

Schéma de reconstruction exact sur les chocs isolés

Mathieu Rigal

Encadrante : Nina Aguillon

Référent universitaire : Hakim Boumaza

25 septembre 2019

Remerciements

Je tiens à dédier ces quelques lignes à toutes les personnes qui m'ont soutenu, d'une manière ou d'une autre, tout au long de ce stage. Sans elles, sans leur aide, mon travail n'aurait sûrement pas été ce qu'il est.

Je remercie en premier lieu Nina Aguilon pour m'avoir accepté en stage et encadré durant ces six mois. Cela a été un véritable plaisir pour moi de travailler avec elle, et c'est une chance de pouvoir continuer dans les années qui suivent. Sa pédagogie et sa gentillesse n'ont jamais failli.

J'aimerais également exprimer ma gratitude envers Martin Parisot pour avoir partagé avec moi ses conseils de programmation, ainsi que pour son aide, précieuse. Je remercie en même temps Emmanuel Audusse pour ses explications sur la reconstruction hydrostatique.

J'adresse ensuite mes remerciements à mes collègues de bureau, Nelly, Sibylle et Chourouk, pour l'ambiance chaleureuse tout au long de cette période. Je souhaiterais par la même occasion remercier Julien Guieu pour son support et sa bonne humeur, inconditionnelle.

Mes remerciements vont enfin à Jacques Sainte-Marie pour son accueil chaleureux au sein de l'équipe ANGE et pour l'opportunité qu'il m'offre, avec Nina et Nathalie, pour les trois années à venir.

Table des matières

Introduction	1
Objectifs du stage	1
Environnement de travail	1
1 Approche générale des lois de conservation	3
1.1 Introduction	3
1.2 Problème de Riemann	4
1.2.1 Cas linéaire	4
1.2.2 Cas non-linéaire	7
1.2.3 Notion d'entropie et unicité	8
2 Schémas numériques pour les lois de conservation	11
2.1 Méthodes de type volumes finis	11
2.1.1 Méthode de Godunov	12
2.1.2 Méthode de Harten-Lax-van Leer (HLL)	13
2.2 Aspect diffusif des méthodes usuelles	14
2.3 Schéma de reconstruction non-diffusif	16
2.3.1 Principe de base	16
2.3.2 Détection des chocs	17
2.3.3 Opérateur de reconstruction	18
2.3.4 Calcul des flux numériques	19
3 Equations de Saint-Venant sans topographie	23
3.1 Motivation et présentation des équations	23
3.2 Résolution du problème de Riemann	24
3.3 Mise en œuvre du schéma de reconstruction	29
4 Equations de Saint-Venant avec topographie	35
4.1 Présentation du problème	35
4.2 Reconstruction hydrostatique du terme source	37
4.3 Adaptation de la méthode de reconstruction hydrostatique à un maillage mobile	38
4.4 Perspectives et améliorations	43
Conclusion	45

Introduction

Objectifs du stage

Ce rapport présente les travaux effectués lors du stage de fin d'études portant sur la thématique : « Schéma de reconstruction exact sur les chocs isolés ». Comme détaillé dans les pages à venir, les méthodes de type volumes-finis, lorsqu'elles ne bénéficient pas d'un traitement spécifique, ont un comportement diffusif, ce qui est particulièrement gênant notamment pour l'analyse de l'évolution des ondes de choc. L'objectif principal de ce stage porte donc sur l'étude et l'application d'un schéma numérique ayant pour particularité la reconstruction des chocs diffusés à chaque itération. L'application se fera essentiellement aux équations de Saint-Venant, dont le but est la modélisation des écoulements en eaux peu profondes. Dans un premier temps, ces équations sont considérées sans terme source, ce qui correspond à une topographie plane. On s'intéressera également au cas d'une topographie quelconque, et l'on tentera de concevoir un schéma préservant les états stationnaires.

Environnement de travail

Ce stage s'est déroulé en majeure partie au sein de l'équipe *Analyse Numérique, Géophysique et Environnement* (ANGE) dans les locaux de l'Inria Paris sur une période de six mois. Un séjour de six semaines a été effectué sur le campus de Luminy Marseille dans le cadre de l'école d'été et de la session de projet du CEMRACS 2019.

L'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (Inria) est un établissement public français de recherche dans les domaines des sciences et technologies, et plus particulièrement des Mathématiques et de l'Informatique. Créé en 1967 dans le cadre du plan Calcul par le président Charles de Gaulle, l'IRIA — ancien acronyme de l'Inria — avait pour but premier d'affirmer l'autonomie française dans les technologies de l'information et d'étendre cet objectif à l'échelle Européenne. Aujourd'hui sous la tutelle des ministères de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation, ainsi que de l'Économie et des Finances, l'ambition de l'Inria est désormais tournée vers « l'excellence scientifique au service du transfert technologique et de la société ». Ceci est concrétisé par la collaboration de 3 000 chercheurs et ingénieurs. L'Inria s'organise autour d'un modèle de 200 « équipes-projets » rassemblant des chercheurs aux compétences complémentaires autour d'un même projet scientifique, et répartis dans 8 centres de recherche à travers la France (Paris, Rennes, Sophia Antipolis, Grenoble,

Nancy, Bordeaux, Lille et Saclay). Cette organisation permet notamment la publication de plus de 4 000 publications par an. D'autre part, 112 logiciels étaient déposés par l'Inria en 2017, et 160 start-up ont été créées avec l'aide de l'Inria. Le budget total s'élevait à 231 millions d'euros pour l'année 2017.

L'équipe-projet ANGE s'intéresse à la modélisation, l'analyse et la simulation d'écoulements géophysiques complexes. Typiquement, les modèles considérés peuvent aller des équations de Saint-Venant jusqu'aux équations de Navier-Stokes. Le logiciel de simulation Freshkiss3D, développé par l'équipe, permet d'approcher la solution des équations de Navier-Stokes incompressible avec une surface libre et une densité variable.

Chapitre 1

Approche générale des lois de conservation

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des lois de conservation, ce afin d'inclure les principaux résultats, mais aussi les notations et la terminologie utilisées par la suite. Un système de N lois de conservation modélise le transport de N quantités $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$, appelées variables conservées, dans un espace qui sera pris unidimensionnel égal à \mathbb{R} . En posant $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$, l'équation régissant le comportement de ces différentes variables s'écrit sous la forme intégrale :

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{u}(t_1, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{u}(t_0, x) dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_0)) dt - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_1)) dt$$
$$\forall (t_0, x_0) \in \Omega, \forall (t_1, x_1) \in \Omega \quad (1.1)$$

avec $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ une fonction de flux. Cette formulation intégrale, lorsqu'elle est couplée à une donnée initiale $\mathbf{u}^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, est équivalente dans le cas de solutions régulières au problème de Cauchy suivant, dont on dira qu'il est sous forme conservative :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u}(t = 0, x) = \mathbf{u}^0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.2)$$

Il est encore possible de réécrire ce problème de Cauchy en faisant apparaître la jacobienne $D\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$, et l'on parle alors de forme non-conservative ou quasi-linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + D\mathbf{f}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u}(t = 0, x) = \mathbf{u}^0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.3)$$

La loi de conservation est dite hyperbolique (respectivement strictement hyperbolique) si la jacobienne $D\mathbf{f}$ est diagonalisable sur le corps des réels (respectivement diagonalisable avec N valeurs propres réelles distinctes deux à deux).

Les formulations énoncées ci-dessus sont valables pour des solutions régulières. Or, dans le cas d'un flux non-linéaire il n'est généralement pas possible de garantir l'aspect continu en espace d'une solution au cours du temps, et ce même si \mathbf{u}^0 est choisie régulière. Le terme $\partial_x \mathbf{u}$ apparaissant dans (1.3) n'est plus défini, et il est alors nécessaire de considérer ces équations au sens faible, obtenues en multipliant par une fonction test et en intégrant sur Ω :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in (L_{\text{loc}}^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}))^N \text{ telle que } \forall \varphi \in (\mathcal{C}_c^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}))^N, \\ & \iint_{\Omega} (\mathbf{u} : \partial_t \varphi + \mathbf{f}(\mathbf{u}) : \partial_x \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{u}^0 : \varphi(0, x) dx = 0_{\mathbb{R}^N} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où le symbole « : » correspond au produit terme par terme. On s'intéresse dans ce qui suit à la résolution de cette équation dans un cas spécifique de donnée initiale.

1.2 Problème de Riemann

Un problème de Riemann est obtenu en choisissant une condition initiale constante de part et d'autre d'une discontinuité localisée en $x = 0$:

$$\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{u}_G \mathbb{1}_{x < 0}(x) + \mathbf{u}_D \mathbb{1}_{x > 0}(x), \quad \mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D \in \mathbb{R}^N \quad (1.5)$$

L'étude des problèmes de Riemann est importante pour comprendre la structure même des solutions et pour obtenir des méthodes numériques fidèles. Cette section présente une première approche de résolution de tels problèmes, d'abord dans le cas linéaire puis pour le cas non-linéaire. Tous les résultats présentés ici ont été largement documentés, voir par exemple le livre de LEVEQUE [3].

1.2.1 Cas linéaire

La stricte hyperbolicité est une notion importante car elle permet dans le cas linéaire de découpler les variables du problème et de résoudre indépendamment les N sous-problèmes obtenus. En effet, notons $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ les N valeurs propres et \mathbf{r}^k le k -ème vecteur propre de $D\mathbf{f}$ associé à λ_k (par linéarité, $D\mathbf{f}$ est constante). En introduisant $\Lambda = \text{diag}(\{\lambda_k, k = 1, \dots, N\})$ et R la matrice de colonnes $(\mathbf{r}^k)_{k=1, \dots, N}$, (1.2) se réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w} + \Lambda \partial_x \mathbf{w} = 0 & \text{sur } \Omega = [0, T] \times \mathbb{R} \\ \mathbf{w}(t = 0, x) = \mathbf{w}^0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.6)$$

où $\mathbf{w} = R^{-1} \mathbf{u}$ et $\mathbf{w}^0 = R^{-1} \mathbf{u}^0$. Il suffit alors de résoudre, pour $i \in \{1, \dots, N\}$, le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i = 0 \\ w_i(t = T_0, x) = w_i^0(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

dont la solution est donnée par $w_i(t, x) = w_i^0(x - \lambda_i t)$. Finalement on obtient :

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}^i w_i(t, x) \quad (1.8)$$

Cette décomposition en N problèmes scalaires peut directement être appliquée au problème de Riemann. En posant $\boldsymbol{\alpha} = R^{-1}\mathbf{u}_G$ et $\boldsymbol{\beta} = R^{-1}\mathbf{u}_D$ il vient :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, w_i^0(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x < 0 \\ \beta_i & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par suite, la solution pour \mathbf{w} est :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, w_i(t, x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x - \lambda_i t < 0 \\ \beta_i & \text{si } x - \lambda_i t > 0 \end{cases}$$

En notant $\mathcal{I}(x, t)$ l'ensemble des indices i tels que $x - \lambda_i t < 0$ et $\mathcal{J}(x, t)$ l'ensemble des indices j tels que $x - \lambda_j t > 0$ on obtient :

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{i \in \mathcal{I}(x, t)} \alpha_i \mathbf{r}^i + \sum_{j \in \mathcal{J}(x, t)} \beta_j \mathbf{r}^j \quad (1.9)$$

On cherche ensuite à caractériser le saut $[\mathbf{u}]^p \in \mathbb{R}$ de \mathbf{u} le long de la p -ème caractéristique. Par définition de $\mathcal{I}(x, t)$ et $\mathcal{J}(x, t)$ celui-ci se déplace à la vitesse λ_p et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, [\mathbf{u}]^p = \left(\lim_{x \rightarrow \lambda_p t^+} \mathbf{u}(x, t) - \lim_{x \rightarrow \lambda_p t^-} \mathbf{u}(x, t) \right) \cdot \frac{\mathbf{r}^p}{\|\mathbf{r}^p\|_2^2} = \beta_p - \alpha_p \quad (1.10)$$

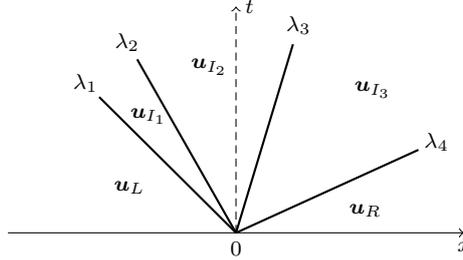


FIGURE 1.1 – Illustration du problème de Riemann dans le cas linéaire.

Résoudre un problème de Riemann linéaire revient par conséquent à déterminer les valeurs propres de $D\mathbf{f}$ ainsi que chacun des sauts $[\mathbf{u}]^p$, où encore les états intermédiaires \mathbf{u}_I reliant \mathbf{u}_G à \mathbf{u}_D . Il est alors aisé d'exprimer la solution par (1.9) ou bien via les sauts :

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_G + \sum_{\substack{p \\ x > \lambda_p t}} [\mathbf{u}]^p \mathbf{r}^p = \mathbf{u}_D - \sum_{\substack{p \\ x \leq \lambda_p t}} [\mathbf{u}]^p \mathbf{r}^p \quad (1.11)$$

On détaille dans la suite une procédure permettant de choisir les états intermédiaires.

Définition 1.2.1 (Courbe d'Hugoniot). *On appelle courbe d'Hugoniot associée à un état $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ l'ensemble des états $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^N$ tels que $\mathbf{u}^* - \mathbf{u}$ est colinéaire à l'un des vecteurs propres de $D\mathbf{f}$. En utilisant la relation (1.10), la courbe d'Hugoniot associée à \mathbf{u} se définit donc comme l'ensemble des points de \mathbb{R}^N qui peuvent être connectés à \mathbf{u} par l'intermédiaire d'une unique onde.*

On donne une interprétation graphique de la courbe d'Hugoniot dans le cas d'un système de deux équations, pour lequel il est possible de représenter la solution $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dans le plan de phase u_1 - u_2 . Notamment, pour qu'une discontinuité initiale séparant deux états \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D se propage sans se diviser en plusieurs ondes, il faut que le vecteur $\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_G$ soit parallèle à l'un des deux vecteurs propres $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$, et donc que \mathbf{u}_D appartienne à la courbe d'Hugoniot de \mathbf{u}_G . Dans le cas contraire, \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D ne sont pas directement reliés : il existe un état intermédiaire $\mathbf{u}_I = \beta_1 \mathbf{r}^1 + \alpha_2 \mathbf{r}^2$.

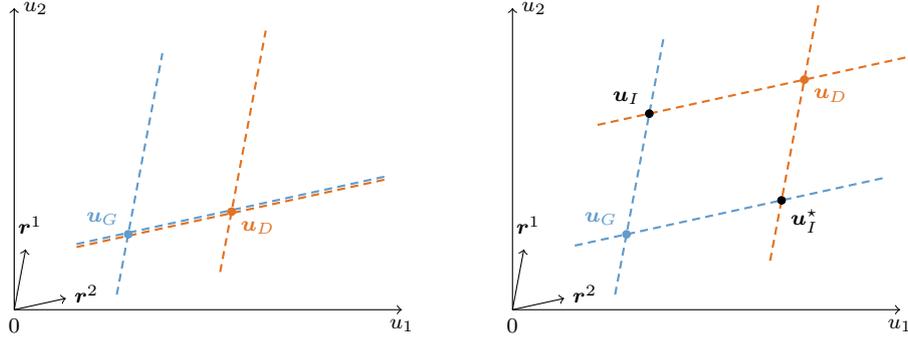


FIGURE 1.2 – Courbe d'Hugoniot (en pointillés) des états \mathbf{u}_G (en bleu) et \mathbf{u}_D (en orange). A gauche pas d'état intermédiaire car \mathbf{u}_D se trouve sur la courbe d'Hugoniot de \mathbf{u}_G , contrairement au cas de droite où \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D sont reliés par un état intermédiaire \mathbf{u}_I ou \mathbf{u}_I^* .

La figure 1.2 illustre la notion de courbe d'Hugoniot qui se constitue, dans le cas linéaire et pour un point $\mathbf{u}(t, x)$ donné, de deux droites passant par ce point et parallèles à \mathbf{r}^1 et \mathbf{r}^2 respectivement. Il y a deux états intermédiaires \mathbf{u}_I et \mathbf{u}_I^* à considérer résultant de l'intersection des courbes d'Hugoniot de \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D . Il est donc possible d'emprunter deux chemins pour passer de \mathbf{u}_G à \mathbf{u}_D , et l'on choisira celui connectant \mathbf{u}_G à l'état intermédiaire par l'onde la plus lente puis l'état intermédiaire à \mathbf{u}_D par l'onde la plus rapide, sans quoi la solution est multi-valuée.

L'idée est la même pour un système de N équations, et se résume au problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \mathbf{u}_G + \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}^i = \mathbf{u}_D \\ \iff & \text{Trouver } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } R\mathbf{q} = \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_G \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'existence et l'unicité de \mathbf{q} sont assurées par l'inversibilité de R . Ici \mathbf{q} contient les coordonnées de $\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_G$ dans la base formée des colonnes de R qui sont les vecteurs propres de $D\mathbf{f}$. Si les valeurs propres sont rangées par ordre strictement croissant $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$, on peut facilement exprimer un état intermédiaire par la formule des sauts étant donné que $q_i = [\mathbf{u}]^i \forall i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \mathbf{u}_{I_i} = \mathbf{u}_G + \sum_{k=1}^i q_k \mathbf{r}^k \quad (1.13)$$

1.2.2 Cas non-linéaire

Le cas non-linéaire est plus difficile à gérer que le cas linéaire. Notamment, une onde issue de la discontinuité initiale n'est plus nécessairement elle-même discontinue, on parlera alors d'onde de détente. Au contraire, si l'onde développée correspond à une discontinuité, on parlera d'onde de choc. Une distinction entre ces deux cas est faite dans ce qui suit.

