

01 OCTOBRE 2019

RAPPORT DE STAGE DE FIN D'ETUDES



AUTOMATISATION DES TESTS DE NON REGRESSION

Réalisé par : Imane RAHMOUNI
Maitre de Stage : Carole CAMOZZI
Tuteur universitaire : Ahmed KEBAEIR

REMERCIEMENTS

Ce rapport est le résultat d'un stage de six mois en tant que IT-Quant au sein de l'équipe « Pricing & Scientific Computing - Equity & Commodities » à Natixis.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à ma tutrice, Mme Carole CAMOZZI, responsable du service, pour sa précieuse aide, son soutien et surtout sa confiance.

Je remercie également tous les membres de l'équipe pour leur soutien et leur disponibilité. Cette équipe par sa bonne humeur et son ambiance, a su rendre mon stage enrichissant et captivant.

Je souhaite également remercier l'équipe pédagogique de Sup Galilée pour leur travail très impliqué. Merci à Messieurs O. LAFITTE et E. AUDUSSE pour leur accompagnement et leur soutien tout au long de ces trois dernières années. Un remerciement tout particulier à Monsieur A. KEBAEIR, mon tuteur de stage, pour son enseignement, ses conseils, sa disponibilité et son implication.

Merci enfin à ma famille et mes amis qui par leurs présence et soutien sans faille, me poussent toujours à me surpasser. Merci d'embellir mon quotidien.

Table des matières

| | |
|--|----|
| REMERCIEMENTS | 2 |
| INTRODUCTION | 4 |
| I. Présentation de l'entreprise | 5 |
| 1. Historique et présence à l'international | 5 |
| 2. Domaines d'activité | 6 |
| a. La Banque de Grande Clientèle (BGC) : | 6 |
| b. La Gestion d'actifs et de fortune (Asset & Wealth Management - AWM) | 6 |
| c. L'Assurance | 7 |
| d. Les Paiements | 7 |
| 3. La Direction des Opérations et des Systèmes d'Information (DOSI). | 8 |
| 4. Le département "Derivatives and Pricing" | 10 |
| II. Environnement du Stage : | 14 |
| 1. Organisation et Outils : | 14 |
| a. Méthode Agile : | 14 |
| b. Sophis : | 17 |
| III. Problématique du Stage : | 19 |
| 1. Introduction aux produits Autocall : | 19 |
| a. Les Produits Structurés : | 19 |
| b. Les Produits Autocallables : | 21 |
| 2. Modèle de Black-Scholes : | 24 |
| 3. Limites et extension du modèle de Black Scholes : | 26 |
| 4. Modèle à Volatilité Locale : | 28 |
| a. Première formule de Dupire : | 28 |
| b. Seconde formule de Dupire : | 32 |
| 5. Tests de non-régression : | 37 |
| a. Définition : | 37 |
| b. Périmètre de travail : | 38 |
| c. Les différentes phases : | 38 |
| CONCLUSION : | 43 |
| BIBLIOGRAPHIE : | 44 |

INTRODUCTION

Le présent rapport est le fruit d'un travail de 6 mois au sein de l'équipe « Pricing & Scientific Computing – Equity & Commodities ». Ce stage a eu pour objectif l'automatisation des tests de non-régression des scénarios Sophis.

Cette expérience m'a permis de mettre en pratique mes compétences en développement C++ et de confronter mes connaissances en mathématiques financière et en finance de marché.

Dans ce rapport sera présenté et résumé l'ensemble de mon travail à Natixis. Je vais dans un premier temps, présenter l'environnement de travail, à commencer par « Natixis », son organisation, la « Direction des Opérations et des Systèmes d'Information », puis le département au sein duquel j'ai effectué mon stage « Derivatives and Pricing ».

Une seconde partie sera dédiée à l'introduction des principaux logiciels/progiciel et plateformes utilisées dans le cadre de ce stage.

Une troisième partie sera consacrée d'une part à la présentation des produits Autocall et de leurs pricing, puis à l'introduction de la volatilité locale de Dupire en passant par Black-Scholes et la volatilité implicite.

Enfin, une dernière partie introduira le principe de non-régression, ainsi que les différents travaux effectués au cours de ce stage afin d'automatiser les tests de non-régression des scénarios Sophis. Bonne lecture !

I. Présentation de l'entreprise

1. Historique et présence à l'international

Natixis est la banque de financement, de gestion et de services financiers du groupe Banque Populaire-Caisse d'Épargne (BPCE). Elle intervient dans les métiers de la banque de grande clientèle, de l'épargne et des services financiers spécialisés.

Natexis SA voit le jour en 1996 de la fusion de la BFCE (Banque française du commerce extérieur) et du Crédit **national**. C'est la première fusion bancaire dans le paysage français depuis près de 30 ans. Elle sera, trois ans plus tard, rachetée par le groupe Banque Populaire. En 2006, le groupe Caisse d'Épargne et le groupe Banque Populaire décident d'un commun accord de rapprocher leurs banques d'investissements, respectivement *Ixis CIB* et *Natexis Banques Populaires*. A cette occasion, cette nouvelle filiale est nommée **Natixis** et est introduite en Bourse 7 mois plus tard. Aujourd'hui, Natixis est une banque de dimension internationale : elle compte près de 16000 collaborateurs présents dans 38 pays répartis sur les 5 continents et 3 grandes zones géographiques : l'Amérique, l'EMOA (Europe, Moyen-Orient, Afrique) et l'Asie-Pacifique.

