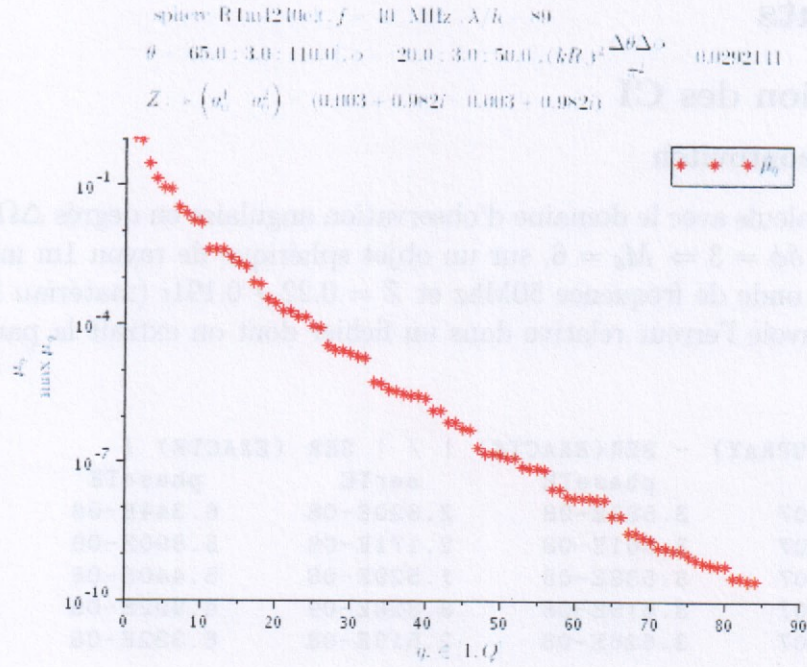


FIG. 5 – $\hat{\mu}_q$ en fonction de q pour le maillage le plus fin

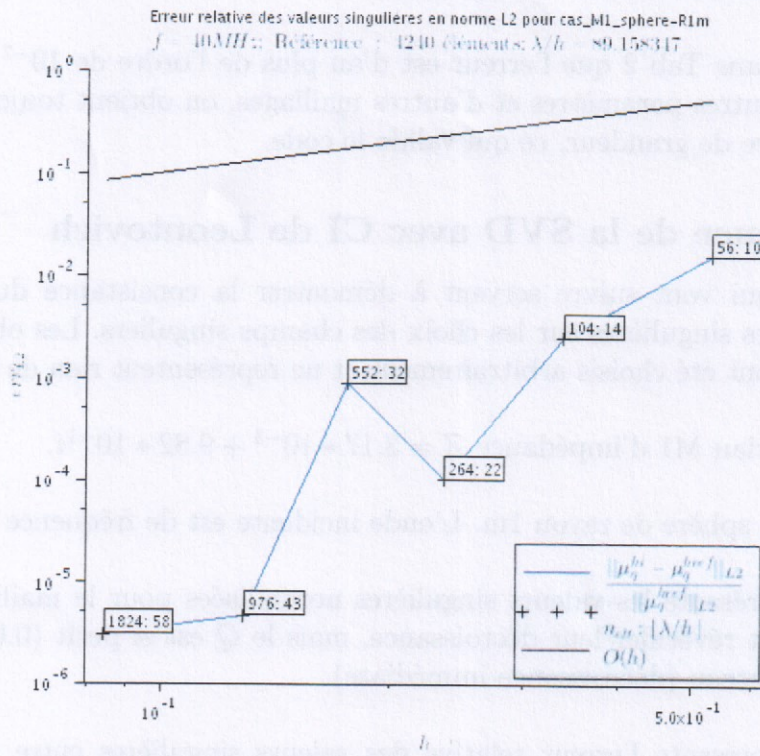


FIG. 6 – $\Delta\mu_q$ en norme $L2$; les rectangles contiennent le nombre d'éléments du maillage et le rapport λ/h correspondant.

La figure 7 représente le champ E_1 dans le domaine angulaire $\Delta\Omega$ pour le maillage le plus fin. Nous le nommerons \underline{E}_1^{ref} .

La surface représentée est donc la sphère unité dans la portion $\Delta\Omega$ et non le maillage qui est par coïncidence aussi une sphère.