Ondes de choc

On se demande dans un premier temps à quelle condition une fonction régulière par morceaux et traversée d'une discontinuité suivant une courbe $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution faible de (1.4). On a la proposition suivante :

Théorème 1.2.1 (Relation de Rankine-Hugoniot). *Soit $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction régulière par morceaux :*

$$\mathbf{u}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{u}_G(t, x) & \text{si } x < \gamma(t) \\ \mathbf{u}_D(t, x) & \text{si } x > \gamma(t) \end{cases}$$

avec $\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D$ et γ des fonctions continûment différentiables. On suppose de plus que \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D sont des solutions au sens fort de (1.2) respectivement sur $\Gamma^- = \{(t, x) \in \Omega, x < \gamma(t)\}$ et $\Gamma^+ = \{(t, x) \in \Omega, x > \gamma(t)\}$. Alors \mathbf{u} est une solution de la formulation faible (1.4) si et seulement si la relation de Rankine-Hugoniot est vérifiée :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_G^-(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_D^+(t)) = \gamma'(t) (\mathbf{u}_G^-(t) - \mathbf{u}_D^+(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.14)$$

avec $\mathbf{u}_G^-(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^-} \mathbf{u}_G(t, x)$ et $\mathbf{u}_D^+(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^+} \mathbf{u}_D(t, x)$

On précise alors la notion de courbe d'Hugoniot pour le cas non-linéaire. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ un état connu. De manière analogue avec le cas linéaire, la courbe d'Hugoniot associée à \mathbf{v} est l'ensemble des points $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ pouvant être reliés à \mathbf{v} par une onde de choc. Notamment, tout point \mathbf{u} appartenant à la courbe d'Hugoniot de \mathbf{v} vérifie la relation de Rankine-Hugoniot :

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

avec σ la vitesse du choc fonction de \mathbf{u} et \mathbf{v} , ce qui porte à $N + 1$ le nombre total d'inconnues pour N équations. On en déduit une définition de la courbe d'Hugoniot par le biais d'un paramétrage $(\xi, \tilde{\mathbf{u}}(\xi))$ avec $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\sigma}$ solutions de :

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(\xi)) - \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \tilde{\sigma}(\xi) (\tilde{\mathbf{u}}(\xi) - \mathbf{v}) \\ \tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v} \end{cases} \quad (1.15)$$

En outre, l'objectif du paramétrage est de réduire d'un degré de liberté l'ensemble des solutions de (1.15) pour ξ fixé, ce qui en pratique signifie qu'il faut être en mesure de définir une composante de $\tilde{\mathbf{u}}$ ou bien $\tilde{\sigma}$ exclusivement en fonction du paramètre ξ . Enfin, il est possible de caractériser chacune des N courbes d'Hugoniot partant de \mathbf{v} en dérivant la première équation de (1.15) en $\xi = 0$, ce qui aboutit à :

$$D\mathbf{f}(\mathbf{v})\mathbf{u}'(0) = \tilde{\sigma}(0)\mathbf{u}'(0) \quad (1.16)$$

La p -ème courbe d'Hugoniot passant par \mathbf{v} sera donc prise tangente à $\mathbf{r}^p(\mathbf{v})$ (p -ème vecteur propre de $D\mathbf{f}(\mathbf{v})$) en \mathbf{v} .

On introduit enfin la notion de *choc isolé*, utile par la suite :

Définition 1.2.2. *On appelle choc isolé l'unique choc d'un problème de Riemann tel que les deux états extrêmes initiaux \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D se trouvent sur la même courbe d'Hugoniot.*

On notera qu'en règle générale, pour un système hyperbolique quelconque il est peu commun de rencontrer un choc isolé.

Ondes de détente

On considère maintenant les solutions \mathbf{u} de (1.2) sous forme auto-similaire :

$$\exists \mathbf{u}^* \in C^0(\mathbb{R}), \forall (t, x) \in \Omega, \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}^*(\xi) \quad \text{avec } \xi = x/t$$

En injectant \mathbf{u}^* dans la loi de conservation il vient :

$$\partial_t \xi \frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi} + \partial_x \xi D\mathbf{f} \frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi} = 0 \implies D\mathbf{f} \frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi} = \xi \frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi}$$

Le paramètre ξ doit donc être une valeur propre de $D\mathbf{f}$, et la dérivée de \mathbf{u}^* un vecteur propre associé (à une constante multiplicative près) :

$$\exists 1 \leq i \leq N, \begin{cases} \xi = \lambda_i(\mathbf{u}^*(\xi)) \\ \frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi} = \alpha(\xi) \mathbf{r}^i(\mathbf{u}^*(\xi)) \end{cases}$$

Le facteur $\alpha(\xi)$ est obtenu simplement en dérivant la première équation par rapport à ξ :

$$1 = \nabla \lambda_i(\mathbf{u}^*(\xi)) \cdot \frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi}(\xi) = \alpha(\xi) \nabla \lambda_i(\mathbf{u}^*(\xi)) \cdot \mathbf{r}^i(\mathbf{u}^*(\xi))$$

Si pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ on a $\nabla \lambda_i(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}^i(\mathbf{u}) \neq 0$, le i -ème champ caractéristique est dit vraiment non-linéaire. Dans ce cas, la solution auto-similaire vérifie :

$$\frac{d\mathbf{u}^*}{d\xi} = \frac{\mathbf{r}^i(\mathbf{u}^*(\xi))}{\nabla \lambda_i(\mathbf{u}^*(\xi)) \cdot \mathbf{r}^i(\mathbf{u}^*(\xi))} \quad (1.17)$$

Ceci définit une onde de détente. Dans le cas où pour tout vecteur \mathbf{u} on a $\nabla \lambda_i(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}^i(\mathbf{u}) = 0$ le i -ème champ caractéristique est linéairement dégénéré et la solution est une discontinuité de contact.

Comme pour le cas des chocs, il est possible de déterminer l'ensemble des points de \mathbb{R}^N reliés à $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ par une onde de détente. On appellera cet ensemble *courbe intégrale* associée à \mathbf{v} . Il suffira pour la déterminer de résoudre l'équation (1.17) avec pour condition initiale $\mathbf{u}^*(0) = \mathbf{v}$.

1.2.3 Notion d'entropie et unicité

En général, la solution faible du problème de Riemann n'est pas unique, et il est nécessaire d'établir un critère permettant de sélectionner une solution en

particulier. Notamment, il faut être en mesure de déterminer si une onde est un choc ou une détente. Une approche pour y parvenir se base sur la notion d'entropie. Cette dernière s'interprète physiquement comme une fonction mesurant le « désordre » des différentes quantités d'intérêt le long d'une trajectoire. Afin de simplifier, on se place ici dans le cas des lois de conservation scalaires. L'espace des fonctions d'entropie \mathcal{E} est défini comme l'ensemble des fonctions $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convexes. Soit $\eta \in \mathcal{E}$, et supposons que la solution u de (1.2) soit régulière. On a sur Ω :

$$\eta'(u)(\partial_t u + \partial_x f(u)) = 0 \iff \partial_t \eta(u) + \partial_x \psi(u) = 0 \quad (1.18)$$

avec ψ vérifiant $\psi' = \eta' f'$. Par ailleurs, si une fonction $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall \eta \in \mathcal{E}, \forall \psi \text{ telle que } \psi' = \eta' f', \partial_t \eta(v) + \partial_x \psi(v) = 0$$

alors v est l'unique solution régulière de (1.2) (il suffit pour s'en convaincre de prendre $\eta = \text{id}$).

Il reste à trouver une caractérisation similaire dans le cas où une solution u admet des discontinuités. On ajoute pour cela un terme de viscosité à la loi de conservation :

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx}^2 u_\varepsilon \quad (1.19)$$

En admettant qu'une solution régulière u_ε de (1.19) existe, on peut montrer que la limite \bar{u} de u_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est solution faible du problème de Riemann associé à (1.2). L'unicité est alors obtenue en se restreignant à la solution limite de l'approximation visqueuse. La caractérisation entropique de cette limite est obtenue ci-dessous :

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathcal{E} \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \psi \text{ telle que } \psi' = \eta' f', \\ \partial_t \eta(u_\varepsilon) + \partial_x \psi(u_\varepsilon) = \varepsilon \eta'(u_\varepsilon) \partial_{xx}^2 u_\varepsilon = \varepsilon (\eta'(u_\varepsilon) - \eta''(u_\varepsilon) (\partial_x u_\varepsilon)^2) \leq \varepsilon \eta'(u_\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Il est possible de généraliser cette inégalité pour toute fonction $\eta \in \mathcal{E}$ en prouvant que toute fonction d'entropie s'écrit comme la limite uniforme d'une suite de $\mathcal{E} \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir [4]). En faisant tendre ε vers 0, il vient alors :

$$\forall \eta \in \mathcal{E}, \forall \psi \text{ telle que } \psi' = \eta' f', \partial_t \eta(\bar{u}) + \partial_x \psi(\bar{u}) \leq 0 \quad (1.21)$$

Dans le cas où \bar{u} est régulière, l'inégalité (1.21) est en fait une égalité, et correspond donc exactement à (1.18). De façon générale, si une fonction $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\forall \eta \in \mathcal{E}, \forall \psi \text{ telle que } \psi' = \eta' f', \partial_t \eta(v) + \partial_x \psi(v) \leq 0 \quad (1.22)$$

alors en prenant successivement $\eta = \text{id}$ et $\eta = -\text{id}$, on obtient que v est solution faible de (1.2).

Enfin, de manière analogue à la formule de Rankine-Hugoniot, on peut montrer en utilisant (1.22) que la vitesse σ d'une onde de choc reliant deux états u_G et u_D vérifie :

$$\forall \eta \in \mathcal{E}, \forall \psi \text{ telle que } \psi' = \eta' f', \sigma(\eta(u_D) - \eta(u_G)) \geq \psi(u_D) - \psi(u_G)$$

Pour un flux f strictement convexe, cela donne la

Proposition 1.2.1 (Condition entropique de Lax). *Supposons le flux f strictement convexe, et soit u l'unique solution de (1.2) qui soit en même temps la limite de l'approximation visqueuse (1.19). Si u consiste en deux états u_G et u_D reliés par une onde de choc, alors on a nécessairement :*

$$\lambda(u_G) > \sigma > \lambda(u_D) \tag{1.23}$$

REMARQUE. Un résultat similaire existe dans le cas non-scalaire lorsque le flux est vraiment non-linéaire.

Chapitre 2

Schémas numériques pour les lois de conservation

Bien souvent, les équations de transport considérées sont dans le cas général trop complexes à résoudre analytiquement, et il est nécessaire de développer des outils permettant d'approcher leurs solutions, comme les méthodes de type volumes finis. Ce chapitre a pour objectif d'explicitier la conception de tels schémas numériques et de l'illustrer à travers quelques exemples. Dans un second temps, l'aspect diffusif propre à la plupart des méthodes usuelles est exposé. Enfin, une solution est présentée sous la forme d'un schéma de reconstruction.

2.1 Méthodes de type volumes finis

Afin d'envisager une résolution numérique, il est tout d'abord impératif de modifier le domaine d'espace qui ne peut plus être égal à \mathbb{R} tout entier comme c'était le cas pour (1.1). Une partie bornée \mathcal{D} de \mathbb{R} est donc considérée. La seule condition initiale n'est alors plus suffisante, et des conditions aux bords doivent dorénavant être exprimées afin d'obtenir un problème aux limites. Assez fréquemment, une condition de Dirichlet, de Neumann ou une combinaison des deux est imposée aux bords du domaine :

$$\alpha \mathbf{u}(t, x) + \beta \partial_x \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{b}_{\alpha, \beta}(t, x) \quad \text{sur } [0, T] \times \partial \mathcal{D} \quad (2.1)$$

où α, β sont deux réels positifs fixés de somme égale à un. Il faut ensuite définir un maillage en espace, supposé uniforme pour simplifier, et constitué de $N_x + 1$ points $(x_{i-1/2})_{0 \leq i \leq N_x}$ tels que $x_{i-1/2} = x_{-1/2} + i\Delta x$. Ces points définissent N_x cellules $(\mathcal{C}_i)_{0 \leq i \leq N_x - 1}$ centrées en $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$ et de taille Δx , de sorte que $\mathcal{C}_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. La discrétisation en temps, quant à elle, n'est pas supposée uniforme et les temps discrets sont donnés par $t_n = t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i$. L'étape suivante est de considérer \mathbf{U}_i^n la solution moyennée sur la cellule \mathcal{C}_i au

temps t_n . La formulation intégrale (1.1) implique dans ce cas :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_{i+1/2})) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_{i-1/2})) dt \right) \quad (2.2)$$

La première approximation consiste à trouver des flux numériques $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^n$ fonctions de \mathbf{U}_i^n , $\mathbf{U}_{i\pm 1}^n$ qui, lorsqu'ils se substituent aux flux exacts $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_{i\pm 1/2}))$ de (2.2), engendrent une erreur d'ordre au moins $\mathcal{O}(\Delta t_n)$:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) + \mathcal{O}(\Delta t_n) \quad (2.3)$$

Cette relation constitue la base des méthodes de type volumes finis, et a pour avantage de conserver exactement les quantités transportées — modulo les variations engendrées par les flux aux bords. En effet, le flux entrant dans un élément de volume est également un flux sortant du point de vue de l'élément de volume qui lui est adjacent. Par ailleurs, on dira du flux numérique \mathbf{F} qu'il est consistant avec la fonction de flux \mathbf{f} si $\forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{f}(\mathbf{U})$.

Toute la difficulté revient donc à déterminer des flux numériques qui soient consistants avec l'équation aux interfaces entre les cellules du maillage. Plusieurs stratégies existent, et deux d'entre elles sont décrites dans les lignes qui suivent. Dans chacun de ces deux cas, cela revient à résoudre ou approcher la solution d'un problème de Riemann local dont les états gauche et droit sont donnés par les cellules de part et d'autre de l'interface.

2.1.1 Méthode de Godunov

Une première possibilité est de prendre un flux numérique égal à la moyenne en temps du flux exact sur le pas de temps :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^*(0)) dt = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^*(0)) \quad (2.4)$$

avec $\mathbf{u}_{i+1/2}^*$ la solution auto-similaire du problème de Riemann de donnée initiale $\mathbf{U}_i^n \mathbb{1}_{x < 0} + \mathbf{U}_{i+1}^n \mathbb{1}_{x > 0}$. Pour éviter de devoir gérer les interactions entre deux ondes, le pas de temps doit vérifier la condition de Courant-Friedrichs-Lewy $\Delta t_n \leq \frac{\Delta x}{2\sigma_{\max}^n}$ où σ_{\max}^n est la vitesse maximale des ondes au temps t_n . De cette façon, la solution approchée à l'itération $n + 1$ se définit comme la moyenne sur chacune des cellules de la solution exacte $\tilde{\mathbf{u}}$ du problème de transport au temps Δt_n pour la donnée initiale $\sum_j \mathbf{U}_j^n \mathbb{1}_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[}$. En effet, la relation (2.3) donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^*(0)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1/2}^*(0)) dt \right) \\ &= \mathbf{U}_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_0^{\Delta t_n} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t, x_{j+1/2})) dt - \int_0^{\Delta t_n} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t, x_{j-1/2})) dt \right) \\ &= \mathbf{U}_j^n - \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{u}}(0, x) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{u}}(\Delta t_n, x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{u}}(\Delta t_n, x) dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le défaut de cette méthode est qu'il n'est pas toujours possible de déterminer exactement la solution autosimilaire du problème de Riemann et, quand bien même cela est possible, il s'agit généralement d'une procédure coûteuse en termes de calculs. Une alternative consiste alors à établir un solveur de Riemann approximatif, comme c'est le cas pour la méthode qui suit.

2.1.2 Méthode de Harten-Lax-van Leer (HLL)

La méthode HLL vise à construire un solveur approximatif du problème de Riemann dans le cas d'un système hyperbolique de taille supérieure à deux. Comme expliqué dans [5], l'idée est de considérer les deux ondes les plus extrêmes caractérisées par les vitesses λ_G et λ_D (voir figure 2.1) et de moyenner la solution entre ces deux ondes. Dans un premier temps, le cas $\lambda_G \leq 0 \leq \lambda_D$, $\lambda_G \neq \lambda_D$ est considéré.

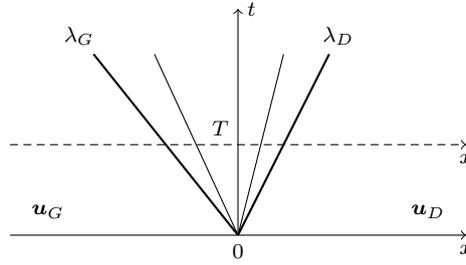


FIGURE 2.1 – Exemple d'ondes issues d'une donnée initiale de Riemann.

Soit $T \geq 0$ un temps fixé, et soient $x_G = T\lambda_G$, $x_D = T\lambda_D$. La formulation intégrale (1.1) appliquée au volume de contrôle $[0, T] \times [x_G, x_D]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{x_G}^{x_D} \mathbf{u}(T, x) dx &= \int_{x_G}^{x_D} \mathbf{u}(0, x) dx + \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_G)) dt - \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_D)) dt \\ &= T\lambda_D \mathbf{u}_D - T\lambda_G \mathbf{u}_G + T\mathbf{f}(\mathbf{u}_G) - T\mathbf{f}(\mathbf{u}_D) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La moyenne de la solution sur le segment $\{T\} \times [x_G, x_D]$ vérifie donc exactement :

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{T(\lambda_D - \lambda_G)} \int_{x_G}^{x_D} \mathbf{u}(T, x) dx = \frac{\lambda_D \mathbf{u}_D - \lambda_G \mathbf{u}_G + \mathbf{f}(\mathbf{u}_G) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_D)}{\lambda_D - \lambda_G} \quad (2.7)$$

L'objectif étant de déterminer une approximation de la fonction $t \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, 0))$ (constante sur $(0, T]$ par autosimilarité), on fait apparaître cette inconnue en réécrivant la loi de conservation sur le volume de contrôle $[0, T] \times [x_G, 0]$:

$$\begin{aligned} \int_{x_G}^0 \mathbf{u}(T, x) dx &= \int_{x_G}^0 \mathbf{u}(0, x) dx + \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, x_G)) dt - \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{u}(t, 0)) dt \\ &= -T\lambda_G \mathbf{u}_G + T\mathbf{f}(\mathbf{u}_G) - T\mathbf{f}(\mathbf{u}(T, 0)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

On obtient donc pour tout $t \in (0, T]$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(t, 0)) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_G) - \lambda_G \mathbf{u}_G - \frac{1}{T} \int_{x_G}^0 \mathbf{u}(T, 0) dx$$

Enfin, une approximation $\mathbf{F}_{\text{HLL}}(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D)$ de $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t, 0))$ est obtenue en remplaçant la solution exacte \mathbf{u} par sa moyenne $\bar{\mathbf{u}}$ dans (2.8) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{HLL}}(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_G) + \lambda_G(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_G) \\ &= \frac{\lambda_D \lambda_G (\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_G) + \lambda_D \mathbf{f}(\mathbf{u}_G) - \lambda_G \mathbf{f}(\mathbf{u}_D)}{\lambda_D - \lambda_G} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dans le cas où $\lambda_G \geq 0$, on prendra $\mathbf{F}_{\text{HLL}}(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_G)$, tandis que si $\lambda_D \leq 0$, on prendra $\mathbf{F}_{\text{HLL}}(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)$.