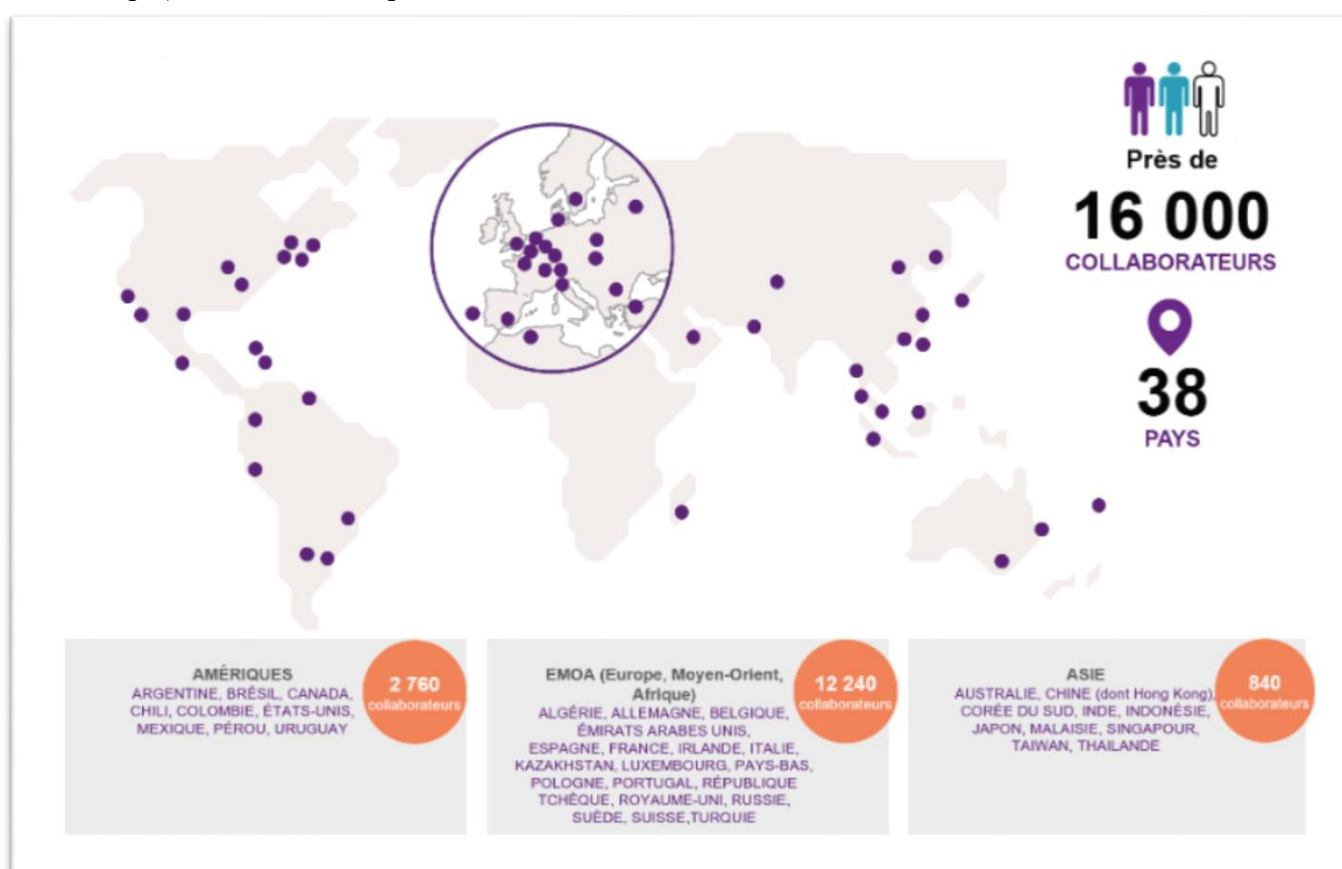


Figure 1 Présence de Natixis dans le monde.

2. Domaines d'activité

Natixis organise ses métiers autour de 4 grands pôles d'activité :

- La Banque de Grande Clientèle (BGC)
- La Gestion d'actifs et de fortune (Asset & Wealth Management - AWM)
- L'Assurance
- Les Paiements

Cette organisation permet à Natixis de mieux répondre aux besoins de ses différents clients : entreprises, institutions financières, investisseurs institutionnels et clients de réseaux du groupe BPCE.

a. La Banque de Grande Clientèle (BGC) :

La Banque de Grande Clientèle de Natixis conseille et accompagne les entreprises, les investisseurs institutionnels, les compagnies d'assurance, les banques et les entités du secteur public et leur propose des financements adaptés, un accès au marché des capitaux et des services de banque transactionnelle. A ce titre, Natixis intervient sur les domaines d'expertise suivants :

- Le conseil : fusions et acquisitions, primaire actions, conseil en stratégie financière et en notation ;
- Les financements vanille et structurés ;
- Les marchés de capitaux : actions, taux, crédit, change et matières premières ;
- Trade & Treasury Solutions : Trade finance, cash management, liquidity management et correspondent banking;
- La recherche : économique, crédit, equity et quantitative.

b. La Gestion d'actifs et de fortune (Asset & Wealth Management - AWM)

La gestion d'actifs : représentée par Natixis Global Asset Management, qui comprend une entité de distribution mondiale et environ vingt sociétés de gestion d'actifs. Cette dernière assure le développement de l'entité de distribution ainsi que le pilotage de l'ensemble de ses sociétés.

La banque privée : elle vise à structurer le patrimoine de ses clients. Ses domaines d'expertise sont l'ingénierie juridique et fiscale, la gestion d'actif, l'assurance-vie, le financement de

projets patrimoniaux, les placements de diversification et le conseil patrimonial pour les opérations de haut de bilan.

c. L'Assurance

Natixis Assurances est le pôle Assurances de Natixis au service des réseaux du Groupe BPCE et de leurs clients. Elle conçoit et gère une offre complète de produits et services d'assurances réparties dans deux activités principales : les assurances de personnes (assurance-vie, assurance-prévoyance, assurance invalidité...) et les assurances non-vie (assurance-auto, assurance-moto, logement ...).

d. Les Paiements

Solidement ancrée dans le milieu industriel des paiements depuis plus de 30 ans, Natixis Payments propose un service complet de gestion des moyens de paiement domestiques, européens et internationaux (produits en marque blanche, accès aux systèmes de compensation...). Avec une part de 20 % du marché de la monétique et près de 7 milliards d'opérations traitées, Natixis Payments est un acteur majeur des paiements.



GESTION D'ACTIFS ET DE FORTUNE

Gestion d'actifs
 Plus de 20 affiliés aux approches d'investissement multiples : Mandats assurance vie - Obligations - Actions Monétaires et diversifiés - Alternatif - Immobilier et capital investissement - Investissement socialement responsable

Gestion de fortune
 Gestion financière - Ingénierie patrimoniale - Corporate Advisory - Assurance vie de droit français et luxembourgeois - Crédit - Private Equity - Immobilier

Épargne salariale



ASSURANCE

Assurances de personnes
 Assurance vie - Épargne - Transmission de patrimoine - Retraite - Assurance décès - Assurance dépendance - Assurance des emprunteurs

Assurances non vie
 Assurance auto - Assurance habitation - Garantie des accidents de la vie - Assurance santé - Protection juridique - Garantie des moyens de paiement



BANQUE DE GRANDE CLIENTÈLE

Une force de proposition globale
 Investment Banking et fusions-acquisitions - Financements - Marchés de capitaux - Trade and Treasury Solutions— Financement du cinéma - Coverage

Une expertise dans 4 secteurs
 - Énergie & ressources naturelles
 - Infrastructures
 - Aviation
 - Immobilier & hospitality



PAIEMENTS

Des solutions sur la toute la chaîne de valeur des paiements

- **Émission** : paiement par carte, mobile et objet connecté - carte cadeau - titre restaurant - cagnotte en ligne
- **Acquisition** : paiement boutique, e-commerce, omnicanal et market place - terminaux de paiement
- **Processing** : opérations carte, virement, prélèvement, paiement instantané - open payment - API
- **Lutte contre la fraude aux paiements**

L'intérêt de nos clients est notre priorité.