Les couleurs représentent la norme L^2 du champ, et les vecteurs les composantes $\underline{e}_\theta, \underline{e}_\phi$ de ce dernier dans le repère $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$.

f 10.1MHz: Référence : 4240 éléments. Champ Eq.q = 1
 θ 65; 3; 110.5 - 20; 3; 50

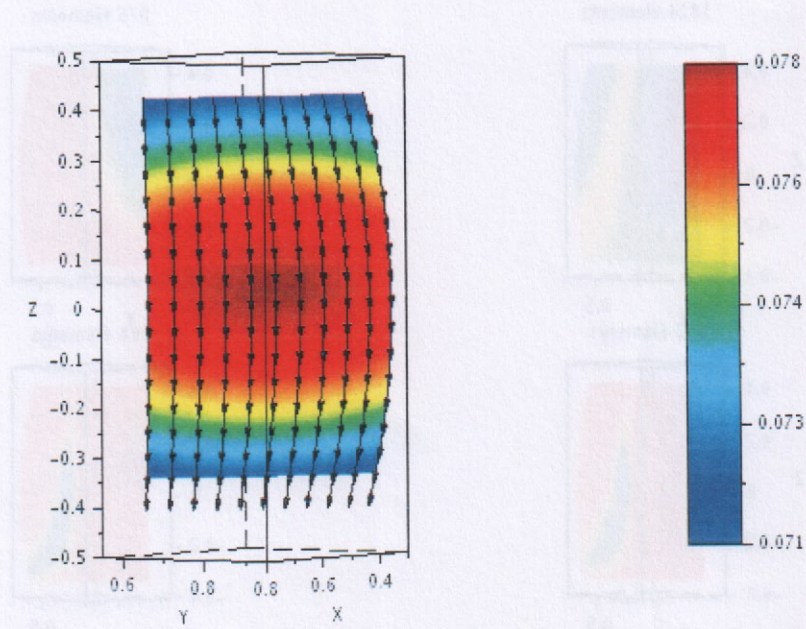


FIG. 7 - \underline{E}_1 tracé sur la sphère unité pour le maillage sphère à 4240 éléments dans le domaine angulaire $\Delta\theta\Delta\phi$.

La figure 8 représente e_{rr} l'erreur relative en norme L^2 des normes des champs pour chaque maillage, c'est à dire que chaque sous-graphe représente $e_{rr}(\underline{r}) = \log \frac{\|\underline{E}_1^h(\underline{r}) - \underline{E}_1^{ref}(\underline{r})\|_{L^2}}{\|\underline{E}_1^{ref}(\underline{r})\|_{L^2}}$.

Ce sont des valeurs calculées pour les (θ, ϕ) des directions d'observations, et les couleurs sur la surface sont obtenues en interpolant ces valeurs.