REMARQUE. Il est possible de simplifier encore plus ce flux numérique en le symétrisant. Pour cela, il faut remplacer λ_D (resp. λ_G) par λ (resp. $-\lambda$), avec $\lambda = \max_i |\lambda_i|$. On obtient alors un cas particulier de flux HLL, appelé flux de Rusanov :

$$\mathbf{F}_{\text{Rusanov}}(\mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_G) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_D)}{2} + |\lambda| \frac{\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_D}{2} \quad (2.10)$$

2.2 Aspect diffusif des méthodes usuelles

On souhaite passer en revue les différentes causes pour lesquelles les méthodes « usuelles » sont diffusives. Tout d'abord, afin de mettre en évidence ce phénomène, on considère le cas simplifié du transport linéaire scalaire à vitesse constante $a \in \mathbb{R}$:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

Le flux numérique étudié est celui de Rusanov, qui dans le cas du transport linéaire est équivalent au flux décentré amont. En effet on a :

$$F_{\text{Rusanov}}(u_G, u_D) = \frac{au_G + au_D}{2} + |a| \frac{u_G - u_D}{2} = \begin{cases} au_G & \text{si } a \geq 0 \\ au_D & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Une simple étude de l'équation modifiée associée au schéma de Rusanov permet alors d'en montrer l'aspect diffusif :

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} &= - \frac{F_{\text{Rusanov}}(U_i^n, U_{i+1}^n) - F_{\text{Rusanov}}(U_{i-1}^n, U_i^n)}{\Delta x} \\ \implies \partial_t u(t_n, x_i) + \Delta t \partial_{tt}^2 u(t_n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^2) &= \\ &= - \frac{1}{2} \left(a \frac{U_{i+1}^n + U_i^n - U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} + |a| \frac{U_i^n - U_{i+1}^n - U_{i-1}^n + U_i^n}{\Delta x} \right) \\ \implies \partial_t u(t_n, x_i) + a^2 \Delta t \partial_{xx}^2 u(t_n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^2) &= \\ &= - \frac{1}{2} \left(2a \partial_x u(t_n, x_i) - |a| \Delta x \partial_{xx}^2 u(t_n, x_i) \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \implies \partial_t u(t_n, x_i) + a \partial_x u(t_n, x_i) &= \left(\frac{|a|}{2} \Delta x - a^2 \Delta t \right) \partial_{xx}^2 u(t_n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2) \end{aligned}$$

Cette équation est bien posée dès lors que le coefficient du second membre est positif, ce qui correspond à la condition CFL $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2|a|}$. Sous cette condition, on obtient ainsi un terme de diffusion d'autant plus important que Δt est petit,

Rusanov scheme for the linear scalar transport ($a = 3$)

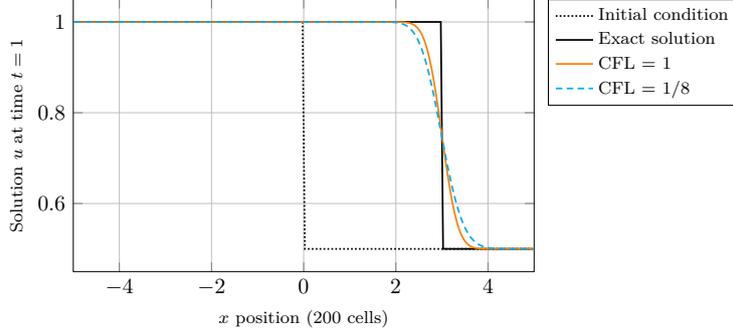


FIGURE 2.2 – Comportement du schéma de Rusanov pour différents pas de temps.

d'où l'intérêt de prendre le pas de temps aussi proche que possible de $\frac{\Delta x}{2|a|}$ par valeurs inférieures (voir figure 2.2). En prenant une constante CFL égale à 1, on s'attend d'après l'équation modifiée à ce que le schéma ne soit plus diffusif, or dans les faits le résultat est très similaire au cas où la constante CFL vaut 1/8. L'équation modifiée ne permet donc pas à elle seule de décrire qualitativement le comportement de la solution.

Une autre option pour éviter l'aspect diffusif serait d'augmenter l'ordre du flux en utilisant une approche différences finies. Soit u la solution exacte du transport linéaire. Un développement limité de u par rapport au temps autour de t_n donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(t_{n+1}, x) = u(t_n, x) + \Delta t_n \partial_t u(t_n, x) + \frac{\Delta t_n^2}{2} \partial_{tt}^2 u(t_n, x) + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Puis, en utilisant le fait que $\partial_t u = -a \partial_x u$ et $\partial_{tt}^2 u = a^2 \partial_{xx}^2 u$, et en effectuant un développement limité en espace autour de x_i il vient :

$$u(t_{n+1}, x_i) = u(t_n, x_i) - a \Delta t_n \frac{u(t_n, x_{i+1}) - u(t_n, x_{i-1}))}{2 \Delta x} + \frac{a^2 \Delta t_n^2}{2} \frac{u(t_n, x_{i+1}) - 2u(t_n, x_i) + u(t_n, x_{i-1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t^3)$$

En posant $\tilde{F}(u_G, u_D) = \frac{a}{2} \left[u_G + u_D - a \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (u_D - u_G) \right]$, on a :

$$u(t_{n+1}, x_i) - u(t_n, x_i) = - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\tilde{F}(u(t_n, x_i), u(t_n, x_{i+1})) - \tilde{F}(u(t_n, x_{i-1}), u(t_n, x_i)) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta t^3)$$

Ceci permet de définir un schéma volumes finis d'ordre 2 dit de Lax-Wendroff. Ce schéma a pour propriété d'être dispersif (voir figure 2.3). Encore une fois, cette tentative est tenue en échec : bien que moins diffusif que le schéma de Rusanov, le schéma de Lax-Wendroff ne parvient pas à préserver nette la discontinuité : il demeure en ce sens diffusif.

Lax-Wendroff scheme for the linear scalar transport ($a = 3$)

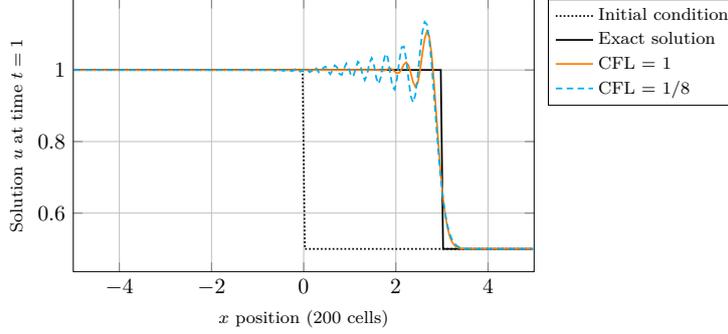


FIGURE 2.3 – Comportement du schéma de Lax-Wendroff pour différents pas de temps.

Mais alors comment expliquer cette diffusion allant à l'encontre de l'équation modifiée du schéma de Rusanov lorsque $\text{CFL} = 1$? La réponse se trouve en fait dans le processus de moyennation inhérent aux méthodes de type volumes finis. En reprenant le cas du flux décentré amont et en choisissant $\Delta t = \text{CFL} \frac{\Delta x}{2|a|}$ avec $a = 1$ et $\text{CFL} \in (0, 1]$, le schéma volumes finis correspondant s'écrit :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\text{CFL}}{2}(u_i^n - u_{i-1}^n) = \left(1 - \frac{\text{CFL}}{2}\right)u_i^n + \frac{\text{CFL}}{2}u_{i-1}^n \quad (2.11)$$

La cellule i se voit attribuer une combinaison linéaire des états u_i^n et u_{i-1}^n . Supposons par exemple que $\text{CFL} = 1$ et qu'à l'itération n la solution vaut u_G sur toutes les cellules à gauche de \mathcal{C}_i , et vaut u_D sur toutes les cellules à droite de \mathcal{C}_i , \mathcal{C}_i incluse. Comme $\Delta t = \Delta x/2$ et $a = 1$, il faut deux itérations pour que la discontinuité se déplace de Δx vers la droite : on souhaiterait donc avoir $u_j^{n+2} = u_G \forall j \leq i$, $u_j^{n+2} = u_D \forall j > i$. Or le schéma décentré amont (2.11) donne :

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_G & \text{si } j < i \\ \frac{u_G + u_D}{2} & \text{si } j = i \\ u_D & \text{si } j > i \end{cases}, \quad u_j^{n+2} = \begin{cases} u_G & \text{si } j < i \\ \frac{3u_G + u_D}{4} & \text{si } j = i \\ \frac{u_G + 3u_D}{4} & \text{si } j = i + 1 \\ u_D & \text{si } j > i + 1 \end{cases}$$

On obtient donc bien un phénomène de diffusion par moyennation.

2.3 Schéma de reconstruction non-diffusif

2.3.1 Principe de base

Une solution au problème de diffusion numérique est proposée dans les lignes qui suivent. La cause de ce problème a été identifiée à la section précédente comme étant le processus de moyennation propre aux méthodes de type volumes finis. Cette moyennation engendre une perte d'information qu'il serait souhaitable de retrouver avant le calcul des flux.

La direction privilégiée ici est donc celle de la reconstruction de cette information au niveau des cellules contenant potentiellement un choc. Le principe du schéma de reconstruction détaillé dans [1] s’articule ainsi autour de trois étapes. Tout d’abord la détection des cellules contenant potentiellement un choc, puis la reconstruction des chocs pour les cellules concernées, et enfin le calcul des flux numériques tenant compte de la reconstruction de l’approximation. La première étape est étroitement liée au problème en question et doit être abordée au cas par cas. Cette section se concentre donc sur l’aspect général de la procédure de reconstruction, un exemple d’application l’illustrant de manière plus concrète sur les équations de Saint-Venant est donné dans le chapitre qui suit.

2.3.2 Détection des chocs

Cette section traite de la détection des chocs entropiques, en vue de les reconstruire par la suite. Idéalement, il faut détecter tous les chocs dissipés au cours de la moyennation, et éviter d’en détecter là où il n’y en a pas initialement. Dans les faits, ce dernier point s’annonce difficile voire impossible à respecter, comme l’illustre la figure 2.4. Une fois la donnée initiale moyennée, il n’est *a priori*

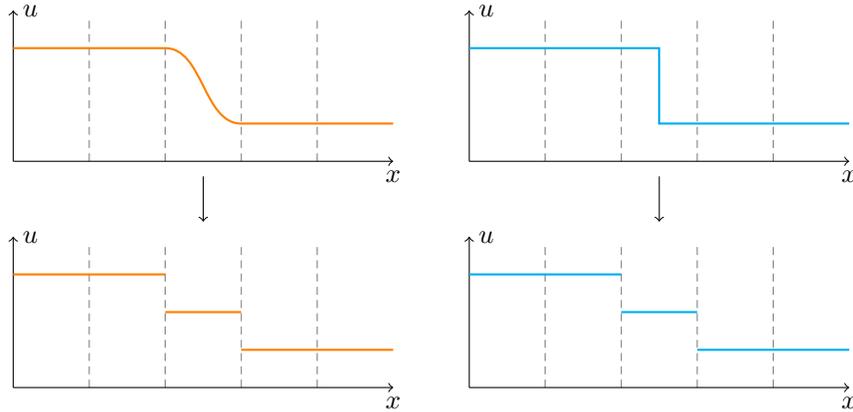


FIGURE 2.4 – Processus de moyennation (de haut en bas) de la donnée initiale continue à gauche et discontinue à droite. Le même résultat est ici obtenu.

pas possible de distinguer à coup sûr si celle-ci comportait une discontinuité ou non. De fait, un objectif plus raisonnable est reformulé comme suit :

- le détecteur de chocs doit détecter toutes les cellules comportant au moins un choc entropique dissipé pour un maillage suffisamment fin ;
- le détecteur de chocs doit limiter le plus possible le nombre de détections erronées d’autant que le maillage se voit raffiné ;

Dans le cadre simplifié d’une donnée initiale constante par morceaux et d’un maillage suffisamment fin pour que chaque triplet de cellules consécutives contienne au plus une discontinuité, le premier point est facile à respecter. En effet, une cellule comprenant une discontinuité se verra attribuer une combinaison convexe entre les états de part et d’autre de cette discontinuité :

$$\exists \alpha \in (0, 1), \mathbf{U}_I = \alpha \mathbf{U}_G + (1 - \alpha) \mathbf{U}_D \quad (2.12)$$

Ainsi, pour déterminer si la cellule \mathcal{C}_i d'état moyenné \mathbf{U}_i doit subir une reconstruction, il faut analyser les états \mathbf{U}_{i-1} et \mathbf{U}_{i+1} des cellules adjacentes. Dans le cas où ceux-ci peuvent être reliés par un choc entropique et si \mathbf{U}_i est une combinaison convexe de \mathbf{U}_{i-1} et \mathbf{U}_{i+1} , alors un choc doit être détecté.

Cependant, il faut également considérer le cas général pour lequel la donnée initiale n'est plus constante par morceaux. Pour cette raison, la condition sur la combinaison convexe doit être relaxée, ce qui va à l'encontre du second point.

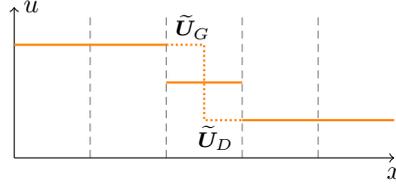


FIGURE 2.5 – Processus de reconstruction d'une cellule. Le trait plein représente l'approximation numérique, les pointillés représentent la reconstruction.

2.3.3 Opérateur de reconstruction

La reconstruction d'un choc requiert la détermination de trois données : les états gauche et droit séparés par la discontinuité ainsi que la position de cette dernière au sein de la cellule (voir figure 2.5). Il faut donc introduire un opérateur de reconstruction permettant dans un premier temps de calculer les deux états d'une cellule à partir des cellules adjacentes. Notamment, il a été établi à la section précédente que si les états \mathbf{U}_{i-1} et \mathbf{U}_{i+1} des cellules \mathcal{C}_{i-1} et \mathcal{C}_{i+1} peuvent être reliés par un choc entropique, et si l'état de la cellule \mathcal{C}_i est une combinaison convexe des états voisins, il est souhaitable que l'opérateur de reconstruction reconstruise le choc potentiel. La définition ci-dessous s'impose donc naturellement :

Définition 2.3.1 (Opérateur de reconstruction). *Un opérateur de reconstruction est une fonction*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ (\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_I, \mathbf{U}_D) &\longmapsto (\tilde{\mathbf{U}}_G, \tilde{\mathbf{U}}_D) \end{aligned}$$

telle que pour tout couple d'états $(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$ reliés par un choc entropique et pour tout $\alpha \in (0, 1)$:

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_G, \alpha \mathbf{U}_G + (1 - \alpha) \mathbf{U}_D, \mathbf{U}_D) = (\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_D)$$

De plus, si aucun choc n'est détecté dans la cellule alors :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_G, \mathbf{U}_I, \mathbf{U}_D) = (\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_I)$$

Une fois l'étape de reconstruction achevée, la position du choc dans la cellule ne doit pas modifier la masse des quantités conservées. Il est à noter qu'en raison de la moyennation de la donnée initiale, le positionnement du choc peut différer d'une composante à l'autre. Il n'y a donc en réalité pas un mais N chocs à

positionner de manière à conserver les quantités d'intérêt. En notant $\delta^{n,i} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des distances par rapport à $x_{i-1/2}$ des N chocs reconstruits dans la cellule \mathcal{C}_i au temps t_n , il vient $\forall 1 \leq j \leq N, \forall 1 \leq i \leq N_x - 2$:

$$\begin{aligned} \Delta x \mathbf{U}_{i,j}^n &= \delta_j^{n,i} \tilde{\mathbf{U}}_{G,i,j}^n + (\Delta x - \delta_j^{n,i}) \tilde{\mathbf{U}}_{D,i,j}^n \\ \implies \delta_j^{n,i} &= \begin{cases} \frac{\mathbf{U}_{i,j}^n - \tilde{\mathbf{U}}_{D,i,j}^n}{\tilde{\mathbf{U}}_{G,i,j}^n - \tilde{\mathbf{U}}_{D,i,j}^n} \Delta x & \text{si } \tilde{\mathbf{U}}_{G,i,j}^n \neq \tilde{\mathbf{U}}_{D,i,j}^n \\ 0 & \text{si } \tilde{\mathbf{U}}_{G,i,j}^n = \tilde{\mathbf{U}}_{D,i,j}^n \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\mathbf{U}_{i,j}^n$ la j -ème composante de \mathbf{U}_i^n et $(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n, \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n) = \mathcal{R}(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$. Une hypothèse faite par la suite est que chacun de ces chocs se déplace à la même vitesse $\sigma(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n, \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n)$. Enfin, la solution reconstruite au temps t_n est définie sur $[x_{-1/2}, x_{N_x-1/2}]$ comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^n(x) &= \sum_{i=1}^{N_x-2} [\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n : \mathbb{1}_{(x < x_{i-1/2} + \delta^{n,i})} + \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n : \mathbb{1}_{(x > x_{i-1/2} + \delta^{n,i})}] \mathbb{1}_{[x_{i-1/2}, x_{i+1/2})} \\ &\quad + \mathbf{U}_0^n : \mathbb{1}_{[x_{-1/2}, x_{1/2})} + \mathbf{U}_{N_x-1}^n : \mathbb{1}_{[x_{N_x-3/2}, x_{N_x-1/2})} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Une éventualité est de calculer une position de choc à l'extérieur de la cellule courante : $\delta_j^{n,i} < 0$ ou $\delta_j^{n,i} > \Delta x$. Une possibilité est alors d'annuler la reconstruction. Dans le cas contraire, la reconstruction sera non-conservative, néanmoins (2.3) reste conservative.

2.3.4 Calcul des flux numériques

La dernière étape du schéma de reconstruction est le calcul des flux. De nouveaux chocs ont potentiellement été introduits lors du processus de reconstruction et, par conséquent, la CFL qui avait été énoncée pour la méthode de Godunov n'est plus correcte. En outre, éviter de gérer les interactions entre les différentes ondes du problème en se contentant de limiter le pas de temps n'a pas de sens puisqu'à chaque nouvelle itération, l'opérateur de reconstruction remplace l'onde de choc telle qu'elle a été advectée, et celle-ci se retrouve de toute manière plus proche du bord de cellule problématique. La suite des pas de temps décroîtrait donc de façon exponentielle si seule une condition de type CFL était imposée.