 Entreprises
 
 Institutions financières
 
 Réseaux du Groupe BPCE et leurs clients (particuliers, Professionnels et PME)
 
 Investisseurs institutionnels

Pour eux, nous osons relever tous les défis.

Accompagnement dans la durée, qualité du dialogue stratégique, combinaison de nos expertises nous permettent de concevoir des solutions sur mesure et ingénieuses.

Mon stage de fin d'études a eu lieu au sein du département "Derivatives and Pricing" de la direction des "Opérations et des Systèmes d'Information".

3. La Direction des Opérations et des Systèmes d'Information (DOSI).

La DOSI gère la totalité des systèmes d'informations des grandes composantes métiers de l'entreprise à savoir les assurances, les financements spécialisés, les "Global Markets", la sécurité informatique etc...

Les "Global Markets" consistent en la finance et le trading international. Ils se basent à la fois sur des concepts macro et micro-économiques. Ils englobent de nombreux produits financiers, à savoir les contrats à terme, les swaps, les options etc... Le département dédié aux "Equities & Commodities" dépend des Global Markets.

Les Equities (actions en français) sont les marchés les plus souvent présentés au grand public. Pour rappel, les actions consistent en des levées de fonds pour les entreprises par les ventes d'actions. Cette branche d'activité a un champ d'action très large puisque cela va de la levée de fonds de quelques milliers de dollars par un petit entrepreneur à de très grandes OPA¹ réalisées par des entreprises géantes comme Google ou Facebook.

Une action correspond à une fraction du capital d'une société. Elle confère à son propriétaire (l'investisseur) différents droits :

- Le droit à l'information ;
- Le droit de vote ;
- Le droit aux bénéfices ;
- Le droit à l'actif net ;
- Et éventuellement des droits préférentiels de souscription.

Pour les actions comme de nombreux autres produits financiers, il est possible d'associer le produit à la notion d'option. Une option est un produit conditionnel qui donne à son propriétaire un droit (et non une obligation) :

- Soit d'acheter (on parlera alors d'option d'achat ou de "call" en anglais)
- Soit de vendre (option de vente ou "put" en anglais).

¹ OPA : *Offre Publique d'Achat*, correspond à une offre proposée par une entreprise ou une personne physique, pour acquérir l'ensemble du capital d'une autre entreprise. Une OPA s'effectue en espèces contrairement à une OPE qui comprend un échange d'actions.

Le produit acheté/vendu est un certain montant fonctionnel d'un actif financier, par exemple une action. La transaction se fait à un prix fixé à l'avance, appelé prix d'exercice (Strike en anglais) pendant un temps donné ou à une date fixée. Evidemment, cette idée de décalage dans le temps apporte beaucoup d'aléatoire au propriétaire de l'option. C'est pour cela qu'en échange de l'usage de ce droit est versé une prime supplémentaire au propriétaire.

Ainsi, pour qu'un call soit rentable pour l'acheteur de l'option, il faut que le prix du sous-jacent "S" soit supérieur à la somme du prix d'exercice "K" et de la prime propriétaire "P", ce qui lui permettra d'acheter ce sous-jacent moins cher que sur le marché. $S \geq K + P$

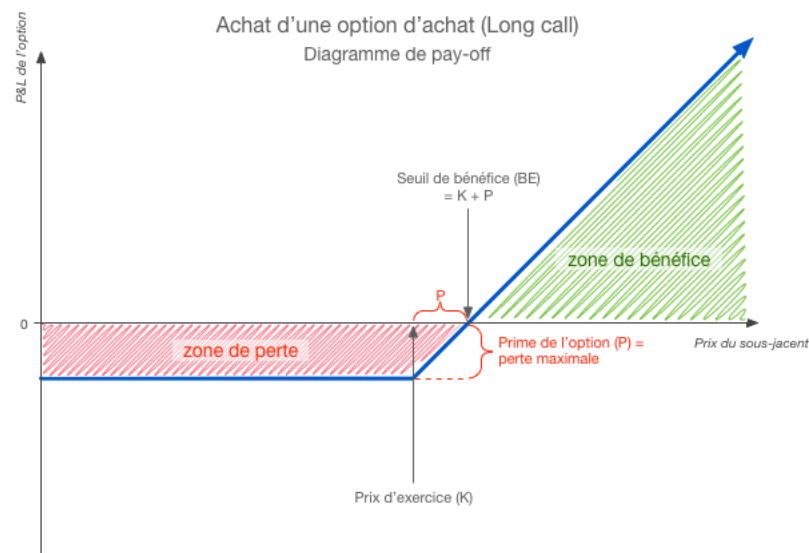


Figure 2 Achat d'un Call

A l'inverse, pour qu'un put soit rentable pour le propriétaire de l'option, il faut que le prix du sous-jacent "S" soit inférieur à la différence entre le prix d'exercice "K" et la prime "P" pour que l'acheteur du put puisse le vendre plus cher que le prix du marché. $S \leq K - P$.