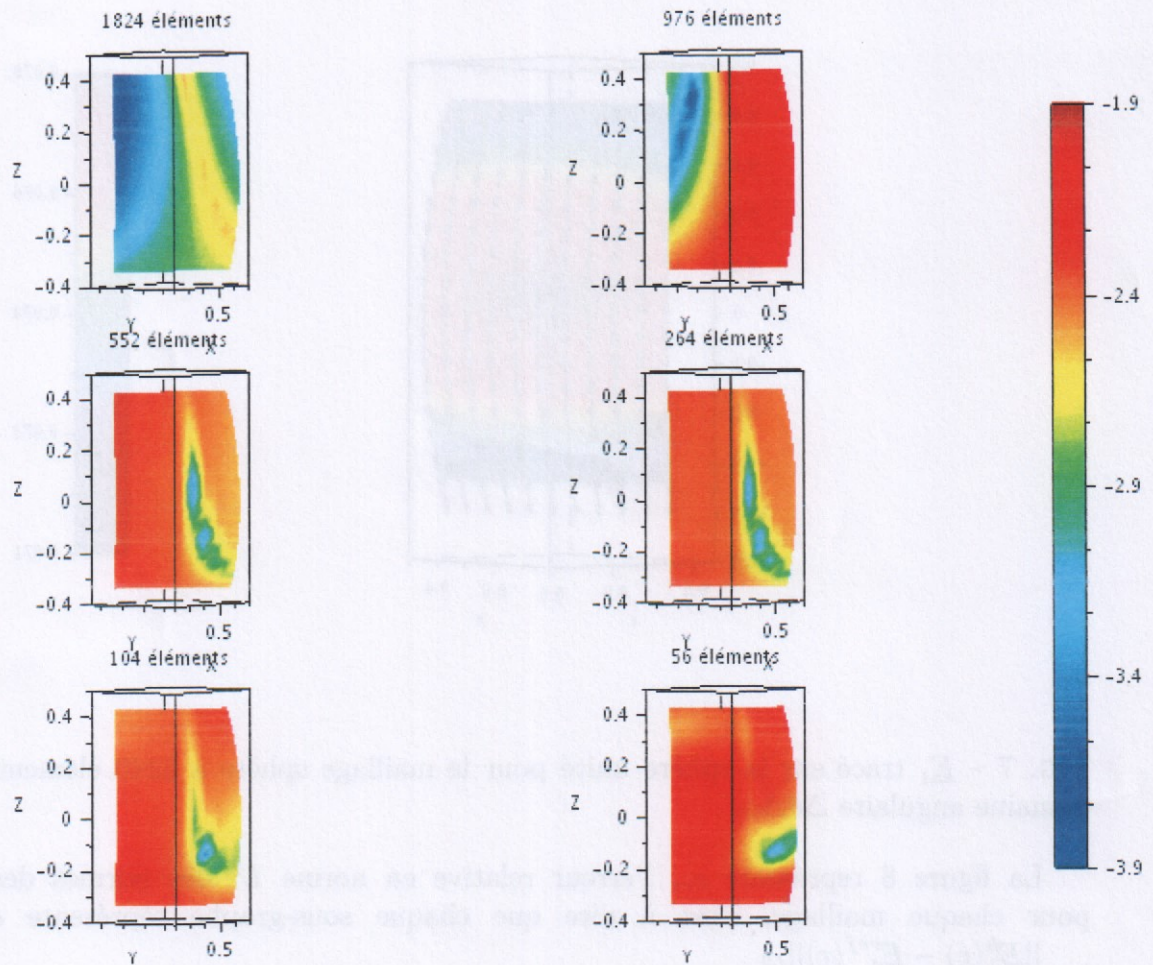


FIG. 8 – $\Delta \underline{E}_1$: Chaque sous-graphes représente le log de l'écart en norme L2 de \underline{E}_1 de ce maillage et de celui de référence (fig 7).

4.3 Cas du maillage sphère-cône

Cette fois, des résultats pour un seul maillage sont présentés. Le maillage est celui d'un cône sphère maillé sur 416 éléments.

Le domaine angulaire est de 20 à 120 degrés par pas de 5, convention colatitude (par rapport à Oz), de -45 à 45 par pas de 5 en longitude (par rapport à xOz). La condition d'impédance renseigne un matériau d'indice fort M2 $Z = 0.220 + 0.191i$

Les graphes 9, 11, 12 représentent respectivement les valeurs singulières, puis champs singuliers et courants singuliers pour certaines valeurs singulières.

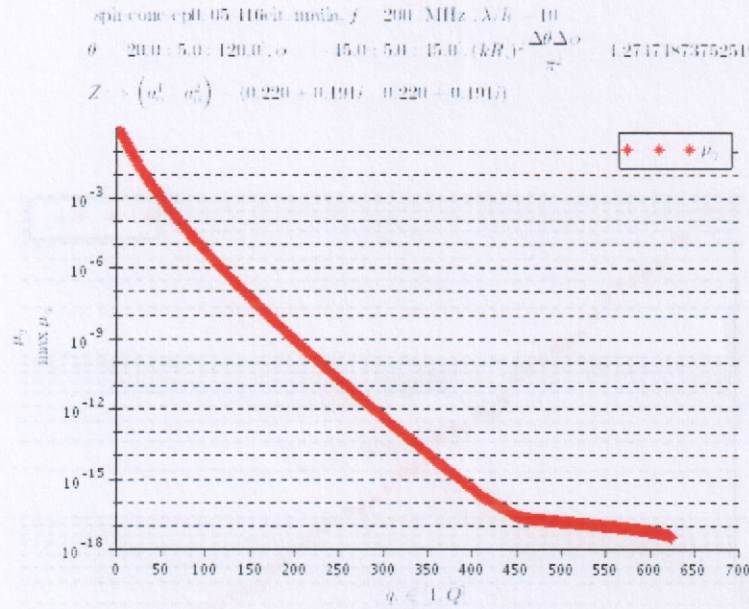


FIG. 9 – Valeurs singulières pour le cône-sphère. Totalité des valeurs singulières

Les graphes 11 et 12 représentent la même chose mais pour les 9 premières valeurs singulières. On montrera grâce à ces derniers le caractère négligeable de certains champs par rapport à d'autres, afin de rappeler l'impact de la valeur singulière sur le calcul.