Un remède à ce problème est de considérer un maillage animé d'une vitesse \mathcal{V}^n uniforme, c'est-à-dire que tous les points se déplacent à la même vitesse :

$$\forall n \geq 0, \forall 0 \leq j \leq N_x, x_{j-1/2}^{n+1} = x_{j-1/2}^n + \mathcal{V}^n \Delta t_n$$

Si la vitesse du maillage est strictement plus grande que la vitesse d'onde maximale en valeur absolue σ_{\max}^n

$$|\mathcal{V}^n| > \sigma_{\max}^n \quad (2.14)$$

et si la nouvelle condition CFL est vérifiée

$$\Delta t_n < \frac{\Delta x}{|\mathcal{V}^n| + \sigma_{\max}^n} \quad (2.15)$$

alors la proposition suivante est vraie :

Proposition 2.3.1. Soit $s_{i-1/2}^n(\delta t) = x_{i-1/2}^n + \mathcal{V}^n \delta t$ la position de l'interface $i - 1/2$ au temps $\delta t \in (0, \Delta t_n]$ après t_n . Sous les hypothèses (2.14) et (2.15), chaque courbe $s_{i-1/2}^n$ intersecte au plus une onde entre t_n et t_{n+1} dans le cas scalaire. De plus, si pour une interface $s_{i-1/2}^n$ donnée une telle onde existe, elle est nécessairement issue du processus de reconstruction de la cellule \mathcal{C}_{i-1} ou \mathcal{C}_i en fonction du signe de \mathcal{V}^n .

PREUVE.

Soit $0 \leq i \leq N_x$. Dans ce qui suit, la vitesse du maillage est supposée strictement positive sans perte de généralité.

- La courbe de $s_{i-1/2}^n$ n'intersecte aucune onde issue de $x_{i-1/2}^n$ car $|\mathcal{V}^n| > \sigma_{\max}^n$.
- De même, aucune onde issue de $x_{i-1/2}^n$ ni de $x_{i+3/2}^n$ n'est intersectée par la courbe de $s_{i-1/2}^n$ puisque $\Delta t_n < \frac{\Delta x}{|\mathcal{V}^n| + \sigma_{\max}^n}$.
- Si une onde a été reconstruite dans \mathcal{C}_{i-1} , celle-ci n'aura pas le temps de rattraper $s_{i-1/2}^n$ car $\mathcal{V}^n > 0$ et $|\mathcal{V}^n| \geq \sigma_{\max}^n$.
- Au contraire, une onde reconstruite dans la cellule \mathcal{C}_i peut tout à fait intersecter $s_{i-1/2}^n$.
- Dans le cas scalaire, toute onde issue d'une interaction onde-onde ne peut intersecter $s_{i-1/2}^n$ car sa vitesse est inférieure à σ_{\max}^n en valeur absolue.

FIN DE LA PREUVE.

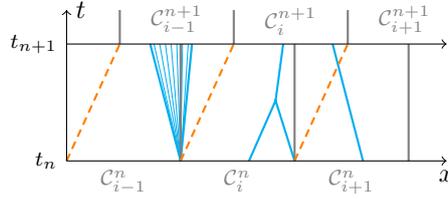


FIGURE 2.6 – Exemple d'intersection possible entre les interfaces des cellules (en orange) et les ondes (en bleu)

On aimerait ensuite évaluer le flux équivalent dans le référentiel en mouvement de vitesse \mathcal{V}^n . Pour cela, on considère le système de coordonnées (t, ξ) avec $\xi : (t, x) \mapsto x + \mathcal{V}^n t$. Soit $\varphi : (t, \xi) \mapsto \xi - \mathcal{V}^n t$ l'application de passage des coordonnées du référentiel en mouvement à celles du référentiel fixe, et soit $\tilde{\mathbf{u}}$ la solution de la loi de conservation dans le référentiel en mouvement. On a que $\tilde{\mathbf{u}}(t, \varphi(t, \xi)) = \mathbf{u}(t, \xi)$. L'équation ci-dessous est alors vérifiée :

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{\mathbf{u}}(t, \varphi(t, \xi)) + \partial_\xi \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t, \varphi(t, \xi))) = 0 \\
\implies & [\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \partial_t \varphi \partial_\varphi \tilde{\mathbf{u}} + D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_\xi \varphi \partial_\varphi \tilde{\mathbf{u}}](t, \varphi(t, \xi)) = 0 \\
\implies & [\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + (D\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{V}^n \text{Id}) \partial_\varphi \tilde{\mathbf{u}}](t, \varphi(t, \xi)) = 0 \\
\implies & [\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \partial_\varphi (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{u}})](t, \varphi(t, \xi)) = 0
\end{aligned}$$

Le flux équivalent est donc donné par $\tilde{\mathbf{u}} \mapsto \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{u}}$. Un schéma volumes finis sur un maillage en mouvement permettant de retrouver ce flux est obtenu en intégrant la loi de conservation sur chaque cellule entre les temps t_n et t_{n+1} .

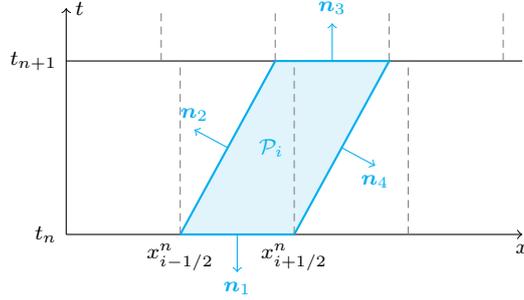


FIGURE 2.7 – Formulation intégrale sur une cellule en mouvement.

Le domaine d'intégration est dans ce cas un parallélogramme comme illustré dans la figure 2.7 dont les normales dans le plan (t, x) sont :

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_4 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathcal{V}^n)^2}} \begin{pmatrix} \mathcal{V}^n \\ -1 \end{pmatrix}$$

La loi de conservation s'écrit alors :

$$0 = \iint_{\mathcal{P}_i} [\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u})] dt dx = \iint_{\mathcal{P}_i} \mathbf{div}_{(t,x)}[\mathbf{u} \mathbf{f}(\mathbf{u})] dt dx$$

Ici $[\mathbf{u} \mathbf{f}(\mathbf{u})]$ est la matrice de $\mathbb{R}^{N \times 2}$ de colonnes \mathbf{u} et $\mathbf{f}(\mathbf{u})$. Par le théorème de divergence il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \mathcal{P}_i} [\mathbf{u} \mathbf{f}(\mathbf{u})] \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_{[x_{i-1/2}^{n+1}, x_{i+1/2}^{n+1}]} \mathbf{u}(t_{n+1}, x) dx - \int_{[x_{i-1/2}^n, x_{i+1/2}^n]} \mathbf{u}(t_n, x) dx - \\ &\quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathcal{V}^n \mathbf{u}](\tau, s_{i-1/2}^n(\tau)) d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathcal{V}^n \mathbf{u}](\tau, s_{i+1/2}^n(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour éviter que le maillage ne dévie trop de sa position initiale, une astuce est d'alterner le signe de \mathcal{V}^n à chaque itération. Par exemple le maillage se déplacera avec une vitesse positive lors des itérations paires et une vitesse négative lors des itérations impaires. Une conséquence de la proposition 2.3.1 est que les collisions d'ondes n'ont aucune influence sur les flux aux interfaces (voir figure 2.6). Ces derniers ne dépendent que de la vitesse du maillage et des valeurs prises par la solution reconstruite $\tilde{\mathbf{U}}^n$ au temps t_n en accord avec (2.16) :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}^n(s_{i-1/2}^n(t_{n+1} - t))) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}^n(s_{i-1/2}^n(t_{n+1} - t))) dt$$

De la même manière que pour le schéma de Godunov, le flux numérique est la moyenne du flux exact entre t_n et t_{n+1} . La différence ici est qu'il n'y a plus besoin de résoudre de problème de Riemann grâce au maillage en mouvement.

Si le signe de \mathcal{V}^n est positif, le flux numérique s'exprime comme :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\begin{aligned} & (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n) : \mathbb{1}_{(t < t_n + \boldsymbol{\tau}^{n,i})} \\ & + (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n) : \mathbb{1}_{(t > t_n + \boldsymbol{\tau}^{n,i})} \end{aligned} \right] dt \quad (2.17)$$

où $\boldsymbol{\tau}^{n,i}$ est le vecteur des temps d'intersections entre la courbe $s_{i-1/2}^n$ et les chocs reconstruits dans la cellule \mathcal{C}_i à l'itération n :

$$\boldsymbol{\tau}^{n,i} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\delta}^{n,i}}{\mathcal{V}^n - \sigma(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n, \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n)} & \text{si } \mathcal{C}_i \text{ a subi une reconstruction} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.18)$$

Enfin, l'intégrale (2.17) est développée pour aboutir à :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2}^n = & (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n) : \max \left(0, \min \left(1, \frac{\boldsymbol{\tau}^{n,i}}{\Delta t_n} \right) \right) \\ & + (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n) : \left[1 - \max \left(0, \min \left(1, \frac{\boldsymbol{\tau}^{n,i}}{\Delta t_n} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Le flux numérique s'exprime de façon similaire lorsque le signe de \mathcal{V}^n est négatif :

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\begin{aligned} & (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{D,i-1}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{D,i-1}^n) : \mathbb{1}_{(t < t_n + \boldsymbol{\tau}^{n,i})} \\ & + (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i-1}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{G,i-1}^n) : \mathbb{1}_{(t > t_n + \boldsymbol{\tau}^{n,i})} \end{aligned} \right] dt \quad (2.20)$$

Le vecteur des temps d'intersections s'écrit cette fois comme :

$$\boldsymbol{\tau}^{n,i} = \begin{cases} \frac{\Delta x - \boldsymbol{\delta}^{n,i}}{\sigma(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i}^n, \tilde{\mathbf{U}}_{D,i}^n) - \mathcal{V}^n} & \text{si } \mathcal{C}_{i-1} \text{ a subi une reconstruction} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.21)$$

Finalement, le flux numérique pour un maillage de vitesse négative s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-1/2}^n = & (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{D,i-1}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{D,i-1}^n) : \max \left(0, \min \left(1, \frac{\boldsymbol{\tau}^{n,i}}{\Delta t_n} \right) \right) \\ & + (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_{G,i-1}^n) - \mathcal{V}^n \tilde{\mathbf{U}}_{G,i-1}^n) : \left[1 - \max \left(0, \min \left(1, \frac{\boldsymbol{\tau}^{n,i}}{\Delta t_n} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

La consistance de ce schéma est assurée dès lors que l'opérateur de reconstruction vérifie :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}) = (\mathbf{U}, \mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^N$$

Par ailleurs, on peut montrer que si la propriété (2.23) est vérifiée, alors le schéma de reconstruction est exact pour toute donnée initiale de Riemann donnant lieu à un choc isolé.

$$\forall \alpha \in (0, 1), \quad \begin{cases} \mathcal{R}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_L, \alpha \mathbf{U}_L + (1 - \alpha) \mathbf{U}_R) = (\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_L) \\ \mathcal{R}(\alpha \mathbf{U}_L + (1 - \alpha) \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_R) = (\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_R) \end{cases} \quad (2.23)$$

Chapitre 3

Equations de Saint-Venant sans topographie

3.1 Motivation et présentation des équations

Les écoulements en milieu naturel sont aussi nombreux que variés et ont un fort impact sur notre vie quotidienne. Qu'il s'agisse d'un cours d'eau permettant d'alimenter le circuit de refroidissement d'une centrale nucléaire, d'une retenue d'eau en amont d'un barrage, ou encore d'un domaine maritime proche des côtes, il est important d'être en mesure d'anticiper une éventuelle catastrophe naturelle telle qu'une crue, une rupture de barrage ou encore un tsunami, et d'en connaître les conséquences précises. De fait, la compréhension des écoulements constitue un atout aussi bien pour se protéger des aléas que pour contrôler l'impact de l'activité humaine sur l'environnement. Il s'agit d'un enjeu majeur justifiant une recherche active du point de vue de la modélisation mathématique et la simulation numérique, et offre un cadre d'application intéressant dans le contexte de ce stage.

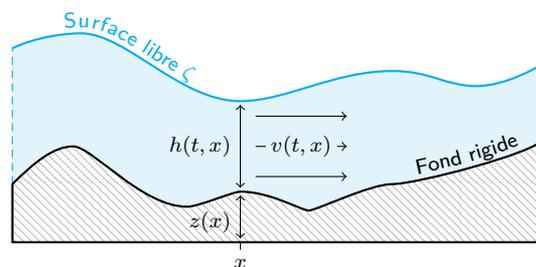


FIGURE 3.1 – Illustration d'un écoulement fluide à surface libre

Il est tout d'abord nécessaire d'identifier les quantités d'intérêt devant être

décrites par le modèle. L'écoulement fluide est supposé incompressible, et a lieu dans une géométrie variable délimitée par un fond rigide et une surface libre — usuellement l'interface séparant l'air et l'eau. Cette surface libre ζ est amenée à évoluer au gré des fluctuations du niveau d'eau h , par exemple lors de la propagation d'une vague, tandis que le fond rigide de hauteur z est supposé constant en temps (voir figure 3.1). Pour des raisons de simplicité, l'étude menée par la suite se restreint au cas unidimensionnel en espace. En notant v la vitesse moyenne du fluide intégrée sur la hauteur, p la pression hydraulique et g la constante d'accélération de la pesanteur, les équations de Saint-Venant permettent de relier entre elles ces différentes quantités :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0 \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + p) = -ghz' \end{cases} \quad (3.1)$$

La présence de trois inconnues h , v et p nécessite l'introduction d'une relation de fermeture : la loi de comportement $p = gh^2/2$ est utilisée. En notant le flux $q = hv$ et en posant $\mathbf{u} = (h, q)^T$, le vecteur flux $\mathbf{f} : \mathbf{u} \mapsto (q, q^2/h + gh^2/2)^T$ et le terme source $\mathbf{s} : (t, x, \mathbf{u}) \mapsto (0, -ghz'(x))^T$, ce système se réécrit sous forme vectorielle :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(t, x, \mathbf{u}) \quad (3.2)$$

Dans le cadre d'une topographie plane, qui revient à avoir un terme source nul, (h, q) forme un couple de variables conservées. C'est ce cas particulier qui est étudié dans un premier temps en s'appuyant sur (1.1), le cas du terme source non nul faisant l'objet d'une attention particulière au chapitre suivant.

Quelques données importantes sont énoncées sans plus attendre. La jacobienne du vecteur flux s'écrit pour $h > 0$:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - q^2/h^2 & 2q/h \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres associés sont :

$$\begin{cases} \lambda_1(\mathbf{u}) = q/h - \sqrt{gh}, & \mathbf{r}^1(\mathbf{u}) = (1, q/h - \sqrt{gh})^T \\ \lambda_2(\mathbf{u}) = q/h + \sqrt{gh}, & \mathbf{r}^2(\mathbf{u}) = (1, q/h + \sqrt{gh})^T \end{cases}$$

Le système de Saint-Venant est donc strictement hyperbolique dès lors que $h > 0$. Enfin, un simple calcul permet de montrer le caractère vraiment non-linéaire des vecteurs propres :

$$\nabla \lambda_{\pm}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}^{\pm}(\mathbf{u}) = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \neq 0 \quad \forall \mathbf{u} = (h, q), h > 0 \quad (3.3)$$

avec $\lambda_{\pm} \equiv \lambda_1$ ou λ_2 , et $\mathbf{r}^{\pm} \equiv \mathbf{r}^1$ ou \mathbf{r}^2 selon que l'onde est une 1-onde ou une 2-onde.

3.2 Résolution du problème de Riemann

Une des problématiques émergeant lors de la conception et l'implémentation d'un nouveau schéma numérique réside dans sa validation. A ce titre, il est nécessaire de pouvoir comparer la solution approchée par le schéma à la solution

analytique, impossible à obtenir dans le cas général. Il faut donc se placer dans des conditions simplifiées pour lesquelles la solution exacte peut être obtenue ou bien approchée de manière beaucoup plus fine que ne le permet le schéma à temps de calcul donné. Une des possibilités dans le cas des équations de Saint-Venant est le problème de Riemann caractérisé par la donnée initiale \mathbf{u}^0 :

$$\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{u}_G \mathbb{1}_{x < 0} + \mathbf{u}_D \mathbb{1}_{x > 0} \quad (3.4)$$

Une étude de ce problème dans le cas strictement hyperbolique est donc menée préliminairement à l'implémentation du schéma de reconstruction avec un double objectif, qui est de disposer à la fois d'une solution « quasi-analytique » en guise de référence et de résultats théoriques utiles par la suite.

Une méthode de résolution du problème de Riemann se voulant simple à mettre en œuvre et efficace est présentée dans les lignes qui suivent. Plusieurs difficultés entravent la résolution de ce problème :

- Il est nécessaire de connaître la nature des deux ondes afin de déterminer l'état intermédiaire \mathbf{u}_I .
- La nature de chacune des deux ondes est notamment caractérisée par l'état intermédiaire.