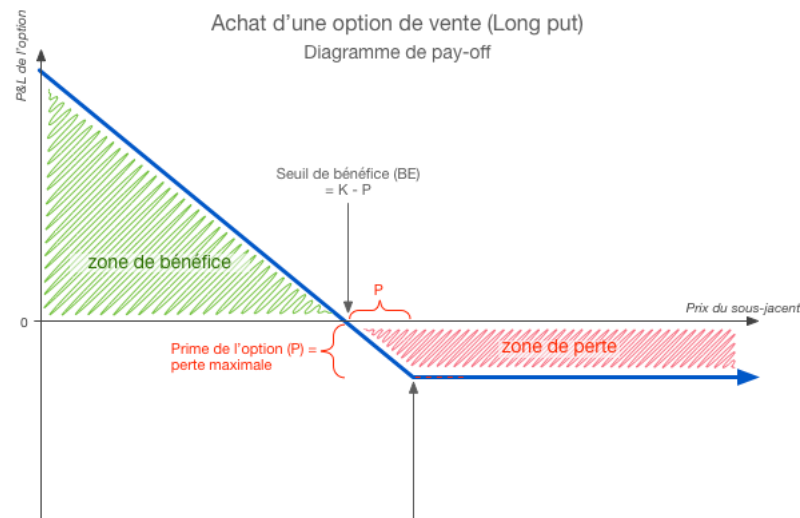


Figure 3 Achat d'un Put

Par conséquent, pour que ces produits soient rentables pour l'entreprise, il est indispensable de bien déterminer le prix d'achat de l'action. Cette tâche est effectuée par le département "Derivatives and Pricing".

4. Le département "Derivatives and Pricing"

Mon stage s'est déroulé plus précisément au sein de l'équipe "Pricing & Scientific Computing" du département "Derivatives and Pricing". La principale activité de ce département est le calcul du prix des options traitées par Natixis. Le calcul de ce prix se fait au travers d'une infrastructure distribuée qui a été mise en place il y a maintenant plus de 10 ans. Il s'agit d'un supercalculateur appelé "Ferme de calcul Monte-Carlo" et est utilisé par tout un ensemble de clients moyennant des applicatifs et progiciels de type Sophis utilisé lors de ce stage.

L'architecture et le fonctionnement de la ferme de calcul Monte Carlo peut être appréhendés comme suit :

.

Afin de calculer les prix, le client, une application embarquant le logiciel Sophis par exemple, doit fournir à la ferme les informations suivantes :

- Les données sur lesquelles seront effectuées les opérations par la ferme.
- Les paramètres de parallélisation (nombre de processeurs requis).

En effectuant cette tâche, le client va alors effectuer une demande au gestionnaire de ressources (RM). Celui-ci lui renvoie alors un numéro de cache.

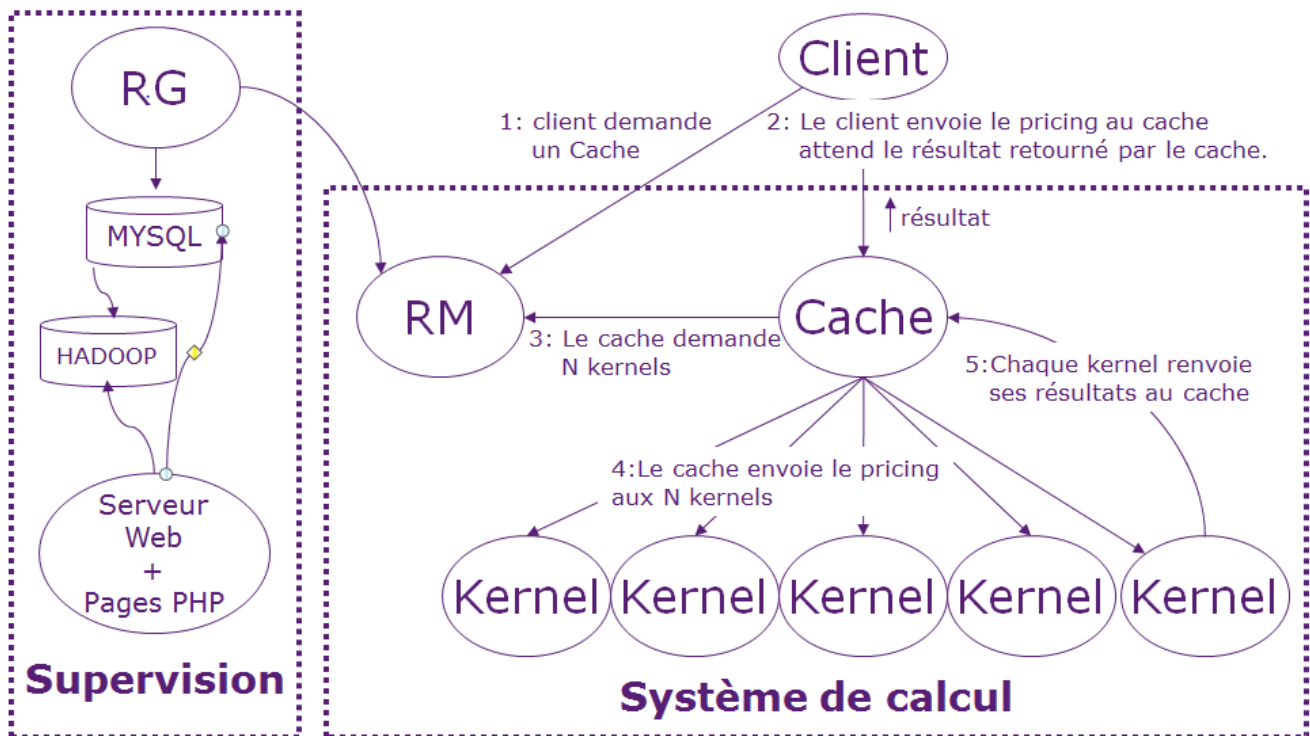


Figure 4 : Schéma global de la ferme de calcul

Le système de calcul Parallèle contient trois composantes :

- Le Gestionnaire de ressource : RM (Ressource Manager)
 - Maintient en permanence des tables d'état / occupation des ressources cache et kernels.

Le RM est un allocateur de ressources.
- Les Caches/Dispatchers :
 - Reçoivent les données des clients.
 - S'adressent au gestionnaire de ressource pour un certain nombre de processus kernels.
 - Gèrent la distribution des calculs entre les kernels sélectionnés.

➤ Les Kernels :

Une fois les données envoyées sur les caches/dispatchers, le dispatcher va alors demander l'allocation de ressources de calcul au RM. Grâce à ces ressources, le cache va distribuer les données de pricing à un ensemble de kernels. Une fois les calculs terminés par les kernels, le résultat est alors renvoyé au client.