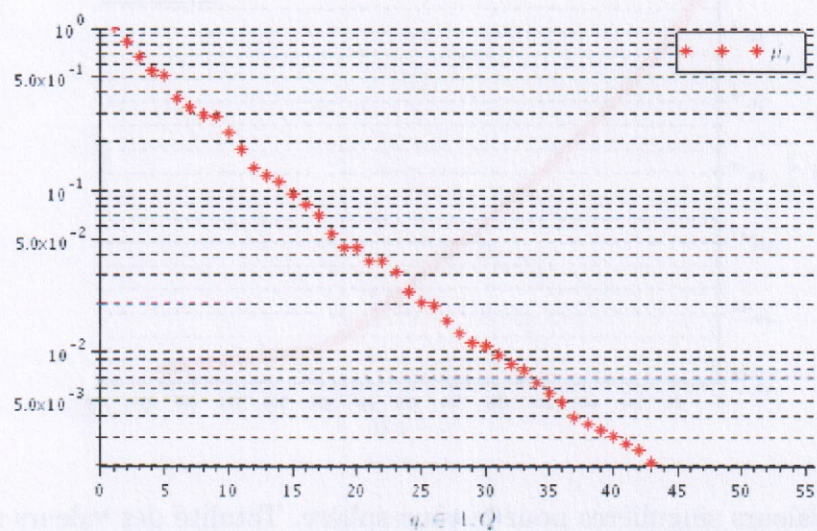


FIG. 10 – Valeurs singulières pour le cône-sphère. Aggrandissement sur les 44 premières valeurs singulières