Il apparaît clairement que ces deux points sont corrélés, au sens où il n'est *a priori* pas possible d'en résoudre un sans connaître la solution de l'autre. D'une part, il est nécessaire de proposer les critères qui, en fonction de \mathbf{u}_G , \mathbf{u}_I et \mathbf{u}_D , permettent de déterminer la nature des ondes. L'idée consiste à construire des sous-ensembles $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)$ de \mathbb{R}_+ de telle sorte que la 1-onde est une détente si et seulement si $h_I \in \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)$, et la 2-onde est une détente si et seulement si $h_I \in \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)$. D'autre part, il faut être en mesure de déterminer l'état \mathbf{u}_I . En supposant connues les fonctions suivantes :

- $\mathcal{C}_1^{\mathbf{u}_G} : \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)^{\mathbb{G}} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction telle que pour tout $h_I \in \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)^{\mathbb{G}}$, la vitesse $v_I = \mathcal{C}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I)$ permet de relier directement l'état de gauche à l'état intermédiaire par un 1-choc.
- $\mathcal{C}_2^{\mathbf{u}_D} : \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)^{\mathbb{G}} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction telle que pour tout $h_I \in \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)^{\mathbb{G}}$, la vitesse $v_I = \mathcal{C}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I)$ permet de relier directement l'état intermédiaire à l'état de droite par un 2-choc.
- $\mathcal{D}_1^{\mathbf{u}_G} : \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G) \mapsto \mathbb{R}$ la fonction telle que pour tout $h_I \in \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)$, la vitesse $v_I = \mathcal{D}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I)$ permet de relier directement l'état de gauche à l'état intermédiaire par une 1-détente.
- $\mathcal{D}_2^{\mathbf{u}_D} : \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D) \mapsto \mathbb{R}$ la fonction telle que pour tout $h_I \in \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)$, la vitesse $v_I = \mathcal{D}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I)$ permet de relier directement l'état de gauche à l'état intermédiaire par une 2-détente.

on peut définir :

$$\mathcal{W}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I) = \begin{cases} \mathcal{D}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I) & \text{si } h_I \in \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G) \\ \mathcal{C}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I) & \text{si } h_I \notin \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{W}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I) = \begin{cases} \mathcal{D}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I) & \text{si } h_I \in \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D) \\ \mathcal{C}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I) & \text{si } h_I \notin \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D) \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans le cas des équations de Saint-Venant, l'état intermédiaire est directement relié à \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D par deux ondes. Ainsi, h_I est solution de l'équation $\mathcal{W}_1^{\mathbf{u}_G}(h) =$

$\mathcal{W}_2^{u_D}(h)$ pour laquelle il peut être montré l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D sont suffisamment proches. Il suffira donc de résoudre cette équation pour obtenir $\mathbf{u}_I = (h_I, h_I \mathcal{W}_1^{u_G}(h_I))^T$. On a le lemme suivant, dont on se servira par la suite pour déterminer le profil des détentés et pour disposer d'un critère de détection des chocs.

Lemme 3.2.1. *Sous la condition entropique de Lax, la 1-onde est une détente si et seulement si $h_I \leq h_G$, et la 2-onde est une détente si et seulement si $h_I \leq h_D$. Par ailleurs, la hauteur d'eau h est strictement monotone dans les zones de détente.*

PREUVE.

Soit \mathbf{u} solution du problème de Riemann comportant une 1-détente. D'après (1.17) il existe un unique état intermédiaire \mathbf{u}_I tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{w}(x/t) & \forall \lambda_1(\mathbf{u}_G) \leq x/t \leq \lambda_1(\mathbf{u}_I) \\ \frac{d\mathbf{w}}{d\xi}(\xi) = \frac{\mathbf{r}^1(\mathbf{w}(\xi))}{\nabla \lambda_1(\mathbf{w}(\xi)) \cdot \mathbf{r}^1(\mathbf{w}(\xi))} & \forall \lambda_1(\mathbf{u}_G) \leq \xi \leq \lambda_1(\mathbf{u}_I) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\implies \frac{d\tilde{h}}{d\xi} = -\frac{2}{3\sqrt{g}}\sqrt{\tilde{h}} \quad \text{avec } \tilde{h} \text{ la première composante de } \mathbf{w}$$

Le terme de droite étant inconditionnellement strictement négatif, ceci implique la stricte décroissance de \tilde{h} , d'où h est strictement décroissante à travers la 1-détente à temps constant, et donc nécessairement $h_I < h_G$.

La réciproque se fait par l'absurde. Soient deux états \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_I avec $h_I < h_G$ tels que \mathbf{u}_G est relié à \mathbf{u}_I par un 1-choc. Alors la condition de Lax implique :

$$\lambda_1(\mathbf{u}_G) \geq \sigma \geq \lambda_1(\mathbf{u}_I)$$

avec σ la vitesse de propagation du 1-choc, exprimée par :

$$\sigma = \frac{h_G v_G - h_I v_I}{h_G - h_I}$$

En injectant cette expression dans la condition de Lax il vient :

$$\begin{aligned} v_G - \sqrt{gh_G} &\geq \frac{h_G v_G - h_I v_I}{h_G - h_I} \geq v_I - \sqrt{gh_I} \\ \implies \begin{cases} v_I \geq v_G - \frac{h_I - h_G}{h_I} \sqrt{gh_G} \\ v_G \geq v_I - \frac{h_G - h_I}{h_G} \sqrt{gh_I} \end{cases} \\ \implies \frac{h_G - h_I}{h_G} \sqrt{gh_I} &\geq v_I - v_G \geq \frac{h_G - h_I}{h_I} \sqrt{gh_G} \\ \implies h_I^{3/2} &\geq h_G^{3/2} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est en contradiction avec l'hypothèse $h_I < h_G$. Par conséquent, la 1-onde est nécessairement une détente.

La preuve pour la 2-onde se fait de manière similaire.

FIN DE LA PREUVE.

Il est alors possible de définir les ensembles $\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)$ et $\mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G) &= \{h \in \mathbb{R}_+, h \leq h_G\} \\ \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D) &= \{h \in \mathbb{R}_+, h \leq h_D\}\end{aligned}$$

Les équations aux dérivées ordinaires sur les courbes intégrales sont résolues afin de déterminer les fonctions $\mathcal{C}_1^{\mathbf{u}_G}, \mathcal{C}_2^{\mathbf{u}_D}, \mathcal{D}_1^{\mathbf{u}_G}, \mathcal{D}_2^{\mathbf{u}_D}$, ainsi que les profils des détenteurs et les sauts.

Cas d'une onde de détente. Soient \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 deux états reliés directement par une détente, avec h_1, h_2, v_2 connus. En posant $\lambda_{\pm} \equiv \lambda_1$ ou $\lambda_{\pm} \equiv \lambda_2$ selon que la détente est une 1-onde ou une 2-onde, il faut déterminer la vitesse v_1 telle que $h^*(\lambda_{\pm}(\mathbf{u}_1)) = h_1$, où la hauteur h^* et la vitesse v^* vérifient au sens fort :

$$\begin{cases} \frac{dh^*}{d\xi} = \pm \frac{2}{3\sqrt{g}} \sqrt{h^*} \\ \frac{d(h^*v^*)}{d\xi} = \frac{2}{3} h^* \pm \frac{2}{3\sqrt{g}} \sqrt{h^*} v^* \end{cases} \quad (3.8)$$

sur l'intervalle $\Xi = (\min(\lambda_{\pm}(\mathbf{u}_1), \lambda_{\pm}(\mathbf{u}_2)), \max(\lambda_{\pm}(\mathbf{u}_1), \lambda_{\pm}(\mathbf{u}_2)))$. En posant $z = \sqrt{h^*}$ la première de ces équations devient :

$$2z \left(z' \mp \frac{1}{3\sqrt{g}} \right) = 0$$

Outre la solution triviale $z \equiv 0 \Rightarrow h^* \equiv 0$ (possible seulement si h_1 et h_2 sont nuls et si $v_1 = v_2$), dans la zone de détente la hauteur s'écrit :

$$h^*(\xi) = \left(\pm \frac{1}{3\sqrt{g}} (\xi - v_2) + \frac{2}{3} \sqrt{h_2} \right)^2 \quad (3.9)$$

Une propriété importante de h^* est sa stricte monotonie sur Ξ d'après le lemme 3.2.1. Par conséquent, si ξ_1 est solution de $\widetilde{h}^*(\xi_1) = h_1$ avec \widetilde{h}^* le prolongement par continuité de h^* sur l'adhérence de Ξ , alors nécessairement $\xi_1 = \lambda_{\pm}(\mathbf{u}_1)$ d'où $v_1 = \xi_1 \mp \sqrt{gh_1}$. Il est aisé de déterminer ξ_1 en distinguant les deux ondes :

— Cas d'une 1-détente. Il faut prendre $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_I$ et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_G$. L'équation $\widetilde{h}^*(\xi) = h_I$ admet deux solutions :

$$\begin{aligned} \xi &= v_G + 2\sqrt{gh_G} - 3\sqrt{gh_I} \quad \text{ou} \quad \xi = v_G + 2\sqrt{gh_G} + 3\sqrt{gh_I} \\ \implies v_I &= v_G + 2\sqrt{gh_G} - 2\sqrt{gh_I} \quad \text{ou} \quad v_I = v_G + 2\sqrt{gh_G} + 4\sqrt{gh_I} \end{aligned}$$

Pour que la fonction $h_I \mapsto (h_I, h_I v_I)^T$ soit tangente à $\mathbf{r}^1(\mathbf{u}_G)$ en h_G , il faut prendre :

$$v_I = \mathcal{D}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I) = v_G + 2\sqrt{gh_G} - 2\sqrt{gh_I} \quad (3.10)$$

— Cas d'une 2-détente. Il faut prendre $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_I$ et $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_D$. L'équation $\widetilde{h}^*(\xi) = h_I$ admet deux solutions :

$$\begin{aligned} \xi &= v_D - 2\sqrt{gh_D} - 3\sqrt{gh_I} \quad \text{ou} \quad \xi = v_D - 2\sqrt{gh_D} + 3\sqrt{gh_I} \\ \implies v_I &= v_D - 2\sqrt{gh_D} - 4\sqrt{gh_I} \quad \text{ou} \quad v_I = v_D - 2\sqrt{gh_D} + 2\sqrt{gh_I} \end{aligned}$$

Pour que la fonction $h_I \mapsto (h_I, h_I v_I)^T$ soit tangente à $\mathbf{r}^2(\mathbf{u}_D)$ en h_D , il faut prendre :

$$v_I = \mathcal{D}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I) = v_D - 2\sqrt{gh_D} + 2\sqrt{gh_I} \quad (3.11)$$

Le profil de la détente pour h est déduit de (3.9), et il ne reste plus qu'à déterminer celui de la vitesse. En reprenant l'équation de la courbe intégrale (3.8), puis en utilisant le fait que $dh^* = \pm \frac{2}{3\sqrt{g}} \sqrt{h^*} d\xi$, il vient :

$$\frac{dv^*}{d\xi} = \frac{2}{3} \implies v^*(\xi) = \frac{2}{3}\xi + K \quad \text{avec } K = \frac{1}{3}v_1 \mp \frac{2}{3}\sqrt{gh_1}$$

Cas d'une onde de choc. Soient \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 deux états reliés directement par un choc, avec h_1, h_2, v_2 connus et vérifiant $h_1 \neq h_2$, $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$. La relation de Rankine-Hugoniot permet de déterminer v_1 en fonction de ces paramètres :

$$\begin{cases} s = \frac{h_2 v_2 - h_1 v_1}{h_2 - h_1} \\ h_2 v_2^2 + \frac{g}{2} h_2^2 - h_1 v_1^2 - \frac{g}{2} h_1^2 = \frac{h_2 v_2 - h_1 v_1}{h_2 - h_1} (h_2 v_2 - h_1 v_1) \end{cases}$$

Il vient que v_1 est racine du polynôme du second degré suivant :

$$v_1^2 - 2v_2 v_1 + \left[v_2^2 - \frac{g}{2} \left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1}{h_2} \right) (h_2 - h_1) \right] = 0$$

Les racines sont :

$$v_1^\pm = v_2 \pm \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1}{h_2} \right) (h_2 - h_1)}$$

Pour déterminer laquelle de ces deux racines est la bonne, il faut utiliser le fait que la fonction $\tilde{\mathbf{u}}_1 : h_1 \mapsto (h_1, h_1 v_1^\pm)^T$ doit être tangente en h_2 au vecteur propre $\mathbf{r}^1(\mathbf{u}_2)$ dans le cas d'un 1-choc, et au vecteur propre $\mathbf{r}^2(\mathbf{u}_2)$ dans le cas d'un 2-choc. Comme $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_1}{dh_1} = (1, v_1^\pm + h_1 \frac{dv_1^\pm}{dh_1})$, il suffit de calculer $\frac{dv_1^\pm}{dh_1}$. Il suit :

$$\begin{aligned} \frac{dv_1^\pm}{dh_1}(h) &= \pm \sqrt{\frac{g}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{h_2}{h} - \frac{h}{h_2}\right)(h - h_2)}} \times \left[\left(\frac{h_2}{h^2} + \frac{1}{h_2}\right)(h - h_2) + \frac{h}{h_2} - \frac{h_2}{h} \right] \\ &= \pm \sqrt{\frac{g}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{h_2}{h} - \frac{h}{h_2}\right)}} \times \left[\frac{h_2}{h^2} + \frac{1}{h_2} + \frac{h^2 - h_2^2}{hh_2(h - h_2)} \right] \\ &= \pm \sqrt{\frac{g}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{hh_2}{h + h_2}}} \times \left[\frac{h^2 + h_2^2}{h^2 h_2} + \frac{h + h_2}{hh_2} \right] \end{aligned}$$

Finalement $\frac{dv_1^\pm}{dh_1}(h_2) = \pm \frac{1}{h_2} \sqrt{gh_2}$. Ainsi, dans le cas d'un 1-choc il suffit de poser $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_I$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_G$ d'où $v_I = v_1^-(h_G)$, tandis que pour un 2-choc il faut poser $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_I$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_D$ d'où $v_I = v_1^+(h_D)$.

Le cas $h_1 = h_2 \neq 0$ est simple à gérer puisque nécessairement $v_1 = v_2$ d'après Rankine-Hugoniot, ce qui correspond bien à la valeur de v_1^\pm en h_2 . Si $h_1 = 0$ ou $h_2 = 0$, le problème n'est plus strictement hyperbolique car le système de Saint-Venant admet une seule valeur propre de multiplicité double dans certaines régions du domaine qualifiées comme « sèches » (par absence de fluide).

Ceci aboutit à :

$$v_I = \begin{cases} \mathcal{C}_1^{\mathbf{u}_G}(h_I) = v_G - \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{h_G}{h_I} - \frac{h_I}{h_G} \right) (h_G - h_I)} & \forall h_I \in \mathcal{A}_1(\mathbf{u}_G)^{\mathcal{G}} \\ \mathcal{C}_2^{\mathbf{u}_D}(h_I) = v_D + \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{h_D}{h_I} - \frac{h_I}{h_D} \right) (h_D - h_I)} & \forall h_I \in \mathcal{A}_2(\mathbf{u}_D)^{\mathcal{G}} \end{cases} \quad (3.12)$$

3.3 Mise en œuvre du schéma de reconstruction

Le schéma de reconstruction est maintenant appliqué aux équations de Saint-Venant sans topographie. Les deux points principaux sont l'obtention un détecteur de chocs et d'un opérateur de reconstruction de sorte que le schéma soit exact sur les chocs isolés. Pour rappel, le détecteur de chocs doit satisfaire les propriétés suivantes pour un maillage suffisamment raffiné :

- le détecteur de chocs doit détecter toutes les cellules comportant au moins un choc entropique dissipé ;
- le détecteur de chocs doit limiter le plus possible le nombre de détections erronées ;

Notamment, le lemme 3.2.1 fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 1-onde ou une 2-onde soit un choc, moyennant la connaissance de la hauteur intermédiaire h_I reliant les états \mathbf{u}_G et \mathbf{u}_D . Par conséquent, pour un maillage suffisamment fin, une cellule \mathcal{C}_i comporte un 1-choc seulement si $h_I > h_{i-1}$ et un 2-choc seulement si $h_I > h_{i+1}$, avec h_I la solution de $\mathcal{W}_1^{\mathbf{u}_{i-1}}(h) = \mathcal{W}_2^{\mathbf{u}_{i+1}}(h)$. Il faut donc résoudre un problème de Riemann entre chaque couple de cellules \mathcal{C}_{i-1} , \mathcal{C}_{i+1} afin d'obtenir h_I , ce qui peut s'avérer inefficace en termes de temps de calcul si la discrétisation spatiale est très fine. Pour contourner ce problème, il est possible de simplifier la condition :

Lemme 3.3.1 (Condition suffisante pour la présence d'un choc). *Le problème de Riemann entre $\mathbf{u}_G = (h_G, h_G v_G)^T$ et $\mathbf{u}_D = (h_D, h_D v_D)^T$ comporte un 1-choc si $v_G > v_D$ et $h_G < h_D$, et comporte un 2-choc si $v_G > v_D$ et $h_G > h_D$.*

La preuve de ce lemme est une conséquence directe de 3.2.1. En effet, la vitesse est croissante dans les zones de détente, tandis que la hauteur est croissante à travers les 1-chocs et décroissante à travers les 2-chocs.

Les états reconstruits dans la cellule \mathcal{C}_i sont choisis comme ceux apparaissant dans la solution du problème de Riemann entre les états des cellules \mathcal{C}_{i-1} et \mathcal{C}_{i+1} . Ainsi, si l'on note \mathbf{U}_I l'état intermédiaire de ce problème de Riemann, on a :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = \begin{cases} (\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_I) & \text{si le choc détecté est une 1-onde} \\ (\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_{i+1}) & \text{si le choc détecté est une 2-onde} \end{cases}$$

Les figures 3.2 à 3.6 montrent les résultats obtenus par le schéma de reconstruction des chocs pour différents problèmes de Riemann. On peut voir que ce schéma est beaucoup plus précis au niveau des chocs en comparaison à d'autres méthodes telles que HLL. Bien que la reconstruction ne permette pas de gagner en ordre, l'erreur est presque systématiquement inférieure à celle des autres méthodes utilisées, la seule exception étant le cas du point sonique pour lequel Godunov semble meilleur (voir figure 3.6).