La supervision implique :

➤ Le RG (Renseignement Généraux) :

- Processus dédié qui interroge périodiquement (~60 s), les tables du RM et écrit les informations de supervision dans une base de données.
 - Les données sont accessibles via une interface WEB.
- Afin de pouvoir monitorer l'état de la ferme au cours du temps, les couples cache/kernels se signalent régulièrement au schéma de ressources. Ils signalent leur état et celui de la machine qui les héberge. Sur la base de ces signaux et d'une représentation interne sous forme d'un automate à état, le RM est alors capable d'extraire l'état de la ferme. Le RG qui est un processus périodique interroge les tables du RM et écrit les informations de supervisions dans une base de données.

Les données sont ensuite accessibles depuis une interface web par l'équipe de supervision.



Figure 5 : Interface de monitoring

II. Environnement du Stage :

1. Organisation et Outils :

Dans cette partie du rapport, je vais présenter les différents outils utilisés par notre équipe et nécessaires, voire indispensables au bon fonctionnement de notre activité.

Je vais dans un premier temps présenter la méthode agile qui est au cœur du processus de gestion de projets au sein de Natixis et de notre équipe en particulier. Je vais par la suite introduire le progiciel Sophis que j'avais cité un peu plus haut.

Il faut d'abord savoir ce qu'est un progiciel avant de s'intéresser particulièrement à Sophis. Un progiciel est un ensemble de programmes paramétrables fournis pour être utilisés simultanément par plusieurs utilisateurs. Il existe aujourd'hui différents progiciels, chacun plus ou moins spécifique à un certain marché.

Au sein de mon équipe « *Pricing & Scientific Computing – Equity & Commodities* », tout le travail est fait moyennant le progiciel Sophis.

a. Méthode Agile :

La méthode agile est présentée comme une approche innovatrice et collaborative capable de tenir compte des besoins initiaux des clients et ceux liés aux évolutions.

Principes de base :

La méthode agile met le client au centre du cycle de développement où ce dernier est désormais impliqué dans la réalisation du projet du début jusqu'à la fin. En effet, elle améliore la visibilité de la gestion des travaux pour le client.

Elle met essentiellement le point sur l'implication continue du donneur d'ordre afin d'appliquer directement les changements et modifications nécessaires. La méthode agile aspire par ceci à une accélération du développement des logiciels.

Le principe de base consiste à proposer une version minimale du logiciel puis, au fur et à mesure et en concertation avec le client, des fonctionnalités sont intégrés pour mieux répondre à la demande de ce dernier.

Le processus itératif regroupe une séquence d'instructions à répéter autant de fois que possible, selon le besoin. En ce qui concerne la réalisation d'un logiciel, les instructions à répéter sont les suivantes :

- Les tests unitaires à la fin de chaque itération.
- Le développement de l'application web.
- L'intégration.
- La relecture et amélioration des codes.

Par ailleurs, les quatre grands principes sur lesquelles la méthode Agile s'appuie sont :

- La collaboration : Une communication fluide et une cohésion d'équipe passent avant les outils et les processus.
- L'équipe : La relation Equipe/client est privilégiée et mise en avant plutôt qu'une négociation contractuelle.
- Application : Favoriser une application bien construite à une documentation détaillée.
- Acceptation : Acceptation du changement avec une grande flexibilité au détriment d'un plan rigide.

L'une des méthodologies agiles les plus utilisées est le Scrum. Elle suit bien évidemment les principes de la méthodologie Agile, c'est-à-dire l'implication et la participation active du client tout au long du projet.

L'équipe Scrum se compose de :

- **Un Product Owner : (ou « Directeur de produit »)** : il communique les objectifs premiers des clients et utilisateurs finaux, coordonne l'implication des utilisateurs et des parties prenantes, et se coordonne lui-même avec les autres product owners pour assurer une cohérence.
- **Un Scrum Master** : Membre de l'équipe, il est responsable de la compréhension, de l'adhésion et de la mise en œuvre de la méthode Scrum qu'il maîtrise parfaitement. Il veille à ce que les principes et les valeurs de la méthodologie soient respectés et a pour but d'optimiser la capacité de production de l'équipe. Pour se

faire, le Scrum Master aide l'équipe à travailler de façon autonome tout en s'améliorant d'avantage.

- **Une équipe opérationnelle** : ou de développement est chargée de transformer les besoins définis par le Product Owner en fonctionnalités utilisables. Elle est pluridisciplinaire et possède toutes les compétences nécessaires pour réaliser le projet, sans faire appel à des prestations externes. Parmi ses membres, on trouve un architecte, un développeur, un testeur, etc. La taille idéale de l'équipe de développement est de 3 à 9 personnes. Il n'y a pas de notion de hiérarchie, toutes les décisions sont prises ensemble.

Par ailleurs, la vie d'un projet Scrum est rythmée par un ensemble de réunions définies avec précision et limitées dans le temps parmi elles le « Sprint ».

Un Sprint est une itération. Il s'agit d'une période de 2 à 4 semaines maximum pendant laquelle une version terminée et utilisable du produit est réalisée. Un nouveau sprint commence dès la fin du précédent et chaque sprint a un objectif et une liste de fonctionnalités à réaliser.

Outils pour la planification de sprints :

- **Gestion des versions** : Faciliter le suivi des versions, des fonctionnalités et aussi l'état d'avancement du projet.
- **Préparation du backlog en toute simplicité** : Redéfinissez la priorité de vos user stories et bugs en toute facilité.
- **Planification du sprint** : Estimer et ajuster le périmètre du sprint.
- **Story point** : Assurer le suivi l'estimation et la génération des rapports sur les story points afin d'être plus précis sur les sprints futurs.
- **Tableaux Scrum** : Permettent la visualisation des tâches d'un sprint. Il est également possible de personnaliser les tableaux en fonction de chaque workflow

b. Sophis :



Sophis, logiciel édité à la fin des années 80 par la compagnie du même nom et depuis racheté par la société Misys, est un outil front to back² permettant de gérer les transactions financières issues des salles de marchés. Utilisé par plus de 5.000 utilisateurs, répartis dans près de 130 établissements financiers, le logiciel se décline en deux versions : Sophis VALUE et Sophis RISQUE :

- Sophis RISQUE, orientée *sell-side* et centrée sur les prix, la tenue de position et la gestion des risques, est principalement utilisée par les banques d'investissement et accompagne les traders, les ingénieurs financiers et les analystes quantitatifs dans la gestion des trades, le calcul du P&L³ ou la gestion du risque.
- Sophis VALUE, qui s'adresse plus à l'industrie du *buy-side*, est dotée de plusieurs fonctionnalités puissantes de gestion des placements, comme la tenue de positions front, le passage d'ordre ou encore le contrôle des contraintes pré-trade.