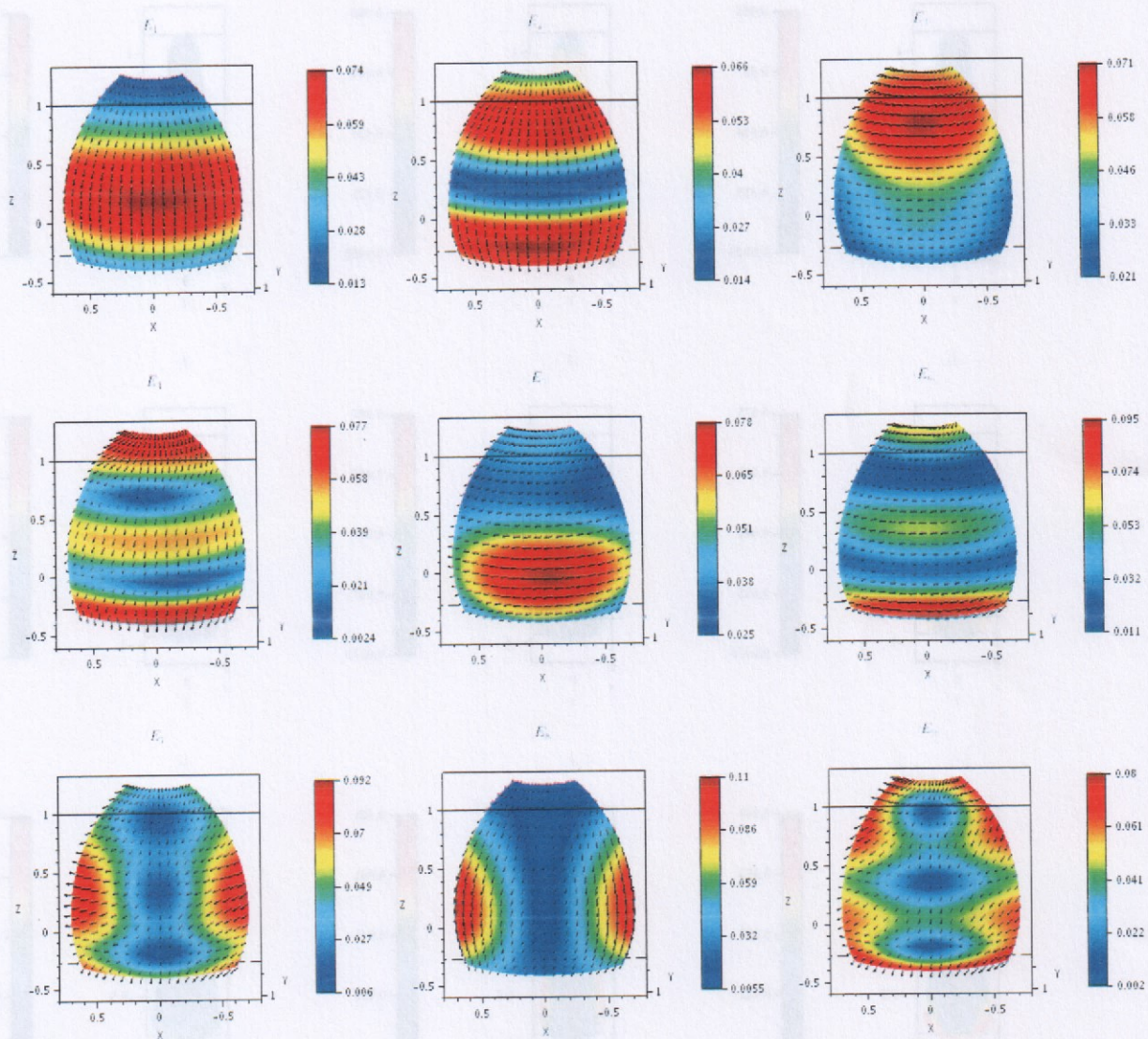


FIG. 11 – Champs singuliers pour $q = \{1, \dots, 9\}$

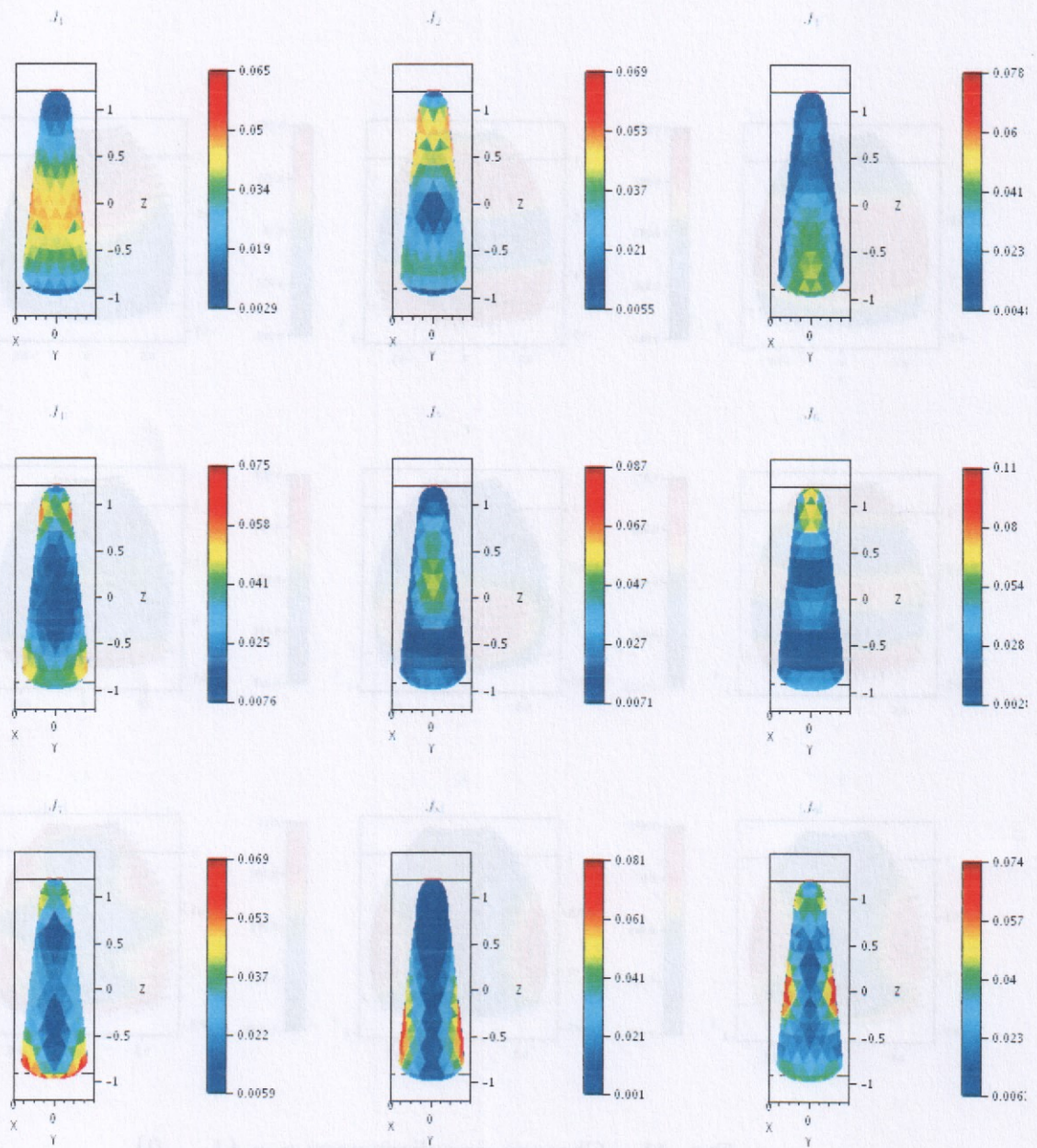


FIG. 12 – Courants singuliers pour $q = \{1, \dots, 9\}$

Analyse des figures 11 et 13 :
Si on applique l'OR à J_q on obtient :

$$A^\Gamma J_q = \sum_{p=1}^Q \mu_p E_p J_p^* J_q = \mu_q E_q$$

Autrement dit, l'effet du champ E_q est pondéré par sa valeur singulière μ_q . Ainsi, sur la figure 13, on a un champ E_{46} d'intensité 0.16 au maximum, double de celui de E_1 mais comme la valeur singulière relative est mille fois plus petite (voir fig 9), son effet est négligeable.