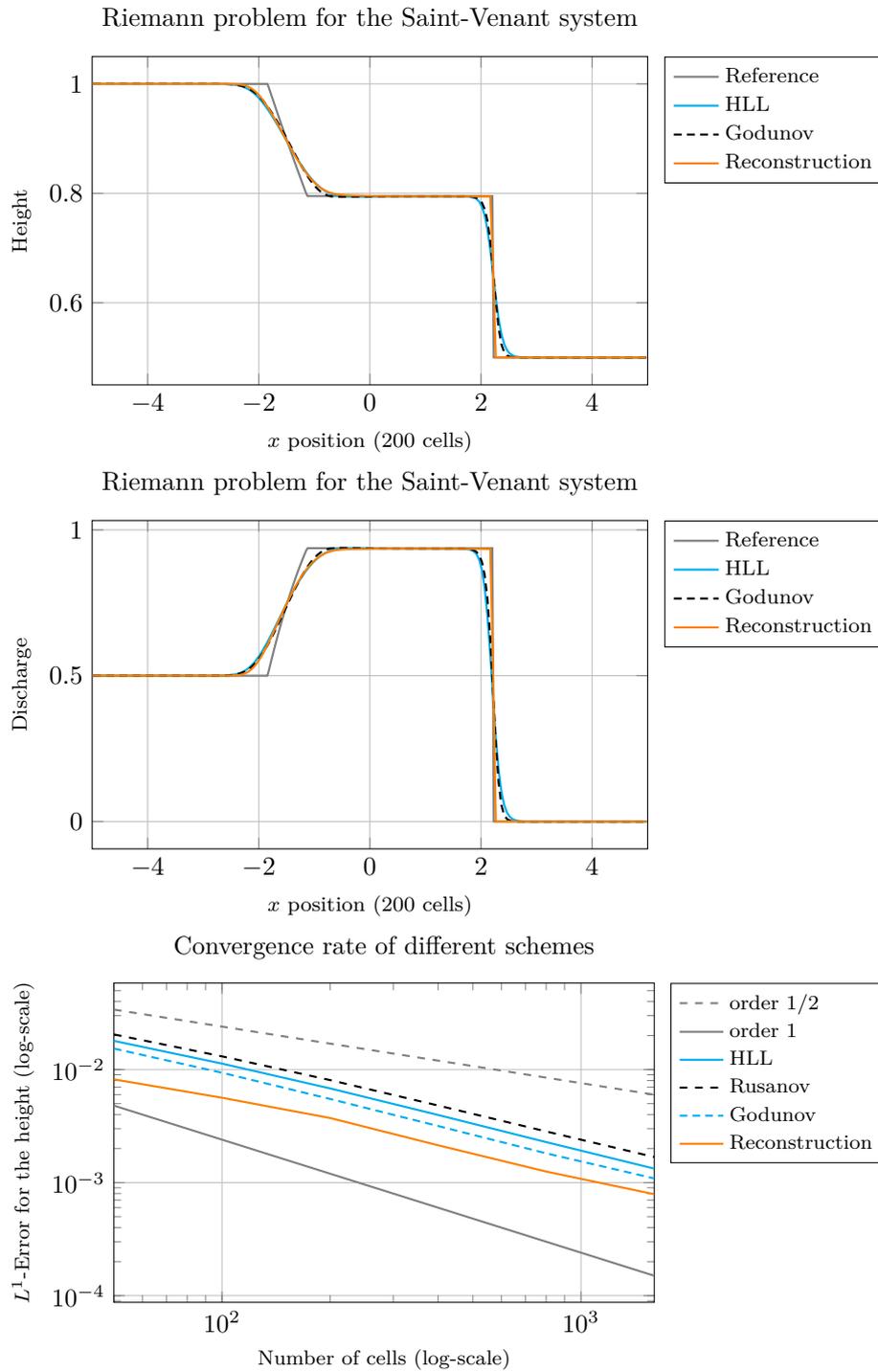


FIGURE 3.2 – Problème de Riemann faisant apparaître une 1-détente et un 2-choc. Les deux courbes du haut ont été obtenues avec un maillage de 200 cellules.

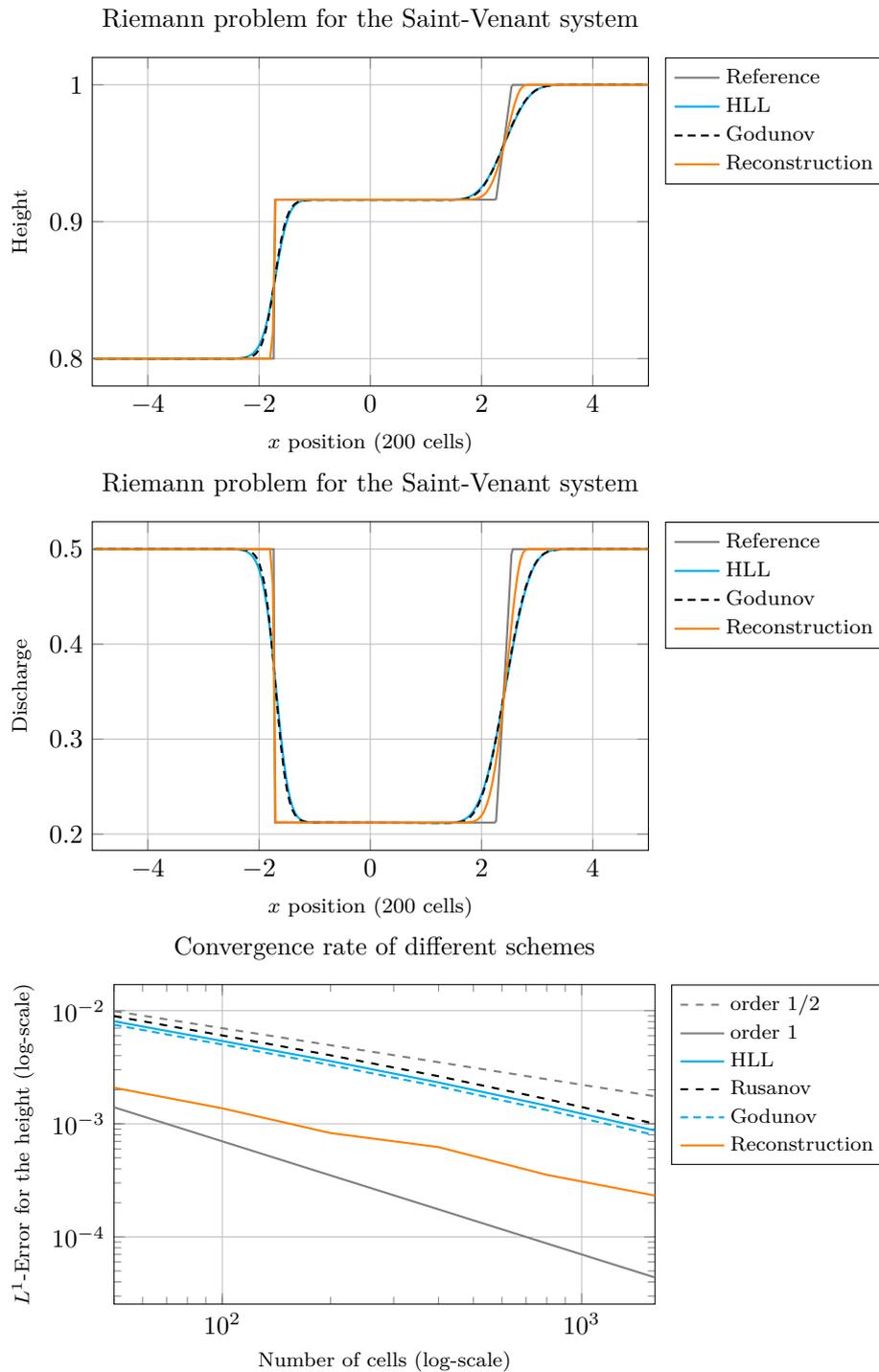


FIGURE 3.3 – Problème de Riemann faisant apparaître un 1-choc et une 2-détente. Les deux courbes du haut ont été obtenues avec un maillage de 200 cellules.

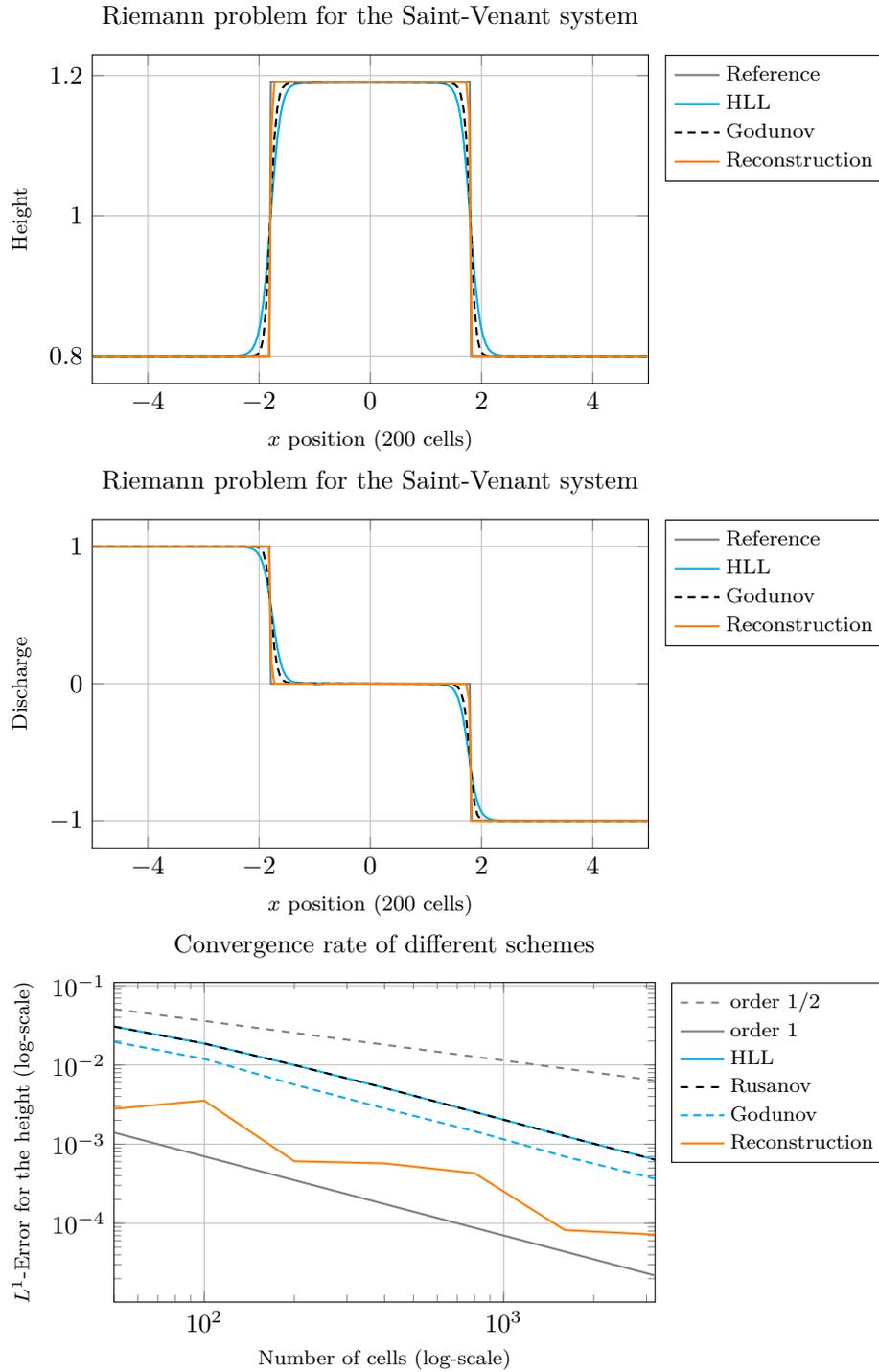


FIGURE 3.4 – Problème de Riemann faisant apparaître un 1-choc et un 2-choc. Les deux courbes du haut ont été obtenues avec un maillage de 200 cellules.

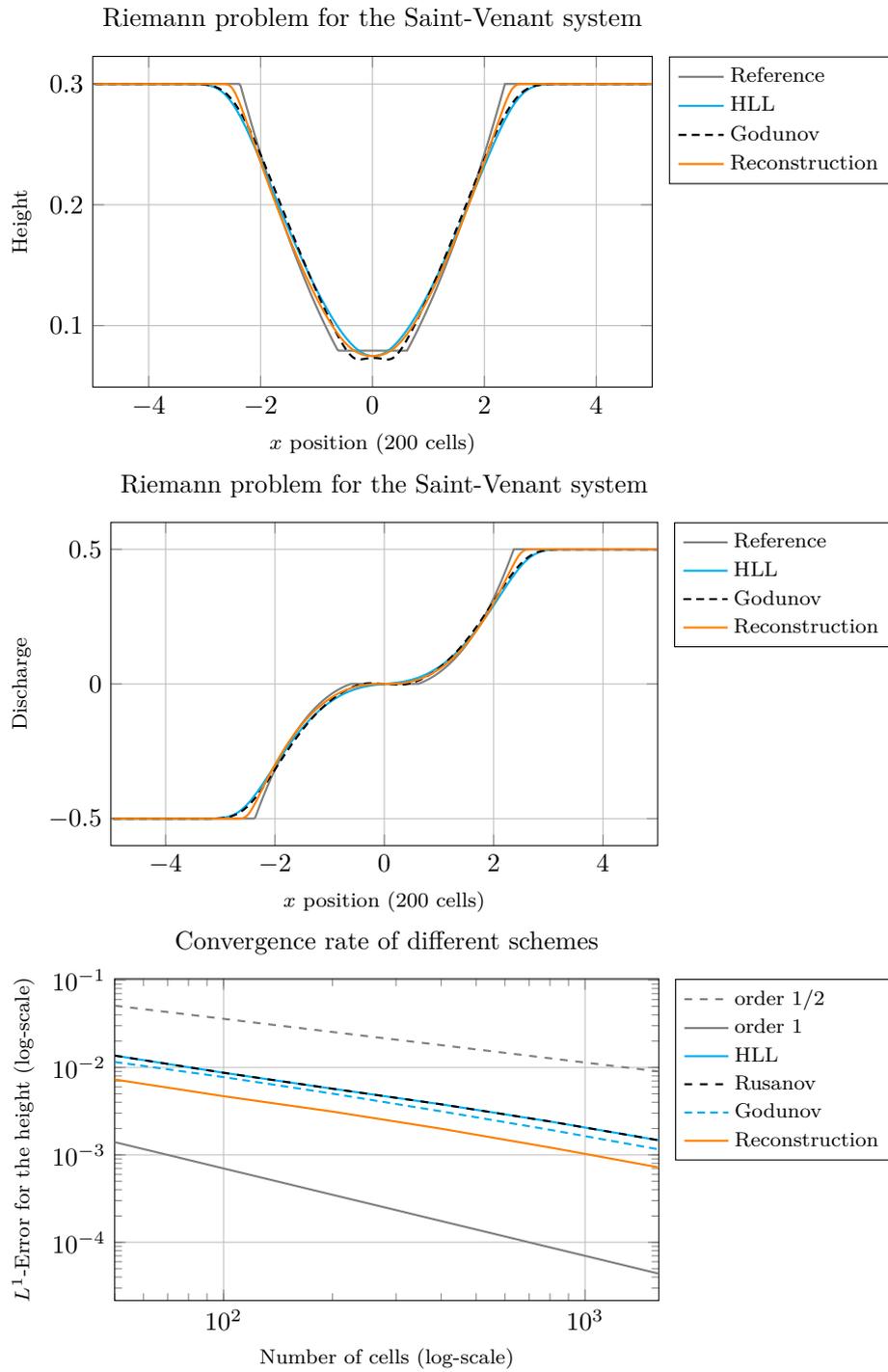


FIGURE 3.5 – Problème de Riemann faisant apparaître une 1-détente et une 2-détente. Les deux courbes du haut ont été obtenues avec un maillage de 200 cellules.

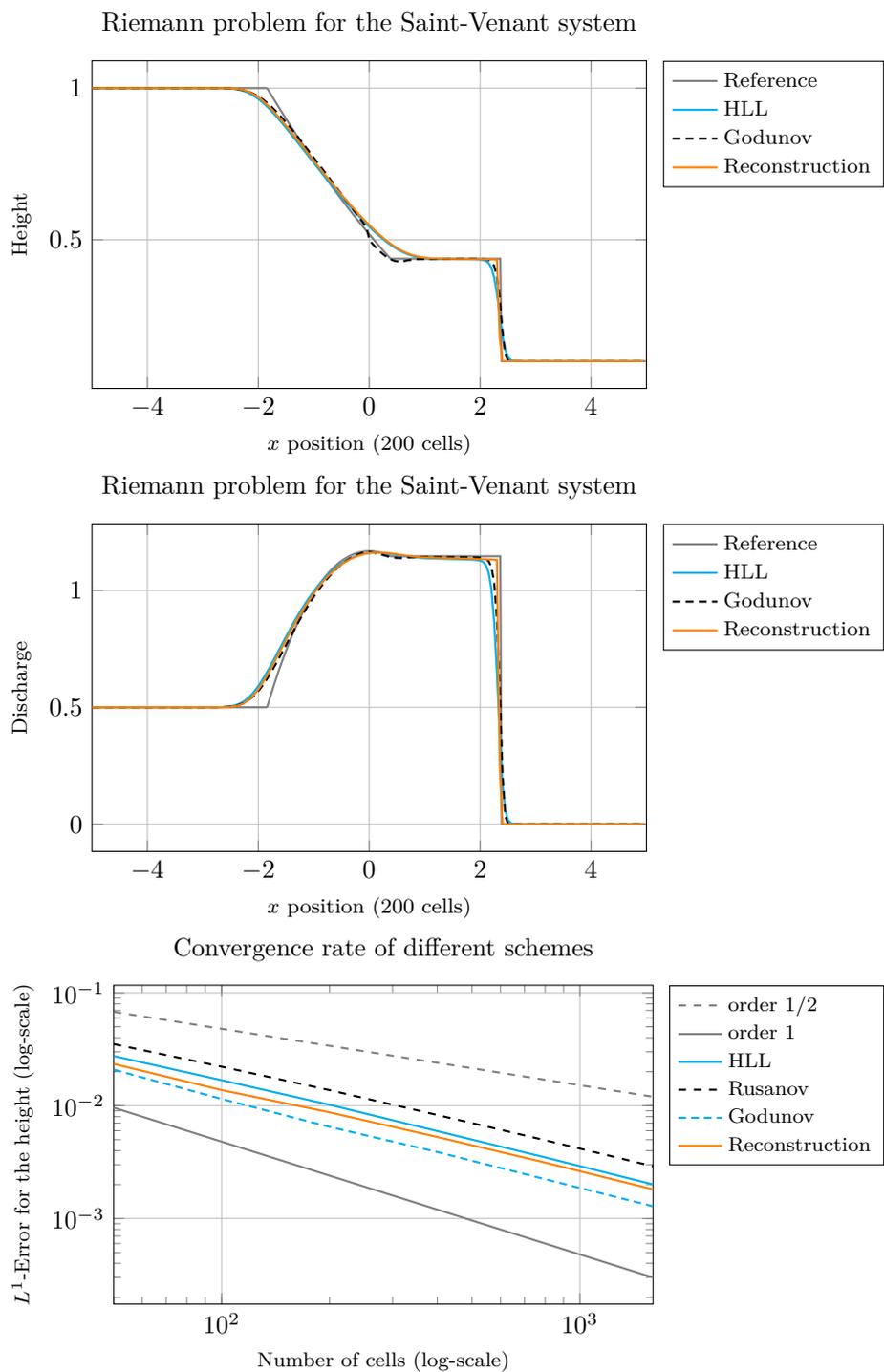


FIGURE 3.6 – Phénomène de détente comportant un point sonique : la vitesse de l’onde change de signe dans la zone de détente, d’où la solution auto-similaire reste constante en temps en $x = 0$. Ce point sonique se traduit notamment par une inversion du signe de variation du débit dans la zone de détente.