Au sein de notre équipe, c'est la version Sophis RISQUE que nous utilisons.

² Front to Back : Utilisé dans toute la chaîne Front/Middle/Back Office.

³ P&L : Profit and Loss, indicateur très utilisé pour mesurer la performance économique.

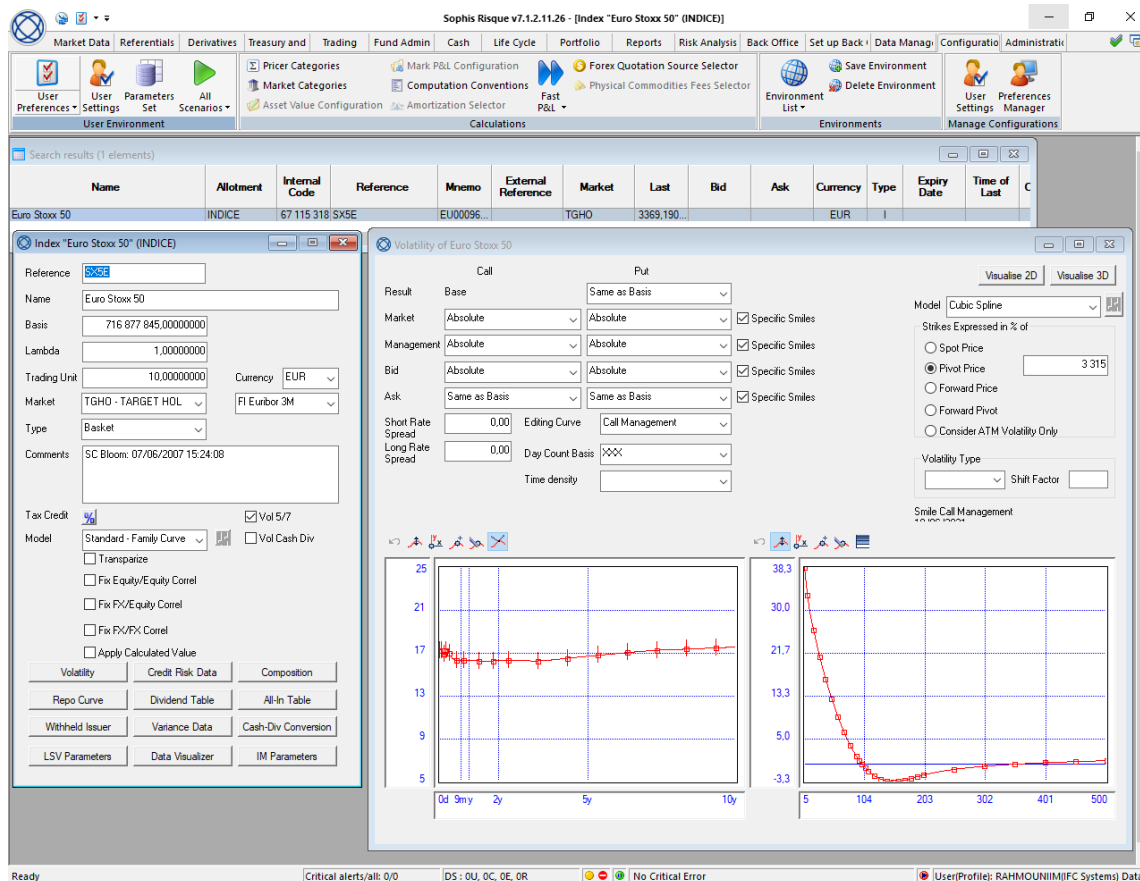


Figure 6 : Interface Sophis

Par ailleurs, Sophis comprend une panoplie d'outils riches et variés (un kit de développement SDK complet) permettant aux développeurs de personnaliser, de faire évoluer ou encore d'adapter l'application aux métiers de l'entreprise. En effet, nous disposons d'un corps Sophis fourni par Misys payant mais nous pouvons ensuite customiser le code autour de ce corps pour l'adapter à nos besoins. Ces différents codes, dans notre équipe, s'effectuent moyennant les langages C++ et C#.

III. Problématique du Stage :

Au cours de mon stage, et au travers des différents travaux et tâches menées, j'ai eu l'occasion de manipuler un produit qui m'était jusque-là inconnu, il s'agit de l'Autocall.

Cette partie du rapport va traiter trois grands points. D'abord, une présentation des produits structurés, plus précisément des produits autocall et ses caractéristiques. Ensuite, une seconde partie, plus théorique, sera consacrée au pricing de ce produit, notamment le passage de la volatilité implicite de Black-Scholes à la volatilité locale. Puis enfin une dernière partie sera dédiée aux tests de non-régression, leur définitions, utilité et mise en place.

1. Introduction aux produits Autocall :

L'Autocall fait partie de la famille des produits dits structurés, il est donc indispensable de commencer par introduire d'abord les produits structurés avant d'en venir au cas spécifique de l'Autocall.

a. Les Produits Structurés :

i. Définition :

Il ne faut pas confondre les produits dérivés et les produits structurés. Les premiers (contrat à terme, swap, contrats d'option) sont cotés sur les marchés et permettent de se couvrir ou de spéculer sur les écarts d'un sous-jacent alors que les seconds sont des produits synthétiques qui combinent le plus souvent un placement à terme fixe et des produits dérivés. Leur prix est d'ailleurs déterminé à partir de modèles mathématiques complexes.

En effet, les produits structurés sont des produits associant un placement financier traditionnel, tel que des actions ou des indices boursiers, à des produits dérivés. Cette combinaison donne naissance à un nouveau produit financier avec ses propres caractéristiques. Ces produits peuvent être adaptés à tout contexte de marché et prennent souvent la forme juridique d'*EMTN*⁴.

La valeur d'un produit structuré dépend directement de celle d'une variable de référence (appelée sous-jacent) qui peut être un actif, un indicateur de marché, un panier de valeurs, une

⁴ *Euro Medium Term Notes* : Obligations moyen terme à capital non garanti, émises par un émetteur (une banque dans le cadre des produits structurés) qui assure une liquidité quotidienne.

stratégie d'investissement ou toute autre variable. En général, leur durée de vie est limitée (à quelques trimestres ou quelques années) et c'est à l'échéance du produit que l'investisseur recouvre son capital, majoré ou minoré en fonction de la performance du sous-jacent.

ii. Composition :

Tout produit structuré est une combinaison de produits simples.