Par contre sur la figure 11, E_8 est 13 fois plus important que E_1 sur les bords latéraux du domaine angulaire, tandis que les valeurs singulières sont 8 fois plus petites. Dans ce cas, E_8 n'est plus négligeable.

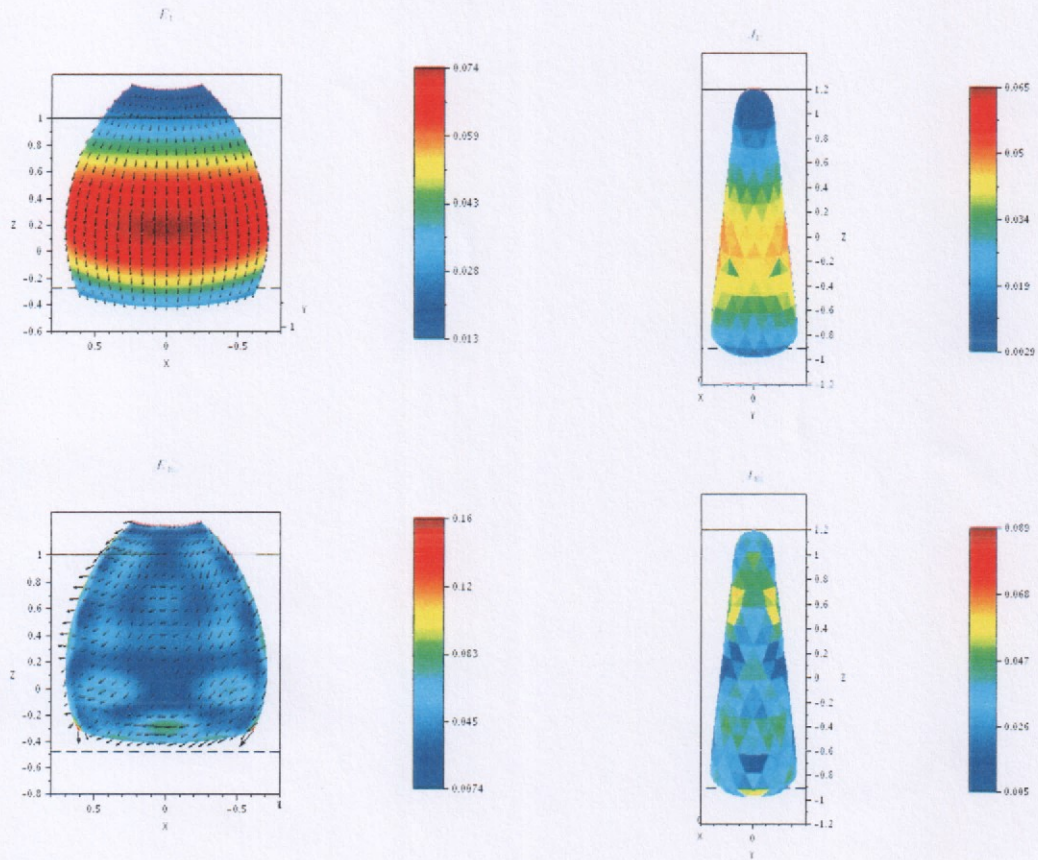


FIG. 13 – A gauche : champs singuliers pour $q = \{1, 46\}$. À droite : courants singuliers pour $q = \{1, 46\}$

Annexe des pages 11 et 12 :
Si on applique l'OA à \tilde{A}_1 , on obtient :

$$\tilde{A}_1 \tilde{A}_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_1 \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1 \tilde{A}_1$$

Ainsi, l'effet de champ \tilde{A}_1 est positif par sa valeur singulière λ_1 . Ainsi, sur la figure 14, on a un champ \tilde{A}_1 à intervalle $[0, 10]$ en ordonnée, double de celui de \tilde{A}_1 , mais comme la valeur singulière relative est elle-même plus petite (voir p. 9), son effet est négatif.

Par contre sur la figure 15, \tilde{A}_1 est 10 fois plus important que \tilde{A}_1 sur les points latéraux du domaine angulaire, tandis que les valeurs singulières sont 2 fois plus petites. Dans ce cas, \tilde{A}_1 a l'effet négatif.