Chapitre 4

Equations de Saint-Venant avec topographie

4.1 Présentation du problème

La plupart des écoulements fluides ont lieu sur une topographie non nécessairement plane. Il est donc primordial d'étendre le cadre d'application du schéma de reconstruction des chocs afin de prendre en compte les fonds rigides quelconques, sans quoi son utilité resterait limitée. Cette section vise à mettre en avant les difficultés auxquelles nous sommes confrontés. La section suivante présente une solution générique sous la forme d'une méthode de reconstruction hydrostatique [2] qui, lorsqu'elle est superposée à un schéma volumes finis sur maillage fixe, permet de bien gérer les topographies tout en préservant les états stationnaires. Enfin, la dernière section propose une méthode combinant reconstruction hydrostatique et reconstruction des chocs pour parvenir à notre objectif.

Soit $z \in C^0(\mathbb{R})$ la fonction à valeurs réelles positives dont la courbe coïncide avec la hauteur de la topographie par rapport à une référence arbitraire. Les équations de Saint-Venant pour cette topographie s'écrivent au sens des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = k(t, x) \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + gh^2/2) = -ghz' \end{cases} \quad (4.1)$$

La fonction k correspond à un terme d'ajout ou de retrait de fluide ponctuel et est donné en termes de variation de hauteur par unité de temps. Dans notre cas, il n'y a pas de modification extérieure de la quantité de fluide d'où $k(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in \Omega$. On notera par la suite ζ la hauteur totale $h + z$.

De façon générale, un problème de transport avec terme source prend la forme :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(t, x, \mathbf{u})$$

Les variables \mathbf{u} ne sont plus conservées étant donné que le second membre induit une augmentation ou une diminution de la masse totale du système. Néanmoins,

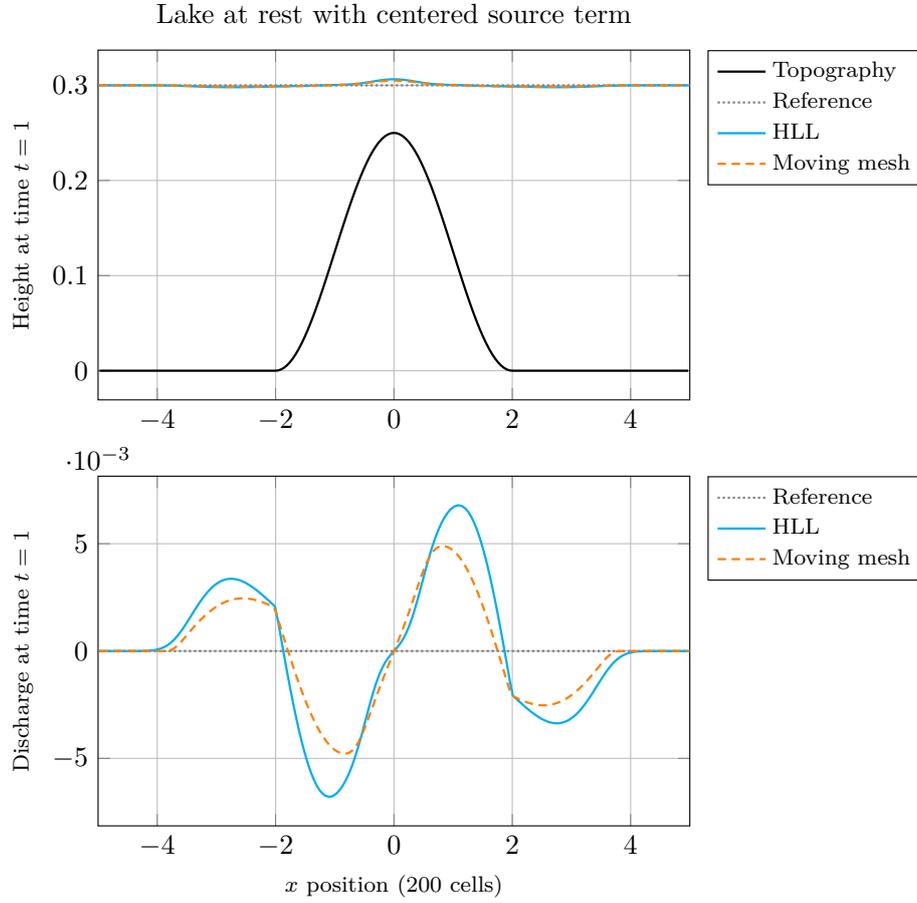


FIGURE 4.1 – Les schémas HLL et de maillage mobile, lorsqu'ils sont couplés au terme source centré, préservent mal l'état stationnaire.

il est possible de se ramener au formalisme hyperbolique en considérant le terme source comme une inconnue. Les méthodes numériques évoquées au chapitre 2 peuvent donc être appliquées *a priori* sans problème, moyennant une discrétisation consistante du second membre. Nous allons voir que la gestion numérique de ce terme source n'est en réalité pas évidente pour les équations de Saint-Venant, puisqu'une approche naïve faisant intervenir une approximation centrée en espace

$$\begin{cases} \mathbf{S}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i(t)} \mathbf{s}(t_n, x, \mathbf{U}_i^n) dx dt + \mathcal{O}(\Delta x) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) + \Delta t_n \mathbf{S}_i^n + \mathcal{O}(\Delta t_n) \end{cases} \quad (4.2)$$

peut aboutir à un comportement anormal de la solution. Notamment, une contrainte qu'il est souhaitable de respecter est la préservation des états stationnaires, c'est-à-dire que la solution reste constante pour un certain jeu de données initiales. Dans le cas des équations de Saint-Venant, l'état sta-

tionnaire correspond par exemple à un lac au repos : $\zeta \equiv \text{Cst}$. Ainsi, pour un état initial tel que $\partial_x \zeta(t = 0, \cdot) \equiv 0$ et $v(t = 0, \cdot) \equiv 0$, on doit avoir $\partial_t h(t, x) = \partial_t v(t, x) = 0 \forall (t, x) \in \Omega$. Or les méthodes usuelles de la forme (4.2) introduisent une variation de la surface libre, et ne sont donc pas convenables.

La figure 4.1 illustre cet échec. Le schéma sur maillage mobile considéré n'est autre que le schéma de reconstruction pour lequel toutes les reconstructions sont rejetées :

$$\mathcal{R}(U_G, U_I, U_D) = (U_I, U_I)$$

On peut voir après un certain temps une légère variation de hauteur d'eau et de débit dans la zone présentant une variation de topographie.

4.2 Reconstruction hydrostatique du terme source

On cherche un moyen d'assurer le bon comportement des schémas numériques vis-a-vis du lac au repos. Par bon comportement, on entend que si la propriété suivante

$$\forall i, \quad h_i^n + z_i^n = \text{Cst}, \quad v_i^n = 0 \quad (4.3)$$

est vraie pour $n = 0$, alors elle le reste pour tout n . On se restreint dans un premier temps au cas d'un maillage fixe, et l'on dira d'un schéma vérifiant ((4.3) vraie à l'itération $n = 0 \implies (4.3)$ vraie $\forall n \geq 1$) qu'il est bien balancé. La méthode de reconstruction hydrostatique proposée dans [2] permet de gérer exactement les états stationnaires, et ce indépendamment du flux numérique choisi. Notamment, elle offre l'avantage de préserver la conservativité du schéma volumes finis auquel elle est couplée et est relativement simple à implémenter, comme détaillé dans les lignes qui suivent.

Dans le cas continu, les équations de Saint-Venant en régime stationnaire sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \partial_t h = 0 \\ \partial_x \left(\frac{gh^2}{2} \right) = -ghz' \end{cases} \quad (4.4)$$

En intégrant la deuxième équation entre $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$ il vient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -ghz' dx = \frac{g(h_{i+1/2-}^n)^2}{2} - \frac{g(h_{i-1/2+}^n)^2}{2}$$

Les quantités aux interfaces $h_{i+1/2-}$ et $h_{i-1/2+}$ sont définies en exploitant la relation (4.3) :

$$\begin{aligned} h_{i+1/2-}^n &= [h_i^n + z_i - z_{i+1/2}]_+, & h_{i-1/2+}^n &= [h_i^n + z_i - z_{i-1/2}]_+ \\ z_{i+1/2} &= \max(z_i, z_{i+1}) \end{aligned}$$

La quantité $h_{i+1/2-}^n$ (resp. $h_{i-1/2+}^n$) peut être vue comme la hauteur d'eau reconstruite au voisinage à gauche de l'interface $i + 1/2$ (resp. la hauteur d'eau reconstruite au voisinage à droite de l'interface $i - 1/2$). Le choix décentré de $z_{i\pm 1/2}$, bien que contre-intuitif, assure la stabilité de la méthode. Ceci permet de définir la reconstruction hydrostatique des vecteurs d'états et du terme source :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2-}^n &= \begin{pmatrix} h_{i+1/2-}^n \\ h_{i+1/2-}^n v_i^n \end{pmatrix}, & \mathbf{U}_{i-1/2+}^n &= \begin{pmatrix} h_{i-1/2+}^n \\ h_{i-1/2+}^n v_i^n \end{pmatrix} \\ \mathbf{S}_{i+1/2-}^n &= \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (h_{i+1/2-}^n)^2 - (h_i^n)^2 \end{pmatrix}, & \mathbf{S}_{i-1/2+}^n &= \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (h_i^n)^2 - (h_{i-1/2+}^n)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit \mathcal{F} un flux numérique quelconque. Alors la méthode de reconstruction hydrostatique associée à ce flux numérique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathcal{F}(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) \right. \\ \left. - \mathbf{S}_{i+1/2-}^n - \mathbf{S}_{i-1/2+}^n \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

On peut montrer que, si \mathcal{F} est un flux consistant qui préserve la positivité des h_i^n , alors le schéma défini par (4.5) préserve lui aussi la positivité des h_i^n , est consistant vis-à-vis du flux analytique et du terme source, et a la propriété bien balancé. Une preuve détaillée peut être trouvée dans [2].

4.3 Adaptation de la méthode de reconstruction hydrostatique à un maillage mobile

Une première étape à franchir est d'adapter la reconstruction hydrostatique au cas d'un maillage en mouvement. Pour rappel, les équations de Saint-Venant dans un référentiel animé d'une vitesse \mathcal{V} s'écrivent :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} + \partial_x (\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{V} \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{s}(t, x, \tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.6)$$

En couplant la reconstruction hydrostatique au schéma sur maillage mobile sans reconstruction de chocs, le flux numérique est ici défini par :

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n) - \mathcal{V}^n \mathbf{U}_{i+1/2-}^n & \text{si } \mathcal{V}^n < 0 \\ \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{V}^n \mathbf{U}_{i+1/2+}^n & \text{si } \mathcal{V}^n \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

On a supposé ici que la reconstruction hydrostatique se faisait non plus ponctuellement au voisinage gauche ou droit d'une interface, mais au niveau d'une demi cellule. De cette façon, la cellule \mathcal{C}_i^n comporte deux états $\mathbf{U}_{i-1/2+}^n$ et $\mathbf{U}_{i+1/2-}^n$ de part et d'autre de son centre. Il est à noter que sous cette hypothèse, la reconstruction hydrostatique n'a pas de raisons d'être conservative. Il est possible d'éviter d'avoir à gérer l'intersection entre l'interface et l'onde issue du problème de Riemann en restreignant la constante de la condition CFL à l'intervalle $(0, 1/2]$:

$$\Delta t_n < \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{|\mathcal{V}^n| + \sigma_{\max}^n}$$

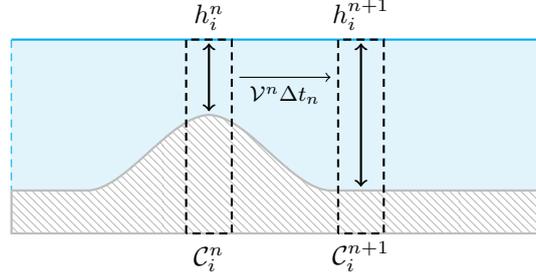


FIGURE 4.2 – Lac au repos avec un maillage animé d’une vitesse \mathcal{V}^n entre les itérés n et $n + 1$.

Une contrainte nécessaire et suffisante afin que le schéma soit bien balancé (illustrée par la figure 4.2) est la suivante :

$$\begin{cases} h_i^{n+1} = h_i^n - (z_i^{n+1} - z_i^n) \\ v_i^{n+1} = v_i^n = 0 \end{cases} \quad \text{dans le cas d'un lac au repos à l'itéré } n \quad (4.8)$$

La deuxième égalité de (4.8) s’obtient dès que la contribution en termes de flux pour la deuxième composante de (4.5) est nulle :

$$\mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathbf{S}_{q,i+1/2-}^n = \mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) + \mathbf{S}_{q,i-1/2+}^n$$

Ceci est toujours le cas lorsque le flux numérique est constant et que la solution à l’itéré n consiste en un lac au repos. En effet, on a dans ce cas quelque soit i :

$$\begin{aligned} h_{i+1/2+}^n &= h_{i+1}^n + z_{i+1}^n - z_{i+1/2}^n = h_i^n + z_i^n - z_{i+1/2}^n = h_{i+1/2-}^n \\ \implies \mathbf{U}_{i+1/2-}^n &= \mathbf{U}_{i+1/2+}^n \end{aligned}$$

Par constance du flux numérique avec le flux analytique et en utilisant que $v_{i+1}^n = 0$ il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) &= \mathbf{f}_q(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n) = \mathbf{f}_q(\mathbf{U}_{i+1/2+}^n) \\ \implies \mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathbf{S}_{q,i+1/2-}^n &= \frac{g}{2}(h_{i+1/2-}^n)^2 - \frac{g}{2}[(h_{i+1/2-}^n)^2 - (h_i^n)^2] \\ &= \mathbf{f}_q(\mathbf{U}_i^n) \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) - \mathbf{S}_{q,i-1/2+}^n = \mathbf{f}_q(\mathbf{U}_i^n)$$

La première égalité de (4.8) est plus difficile à obtenir, et nécessite une modification du schéma (4.5) dans sa première composante. Par identification de la première égalité de (4.8) avec le schéma volumes finis, la topographie moyennée sur \mathcal{C}_i^{n+1} doit vérifier :

$$\begin{aligned} z_i^{n+1} &= z_i^n + \frac{\Delta t_n}{\Delta x} [\mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) \\ &\quad - \mathbf{S}_{h,i+1/2-}^n - \mathbf{S}_{h,i-1/2+}^n] \\ &= z_i^n + \mathcal{V}^n \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (h_{i-1/2+}^n - h_{i+1/2-}^n) \\ &= z_i^n + \mathcal{V}^n \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (z_{i+1/2}^n - z_{i-1/2}^n) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Il n'est malheureusement pas possible de garantir que la contrainte (4.9) soit respectée pour le choix $z_{i+1/2}^n = \max(z_i^n, z_{i+1}^n)$, étant donné que la topographie n'est pas une quantité pouvant être modifiée. Une approche envisageable serait de changer la définition des $z_{i+1/2}^n$ de sorte à ce qu'ils soient solution du système d'équations formé par (4.9) pour tout i , avec un degré de liberté à choisir au niveau d'un des deux bords du domaine. Cette approche a néanmoins le mauvais goût de restreindre plus encore la condition CFL assurant la stabilité du schéma. L'approche privilégiée ici consiste donc à préserver le choix décentré des $z_{i+1/2}^n$, et à introduire une topographie alternative \bar{z}_i^{n+1} définie par :

$$\bar{z}_i^{n+1} = z_i^n + \mathcal{V}^n \frac{\Delta t_n}{\Delta x} (z_{i+1/2}^n - z_{i-1/2}^n) \quad (4.10)$$

Par construction, cette topographie alternative vérifie pour tout i : $h_i^n + z_i^n = \bar{h}_i^{n+1} + \bar{z}_i^{n+1}$, où \bar{h}_i^{n+1} est défini à l'aide de (4.5). Enfin, la hauteur d'eau h_i^{n+1} est obtenue par la projection de \bar{h}_i^{n+1} sur la topographie exacte au temps t_{n+1} :

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= \bar{h}_i^{n+1} - (z_i^{n+1} - \bar{z}_i^{n+1}) \\ &= h_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{S}_{h,i+1/2-}^n + \mathcal{V}^n z_{i+1/2}^n) - (\mathbf{S}_{h,i-1/2+}^n - \mathcal{V}^n z_{i-1/2}^n) \right] \\ &\quad - (z_i^{n+1} - z_i^n) \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $\mathbf{S}_{h,i+1/2-}^n = \mathbf{S}_{h,i+1/2+}^n = 0$ pour tout i .