Les produits les plus fréquents proposés aux trésoriers et directions financières sont à capital garanti. Ils sont construits à partir d'un **produit de taux** (une obligation) et de **produits dérivés** (call, put, swaps...).

- **L'obligation « zéro coupon » sert à garantir le capital.** Cependant, contrairement à une obligation classique, aucun intérêt n'est versé. Les intérêts sont actualisés et utilisés pour acheter, dès la création du produit, les produits dérivés qui produiront l'éventuelle performance
- **Les produits dérivés**, principalement des options, **permettent de s'exposer au marché sous-jacent** et créer l'éventuelle performance du produit. L'avantage des options est que, même en cas de scénario défavorable, il est impossible de perdre davantage que la prime.

Grâce aux coupons non versés, la banque qui crée le produit structuré achète des options pour répliquer le profil de rendement souhaité, sans risque sur le capital initial puisque ce dernier est garanti par l'obligation.

En fonction du profil de rendement/risque demandé par l'investisseur, la banque peut sélectionner des produits dérivés au profil plus ou moins agressif, plus ou moins rémunérateurs dans des scénarios plus ou moins probables. La personnalisation est le maître-mot de la structuration.

iii. Caractéristiques :

Les produits structurés sont construits sur mesure pour répondre aux investisseurs qui ne sont pas satisfaits des instruments financiers standards (actions, obligations, placements monétaires...) disponibles sur les marchés. Ils se caractérisent alors par :

Une Durée de Vie Limitée.

- Souvent complétée par un mécanisme de remboursement anticipé qui s'active automatiquement si la performance du sous-jacent depuis la date de constatation est positive ou nulle à l'une des dates de constatation fixées.

Une Performance définie selon une formule mathématique.

- En cas de réalisation d'un scénario de marché, une **performance supérieure au taux sans risque** est prévue. Cette performance peut être versée sous forme de coupons périodiques.
- Bénéficie d'un système de remboursement anticipé si le sous-jacent enregistre en cours de vie du produit lors d'une date de constatation définie à l'avance une performance positive ou nulle depuis l'origine.
- Si à l'échéance du produit, le scénario de marché ne s'est pas réalisé, l'investisseur reçoit l'intégralité de son capital, pourvu que le marché de référence n'ait pas connu une baisse supérieure à une limite fixée à l'origine.
- Sinon, l'investisseur subit une perte en capital à hauteur de l'intégralité de la baisse enregistrée par l'actif.

Une Garantie de protection du capital.

- Garantie de protection du capital, totale ou partielle, à une échéance donnée (de 1 an à 10 ans en général). Les produits structurés peuvent être intégrés dans un contrat d'assurance-vie via les unités de compte, un PEA ou un compte-titres.

b. Les Produits Autocallables :

On peut à présent, présenter le fonctionnement de l'un des principaux produits structurés sur actions : l'Autocall.

Il existe de très nombreuses variantes de ce produit structuré, mais toutes présentent des principes communs que nous allons détailler ici.

i. Définition :

Les produits Autocallables sont des produits structurés, offrant des rendements fixes intéressants et la possibilité de remboursement anticipé du capital. Au vu des niveaux extrêmement bas des taux d'intérêt et des incertitudes régnant sur les marchés, beaucoup d'investisseurs sont attirés par la combinaison entre des rendements fixes bien supérieurs aux taux des marchés et une certaine forme de protection du capital.

Ces produits sont particulièrement adaptés dans un contexte de marché où les taux sont bas et les marchés actions volatiles. Ce qui est le cas aujourd'hui, avec des probabilités de coupons élevés. La durée actuelle des autocall est de l'ordre de 5 à 10 ans.

ii. Pricing de L'Autocallable Reverse Convertible.

Le payoff de ce produit dépend du niveau du sous-jacent par rapport aux barrières à des dates d'observation fixées et à maturité. Plus précisément, le fonctionnement de ce produit est le suivant :

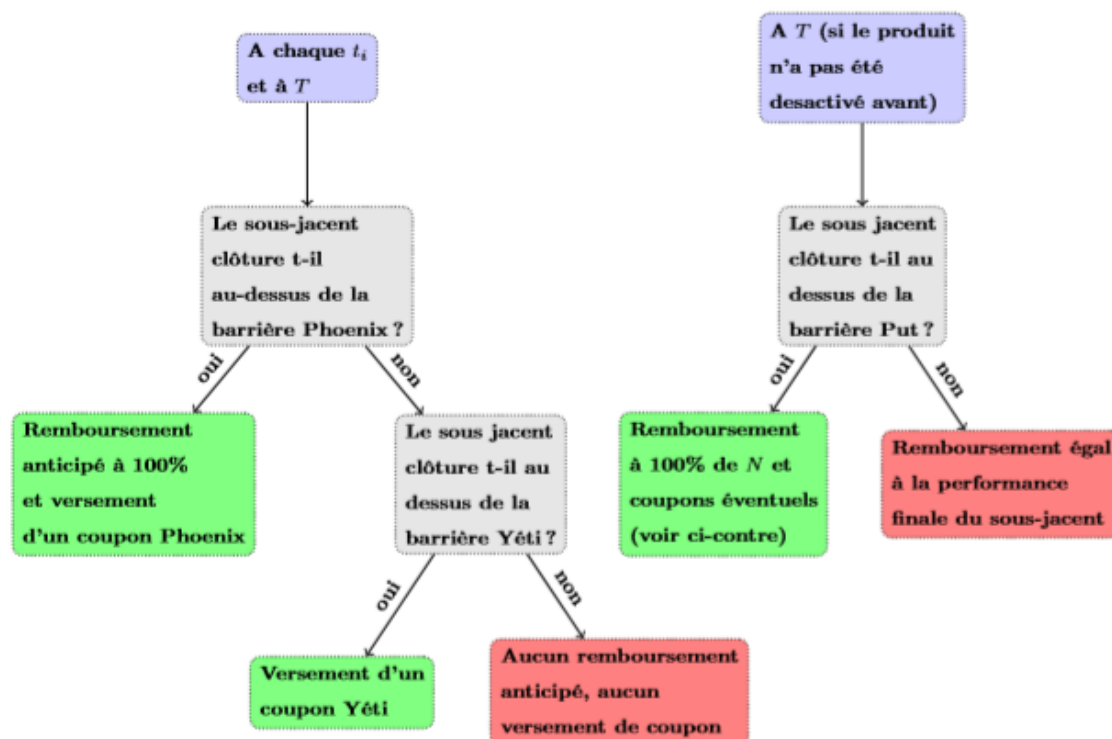


Figure 7 Schéma du fonctionnement d'un Autocallable Reverse Convertible.