Fig. 13 - A gauche : champs singuliers pour $p = [1, 10]$; A droite : champs singuliers pour $p = [1, 10]$

5 Conclusion

5.1 Déroulement du stage

La figure ci-dessous représente le déroulement du stage jusqu'à ce jour.

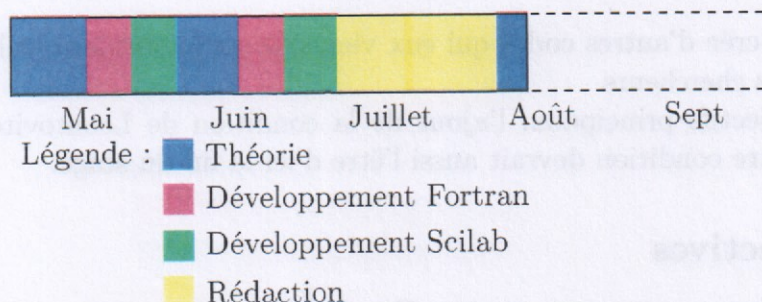


FIG. 14 – Vue schématique de l'organisation du stage.

Résumé des tâches effectuées :

- **Mai** : mise à niveau en électromagnétisme, cas PEC (lecture de cours et d'articles) et sur les codes, apprentissage du Fortran.
- **Juin** : étude des CI (bleu). Implémentation de la condition de Leontovitch (rouge) et développement des outils de visualisation Scilab (vert).
- **Juillet** : Poursuite du développement Scilab (vert). Rédaction de la présentation du 12 Juillet devant le département (jaune). Reprises des études théoriques après les commentaires de la présentation et rédaction du rapport en conséquence. Amélioration des codes (de manière parcimonieuse, non représenté sur le schéma).
- **Août** : Visite de M. Lafitte au CEA. Beaucoup de corrections apportées au rapport.

Travail à venir : Le reste du temps va être consacré aux CIOE et à l'amélioration du rapport pour le CEA. J'estime que les CIOE vont prendre une semaine à être implémentées et validées. Une fois cela fait, des perspectives sont évoquées en fin de section.

5.2 Bilan

5.2.1 Apport du stage au stagiaire

Ce stage fût l'occasion d'en apprendre plus sur l'électromagnétisme. Bien que ce rapport ne contienne que des résultats connus, j'ai manipulé plusieurs modèles couramment utilisés dans le domaine. Malgré cela, le manque de temps entre la rédaction de ce rapport et la date de fin effective du stage ne m'a pas permis de démontrer tous les résultats et je n'ai pas approfondir tous les modèles et il reste surement de nombreux points à corriger.

J'ai pu m'exercer au Fortran (77,90,2003) et ce stage m'a permis de voir suffisamment de codes pour connaître les outils de bases pour pouvoir développer dans ce langage. Ma connaissance du Scilab a beaucoup augmentée grâce à ce stage. J'aurai aussi l'opportunité de visiter le Laser MégaJoule, ce qui sera une expérience extraordinaire, bien que non directement liée au stage.

5.2.2 Apport du stage au CEA

Le premier apport est qu'en travaillant sur des codes, ceux-ci ont été remis aux goûts du jour. Mon tuteur m'a ainsi demandé d'uniformiser la syntaxe, de nettoyer les variables inutilisées. Les codes sont donc un peu plus rapides à prendre en main pour les prochains développeurs.

Ensuite, j'ai créé d'autres codes qui eux viennent compléter les outils déjà présent et à disposition des chercheurs.

Dans les objectifs principaux, l'ajout de la condition de Leontovitch est validée et intégrée, et l'autre condition devrait aussi l'être d'ici la fin du stage.

5.3 Perspectives

Les perspectives que ce stage permet d'envisager sont :

- On pourrait étudier la caractérisation de défaut géométrique ou de matériau via l'analyse de la SVD. L'idée est de se donner des directions d'observation, on cherche alors les courants ayant des valeurs particulières à un endroit du maillage, on cherche le courant singulier qui pourrait caractériser ces courants, on regarde le champ singulier associé dans les directions choisies, et enfin on étudie l'impact de ce champ singulier sur le champ total rayonné par toutes les autres valeurs singulières. Si cet impact est faible, l'idée est de dire qu'un défaut du maillage (un trou, fente, singularité) ou du matériau (impédance localement singulière) à l'endroit initialement trouvé n'aurait que peu d'impact sur le champ rayonné dans les directions choisies.
- Les codes gagneraient à être optimisés afin de pouvoir gérer des maillages plus fins (et donc des fréquences plus grandes). Par exemple, introduire des notions de parallélisme permettrait sûrement d'accélérer les opérations les plus coûteuses (OR, CI, SVD).
- Le principal frein à la méthode par SVD est son coût de calcul. Son optimisation algorithmique est donc très importante dans notre problématique. L'utilisation d'une double méthode QR semble être une première piste possible.