Finalement, on introduit les notations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{S}}_{i+1/2-}^n = \mathbf{S}_{i+1/2-}^n + \begin{pmatrix} \mathcal{V}^n z_{i+1/2}^n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{S}}_{i-1/2+}^n = \mathbf{S}_{i-1/2+}^n - \begin{pmatrix} \mathcal{V}^n z_{i-1/2}^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le schéma proposé s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathcal{F}(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{S}}_{i+1/2-}^n - \tilde{\mathbf{S}}_{i-1/2+}^n \right] - \begin{pmatrix} z_i^{n+1} - z_i^n \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le choix (4.7) du flux \mathcal{F} est clairement consistant avec le flux exact dans le référentiel en mouvement. On montre alors que le schéma (4.12) est consistant avec l'équation (4.6). Tout d'abord dans la composante h :

$$\begin{aligned} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t_n} &= - \frac{1}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{V}^n (z_{i+1/2}^n - z_{i-1/2}^n) \right) - \frac{1}{\Delta t_n} (z_i^{n+1} - z_i^n) \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{V}^n \frac{z_{i+1/2}^n - z_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta t_n} = \mathcal{O}(\Delta t_n, \Delta x)$. En posant $\tilde{z} \in C^1(\Omega)$ la topographie dans le référentiel en mouvement, on a pour $\Delta t_n \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\mathcal{V}^n \frac{z_{i+1/2}^n - z_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta t_n} = \mathcal{V}^n \partial_x \tilde{z}(t_n, x_i) - \partial_t \tilde{z}(t_n, x_i) + \mathcal{O}(\Delta t_n, \Delta x)$$

Or dans le référentiel mobile \tilde{z} est solution du problème de transport de vitesse $-\mathcal{V}^n$, d'où le résultat attendu. On s'intéresse ensuite à la composante q , pour laquelle on se contente de vérifier la consistance avec le terme source. La différence de flux à l'interface $i + 1/2$ vaut :

$$\begin{aligned} & - [\mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathbf{S}_{q,i+1/2-}^n] + [\mathcal{F}_q(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) + \mathbf{S}_{q,i+1/2+}^n] \\ & = \mathbf{S}_{q,i+1/2-}^n + \mathbf{S}_{q,i+1/2+}^n = \frac{g}{2} [(h_{i+1}^n)^2 - (h_{i+1/2+}^n)^2 + (h_{i+1/2-}^n)^2 - (h_i^n)^2] \end{aligned}$$

On utilise alors l'expression de la hauteur d'eau reconstruite $h_{i+1/2\pm}^n$. Pour Δx suffisamment petit et $h_i^n, h_{i+1}^n > 0$, on peut omettre la partie positive intervenant dans cette expression ce qui donne :

$$\begin{aligned} (h_{i+1/2-}^n)^2 &= (h_i^n)^2 + 2h_i^n(z_i^n - z_{i+1/2}^n) + (z_i^n - z_{i+1/2}^n)^2 \\ (h_{i+1/2+}^n)^2 &= (h_{i+1}^n)^2 + 2h_{i+1}^n(z_{i+1}^n - z_{i+1/2}^n) + (z_{i+1}^n - z_{i+1/2}^n)^2 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{q,i+1/2-}^n + \mathbf{S}_{q,i+1/2+}^n &= \frac{g}{2} \left[-2h_{i+1}^n(z_{i+1}^n - z_{i+1/2}^n) - (z_{i+1}^n - z_{i+1/2}^n)^2 \right. \\ & \quad \left. + 2h_i^n(z_i^n - z_{i+1/2}^n) + (z_i^n - z_{i+1/2}^n)^2 \right] \\ &= -g(h(t_n, x_{i+1/2})(z_{i+1}^n - z_i^n) + \mathcal{O}((z_{i+1}^n - z_i^n)^2)) \end{aligned}$$

On retrouve bien le second membre de (4.1) en divisant par Δx puis en passant à la limite $\Delta x \rightarrow 0$.

Un problème du schéma (4.11) est qu'il n'est clairement pas conservatif pour la hauteur d'eau, alors même que les équations le sont. Ceci est dû à l'introduction dans (4.11) de la quantité centrée en espace $z_i^{n+1} - z_i^n$, qui joue un rôle de terme source artificiel compensant la variation de topographie entre les cellules \mathcal{C}_i^n et \mathcal{C}_i^{n+1} , et est indispensable à l'obtention de l'égalité $h_i^{n+1} = h_i^n + z_i^n - z_i^{n+1}$ pour un lac au repos. Cette quantité ne peut en outre pas s'écrire comme un flux aux interfaces $i - 1/2$ et $i + 1/2$, et l'on cherche un moyen d'annuler son effet non conservatif. On s'intéresse pour cela à la variation de hauteur d'eau totale entre deux itérations :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N_x-1} h_i^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{N_x-1} h_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \sum_{i=0}^{N_x-1} \left[\mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i+1/2-}^n, \mathbf{U}_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}_h(\mathbf{U}_{i-1/2-}^n, \mathbf{U}_{i-1/2+}^n) \right] \\ & \quad - \sum_{i=0}^{N_x-1} (z_i^{n+1} - z_i^n) + \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \mathcal{V}^n \sum_{i=0}^{N_x-1} (z_{i+1/2}^n - z_{i-1/2}^n) \\ &= \sum_{i=0}^{N_x-1} h_i^n - \sum_{i=0}^{N_x-1} (z_i^{n+1} - z_i^n) \\ & \quad + \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left[\mathbf{f}_h(\mathbf{U}_{-1/2\pm}^n) - \mathbf{f}_h(\mathbf{U}_{N_x-1/2\pm}^n) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{V}^n (h_{N_x-1/2\pm}^n + z_{N_x-1/2}^n - h_{-1/2\pm}^n - z_{-1/2}^n) \right] \end{aligned}$$

Si l'on fait abstraction des termes de bords, la variation de hauteur d'eau totale est exactement l'opposé de la variation de topographie totale entre les itérations n et $n + 1$. Néanmoins, cette variation est réversible si le maillage revient à sa position initiale lors d'une itération ultérieure. En se basant sur cette observation, on peut espérer concevoir un schéma numérique conservatif reprenant (4.12). En effet, l'idée est de décomposer chaque itération en deux étapes. Dans un premier temps, le maillage est déplacé à une vitesse $\mathcal{V}^n > 0$ pendant une durée Δt_n ce qui permet de déterminer une solution intermédiaire $\mathbf{U}_i^{n+1/2}$. Puis, dans un deuxième temps \mathbf{U}_i^{n+1} est obtenu en déplaçant le maillage à une vitesse $\mathcal{V}^{n+1/2} < 0$ pendant une durée $\Delta t_{n+1/2}$ de telle sorte que $\Delta t_n \mathcal{V}^n = -\Delta t_{n+1/2} \mathcal{V}^{n+1/2}$. Ainsi, à chaque itération le maillage effectue un aller-retour avant de revenir à sa position initiale.

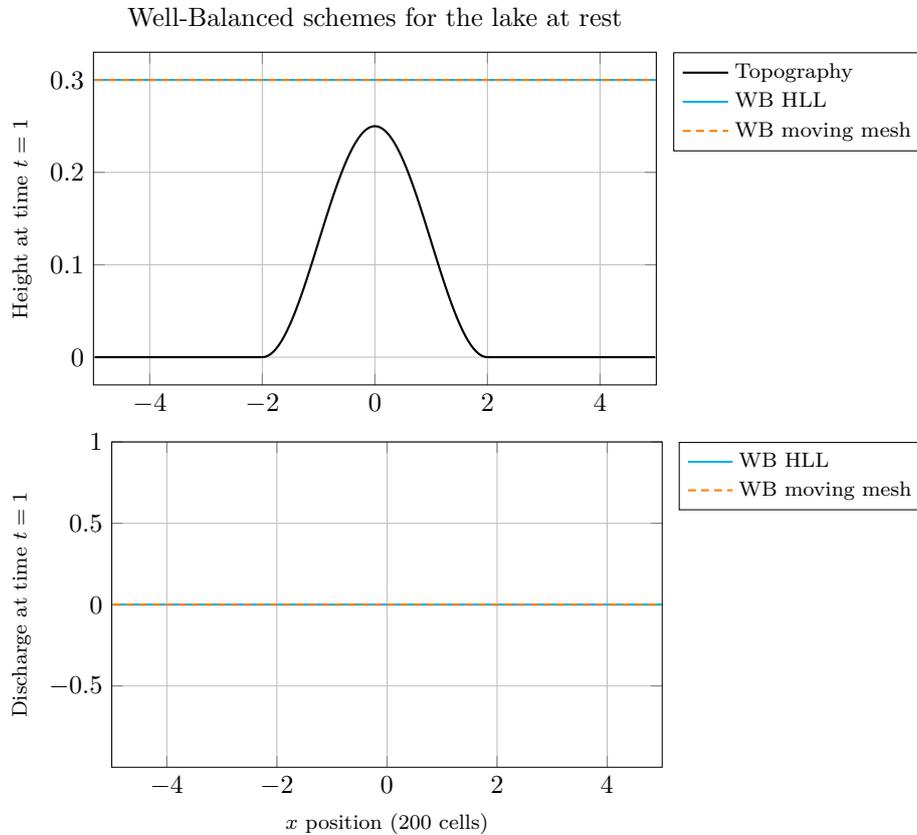


FIGURE 4.3 – Les schémas HLL et de maillage mobile, lorsqu'ils sont couplés au processus de reconstruction hydrostatique, préservent exactement l'état stationnaire.

Les figures 4.3 et 4.4 montrent le schéma (4.12) de reconstruction hydrostatique sur maillage mobile en action. La première de ces figures confirme que l'objectif de ce schéma est atteint : le lac au repos est parfaitement préservé, à l'instar du schéma HLL couplé au même processus de reconstruction. Dans la deuxième figure, on teste le schéma sur un cas plus générique de discontinuité initiale au dessus d'une bosse. Une fois encore, le résultat obtenu se montre

Evolution of a discontinuity in height over a bump

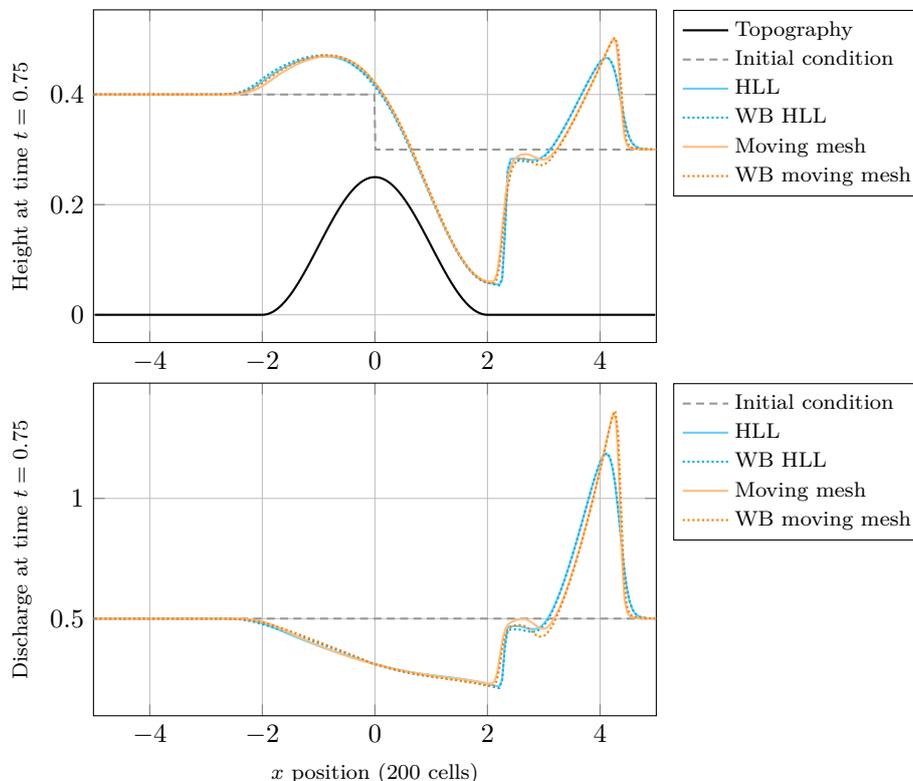


FIGURE 4.4 – Application du schéma de reconstruction hydrostatique sur maillage mobile à une donnée initiale discontinue pour la hauteur.

satisfaisant puisque la reconstruction hydrostatique sur maillage en mouvement donne un résultat similaire au même schéma sans reconstruction, ainsi qu’au schéma HLL avec et sans reconstruction.

4.4 Perspectives et améliorations

Le principal défaut du schéma (4.12) est sa mauvaise gestion des transitions sec/mouillé. Notamment, dans le cas d’un lac au repos de part et d’autre d’une bosse émergeant au dessus de la surface libre, on observe un décollement de cette dernière là où elle est supposée adhérer à la topographie. Au niveau des zones mouillées, près du voisinage de la transition, la surface libre forme un creux alors qu’elle est censée rester constante, comme illustré par la figure 4.5. A titre de comparaison, le schéma HLL couplé à la reconstruction hydrostatique gère parfaitement bien ce cas test. La difficulté rencontrée dans notre cas semble donc clairement provenir du maillage en mouvement.

On donne enfin une piste pour aboutir à un schéma combinant reconstruction des chocs et reconstruction hydrostatique. Lors du processus de reconstruction des chocs, il apparaît essentiel de reconstruire non pas la hauteur d’eau h mais

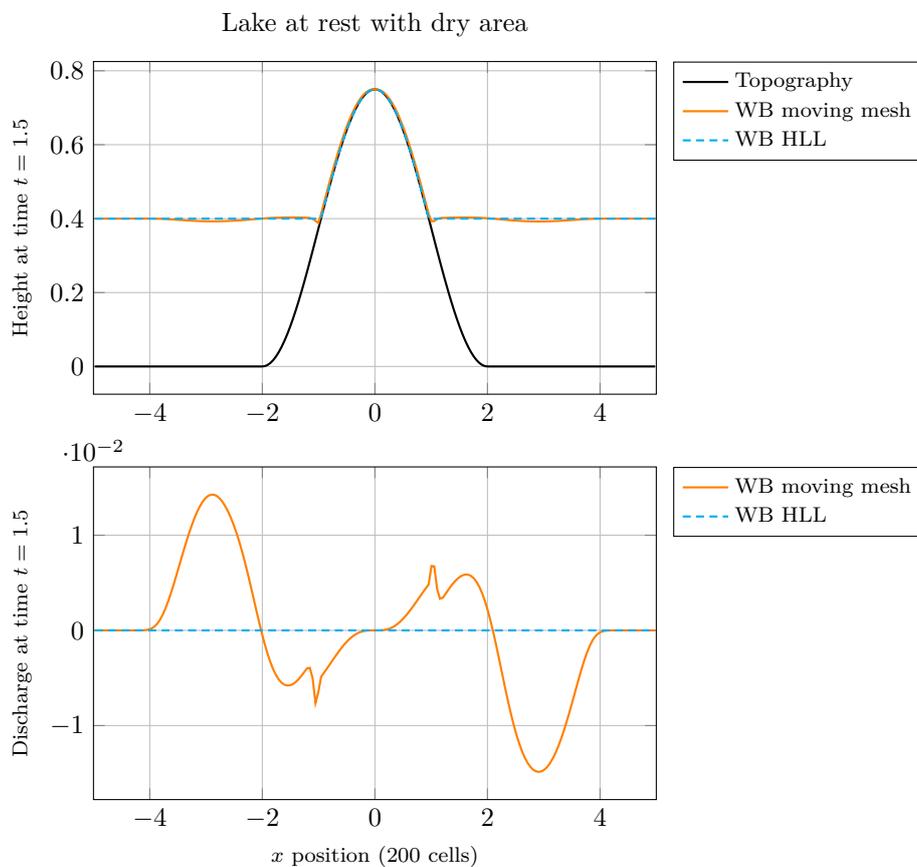


FIGURE 4.5 – Mauvais comportement du schéma de reconstruction hydrostatique sur maillage mobile.

la surface libre $\zeta = h + z$ toute entière. En effet, dans le cas d'un lac au repos ζ est constante en espace comme en temps, et de fait aucun choc n'est reconstruit. Dans le cas où l'on reconstruit h la reconstruction des chocs induit une oscillation brutale de la solution, ce qui rend impossible l'obtention d'un lac au repos à l'itération suivante, quand bien même une reconstruction hydrostatique est effectuée (l'état reconstruit ne correspondant plus à un lac au repos).

Conclusion

La plus grande partie de ce stage aura été dédiée à l'étude et à la mise en œuvre d'un schéma numérique de reconstruction des chocs dans le cadre des lois de conservation. Nous avons tout d'abord souligné l'intérêt d'une telle méthode, qui est d'éviter la diffusion engendrée lors de l'étape de moyennation propre aux schémas volumes-finis classiques. Après avoir détaillé le fonctionnement général de la méthode de reconstruction des chocs, nous avons entrepris de l'appliquer aux équations de Saint-Venant sans topographie pour la modélisation des écoulements en eaux peu profondes. Cela a été l'occasion d'étudier le problème de Riemann associé à ce système d'équations, ce afin d'obtenir un solveur de Riemann quasi-exact pour lequel seul l'état intermédiaire est approximé. Cela nous a également permis d'établir un détecteur de chocs exploité par le schéma de reconstruction. Dans les faits, ce dernier parvient à préserver les chocs de façon parfaitement nette, ce qui le différencie des autres méthodes telles que HLL, Rusanov ou encore Godunov. Enfin, nous nous sommes penchés sur la prise en compte d'une topographie et la préservation de l'état stationnaire correspondant à un lac au repos. Il est apparu qu'une discrétisation centrée du terme source ne permettait pas d'avoir un schéma bien balancé. La reconstruction hydrostatique introduite dans [2] résout ce problème en décentrant le terme source au niveau des interfaces des cellules par le biais d'une reconstruction de la solution. Il a alors fallu adapter cette procédure de reconstruction hydrostatique au cas d'un maillage mobile, première étape avant de pouvoir la combiner avec la reconstruction des chocs.

Plusieurs difficultés ont été rencontrées vis-à-vis de ce travail, parmi lesquelles l'impossibilité d'avoir un schéma à la fois bien balancé, conservatif et sur maillage mobile. Une astuce pour contourner ce problème est de forcer le maillage à revenir à sa position initiale. Un deuxième problème qui demande à être résolu est le mauvais comportement du schéma sur maillage mobile en présence de transitions sec/mouillé. Enfin, la combinaison de la reconstruction des chocs et de la reconstruction hydrostatique reste encore à faire.

Une autre partie de ce stage, dont il n'a pas été question dans ces pages, aura été la participation à l'école d'été et à la session de projet du CEMRACS 2019 sur le campus de Luminy Marseille, durant une période de six semaines. Cette mobilité s'est avérée intéressante d'un point de vue scientifique, puisqu'elle a permis une diversification des thématiques étudiées. Notamment, le projet en question portait sur un phénomène de reconnexion électromagnétique étudié dans le cadre de la physique des plasmas. L'enjeu me concernant était d'implémenter des méthodes volumes-finis avec un raffinement de maillage adaptatif pour capturer ce phénomène. Si ce projet en binôme s'est révélé ambitieux à accomplir dans le temps imparti, je n'en ai pas moins appris de nombreuses choses, en

particulier sur le plan de l'algorithmique pour le raffinement adaptatif.

En termes de perspectives professionnelles, la composante recherche omniprésente tout au long de ces six derniers mois a renforcé mon désir de poursuivre mes études par le biais d'une thèse de doctorat. Ce sera pour moi l'opportunité de continuer à travailler sur des thématiques proches de celles de ce stage en vue d'accéder au métier de chercheur.

Bibliographie

- [1] Nina AGUILLON. *A Nondissipative Reconstruction-Scheme for the Compressible Euler Equations*.
- [2] Emmanuel AUDUSSE et al. “A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows”. In : *SIAM J. SCI. COMPUT.* (2004).
- [3] Randall J. LEVEQUE. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser, 1992.
- [4] Nicolas SEGUIN. *Méthodes de volumes finis pour les fluides compressibles, notes de cours*. Nov. 2010.
- [5] Eleuterio TORO. *The HLLC Riemann Solver, lecture notes*. Août 2012.