A Annexes

A.1 Scilab

Liste de toutes les fonctionnalités Scilab ajoutées lors du stage.

- Couplage code Fortran
 - cfie_init_data - Initialise une structure Scilab spécifique aux paramètres avec des valeurs pré-remplies.
 - cfie_read_data - Lit un fichier de données formaté en .txt et renvoie la structure de données en Scilab.
 - cfie_titre - Crée une chaîne de caractères qui synthétise les informations sur la simulation.
 - cfie_ui_init_data - Fenêtre graphique d'initialisation d'un fichier de données type.
 - cfie_write_data - Écrit le fichier de données.
 - getSVDmat - Lit les matrices renvoyées par la SVD.
 - msh - Structure de gestion de maillage type MLG, ICOS
 - plotVS - Trace les valeurs singulières.
 - plotnormcourant - Affiche les courants singulier sur la surface de l'objet.
- Entrees_Sorties
 - explorer - Boite de dialogue pour sélectionner un fichier ou un dossier.
 - mgetlinenumber - Lit un fichier et retourne le nombre de lignes.
- Graphiques
 - carttospheric - Passage de coordonnées et composantes sphériques à cartésiennes (convention colat-long) pour des vecteurs.
 - champ3d - Graphes 3D d'un champ de vecteurs.
 - champ3d1 - Graphes 3D d'un champ de vecteurs.
 - plotcolorbar - Dessin d'une colorbar sur la totalité de la figure.
 - sphereplot - Potentiel sur une partie de sphère.
 - spherictocart - Passage de coordonnées et composantes cartésiennes à sphériques (convention colat-long) pour un vecteur.
 - subplot2 - Surcharge de subplot pour gérer des subplots étendues sur plusieurs cases.
 - xstring3d - Affiche une chaîne de caractère dans l'espace.
- Matlab_emulation
 - axis - axis de Matlab.
 - cla - cla de Matlab.
 - colormap - colormap de Matlab.
 - grid - grid de Matlab.
 - hold - hold de Matlab.
 - num2str - num2str de Matlab
 - shading - shading de Matlab. Fonctionnel uniquement sur des objets fac3d.
 - sort - sort à la Matlab.
 - sortrows - sortrows de Matlab.
 - trisurf - trisurf de Matlab.
 - view - view de Matlab.
 - whitebg - whitebg de Matlab.
- Scilab++
 - buildjar - Depuis un dossier lib/scilab contenant des sous dossiers contenant des macros scilab en .sci, génère la doc en .xml et .jar associée.
 - help_from_sci_fr - Localisation de help_from_sci pour générer les .xml dans la langue locale.

- Sphere_Minimale
 - spheremin - Structure de gestion pour calcul de sphère englobante (bounding sphere) à un nuage de points 3D/2D.
- Strings
 - strindex2 - Surcharge de strindex pour gérer des vecteurs de chaînes de caractères.
 - strsubst2 - Surcharge de strsubst pour gérer les vecteurs de chaînes de caractères et améliorer la recherche en regexp.
 - strtrim - Supprime un caractère à droite et à gauche d'une chaîne de caractères.

Références

- [1] J. VAN BLADEL; "Electromagnetic fields"; *Mc. Graw Hill*; 1962.
- [2] G. GRUBB; "Functionnal Calculus of Pseudo-Differential Boundary Problems"; *Birkhäuser*; 1986.
- [3] Y.MOREL; "Décomposition en courants caractéristiques. Applications à l'analyse de SER"; *Thèse ENS Cachan*; Nov 2005.
- [4] A.COIGNAULT; "Mesure de la surface équivalente radar en basses fréquences et modes caractéristiques"; *Thèse Centrale Paris*; Avril 2009.
- [5] J.SCHORSCH; "Réduction du nombre d'inconnues pour le calcul du champ lointain"; *Univ. Bordeaux 1*; 2010.
- [6] B.STUPFEL, D.POGET; "Sufficient uniqueness conditions for the solution of the time harmonic Maxwell's equations associated with surface impedance boundary conditions"; *J. Comp. Phys.*; vol. 230,p. 4571-4587, 2011.
- [7] A.BENDALI; "Équations intégrales en électromagnétisme"; *Insa Toulouse*, <http://www.math.univ-toulouse.fr/~abendali/polyelec1314.pdf>; 2013.