- Tout d'abord, si à une certaine date t_i , le sous-jacent est au-dessus de la barrière Phoenix, alors le produit est rappelé : le client récupère son nominal N et touche un coupon appelé coupon Phoenix.
- Tant que le produit n'a pas été rappelé, on retrouve deux cas : Soit le prix du sous-jacent reste compris entre les barrières Yéti et Phoenix, dans ce cas l'investisseur touche un coupon fixe appelé coupon Yéti, soit le prix du sous-jacent descend en dessous de la barrière Yéti, et dans ce cas l'investisseur ne touche aucun coupon.

- Enfin, toujours si le produit n'a pas été rappelé, on retrouve plusieurs cas à la maturité T : Si le prix du sous-jacent est au-dessus de la barrière Phoenix, le client récupère son nominal N et touche un coupon Phoenix. Si le prix du sous-jacent est compris entre les barrières Yéti et Phoenix, le client récupère son nominal N et touche un coupon Yéti. Si le prix du sous-jacent est compris entre les barrières Put et Yéti, le client récupère uniquement son nominal N . Enfin, si le sous-jacent sous-performe en dessous de la barrière Put, le client ne récupère pas la totalité de son nominal N , mais seulement la performance du sous-jacent sur la période.

Ce produit revient donc à considérer que le client est short d'un Down and In Put à la monnaie (barrière activante à la baisse) de barrière D et long d'une obligation qui donne le droit à des versements de coupons.

Pour pricer ce produit structuré, on détermine d'abord son payoff (en pourcentage par exemple). Soit S , le sous-jacent suivant une dynamique de Black-Merton-Scholes. On observe aux dates $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\}$ où T désigne la maturité. Sous les notations précédentes, le payoff est donné par :

$$\begin{aligned}
 P(S_t) = & \sum_{i=1}^{n-1} c_Y \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{\max_{k \in \{1, \dots, i\}} S_{t_k} < \phi_F\}} \mathbb{1}_{\{S_{t_i} > \phi_Y\}}}_{\text{On gagne un coupon Yéti}} + \underbrace{(1 + c_F) \cdot \mathbb{1}_{\{\max_{k \in \{1, \dots, i-1\}} S_{t_k} < \phi_F, S_{t_i} > \phi_F\}}}_{\text{Le produit est rappelé, on récupère le nominal et un coupon Phoenix}} + \\
 & \underbrace{\mathbb{1}_{\{\max_{k \in \{1, \dots, n-1\}} S_{t_k} < \phi_F\}} \left[(1 + c_F) \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > \phi_F\}} + (1 + c_Y) \cdot \mathbb{1}_{\{\phi_F > S_T > \phi_Y\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\{\phi_Y > S_T > \phi_P\}} + S_T / S_0 \cdot \mathbb{1}_{\{\phi_P > S_T\}} \right]}_{\text{On récupère le nominal (ou une partie) et des coupons suivant la performance finale du sous-jacent}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{à maturité}}
 \end{aligned}$$

Pour application numérique, soit un produit de détail :

- Autocall mono sous-jacent de nominal 100\$.
- Maturité : $T = 5$ ans
- Fréquence d'observation : $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1$ an
- Barrière de rappel Phoenix : 120%
- Coupon Phoenix : 10%
- Barrière Continuation Yéti : 80%

- Coupon Yéti : 5%
- Strike Put Down and In: 100%
- Barrière Put Down and In: 70%

Et les détails du sous-jacent :

- Spot $S_0 = 100\$$
- Volatilité : 30%
- Taux sans risque (d'actualisation) annuel : 2%

Avec les détails de ce produit, on obtient un prix d'environ 0.85 en pourcentage du nominal, c'est-à-dire que pour un Nominal de 100, il faudra dépenser environ $0.85 \times N = 85\text{€}$ ici.

Le résultat obtenu est plutôt satisfaisant. On s'attendait bien à ce que ce produit soit beaucoup plus cher qu'un call car de payoff final beaucoup plus conséquent mais moins cher qu'une obligation "certaine" sur Nominal car l'acheteur n'est pas sûr de récupérer la totalité du Nominal N qu'il met en jeu initialement.

Remarque : Pour cet exemple, le prix est inférieur à 1, ce qui signifie que l'on n'a pas besoin de donner 100% du Nominal pour acheter l'Autocall (ce n'est pas toujours le cas).

2. Modèle de Black-Scholes :

Le modèle de Black-Scholes suppose que l'évolution du prix de l'actif est, sous la probabilité historique, régie par l'équation différentielle stochastique suivante (H1) :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0 \text{ donné} \quad (1)$$

Avec μ le rendement continu de l'actif, σ sa volatilité et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un $\{F_t\}_{t \geq 0}$ mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité (Ω, F, P) , avec $\{F_t\}_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement brownien augmentée des ensembles négligeables.

Ce modèle repose sur un certain nombre d'hypothèses (en plus de la nature du processus décrit par (1)) :

- H2 : Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage (i.e. il n'est pas possible de gagner de l'argent à partir d'un investissement nul).
- H3 : Il n'y a pas de coût de transaction.
- H4 : Tous les actifs sont parfaitement divisibles (i.e. on peut par exemple acheter 1/100 d'action)
- H5 : il est possible de vendre à découvert sans pénalités, ni contraintes (position courte)
- H6 : le marché est liquide (i.e. on peut décider d'acheter ou de vendre à tout instant).
- H7 : il existe un actif sans risque qui suit le processus de diffusion suivant $dR_t = rR_t dt$, avec r taux d'intérêt continu.
- H8 : l'actif verse un taux de dividendes continu.

Le théorème de **Girsanov** donne l'existence et l'unicité d'une probabilité **Q** équivalente à **P** sous laquelle l'évolution de l'actif est régie par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t((r - q)dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0 \text{ donné}$$

Cette équation admet une unique solution strictement positive qui s'écrit :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

A partir de ce modèle de diffusion, on détermine le prix des options européennes à partir de l'ensemble des paramètres de marché.

Comme vu plus haut, les Call sont des options qui permettent à l'acheteur d'acheter ou non un actif à un prix déterminé à l'avance, appelé Strike et souvent noté K , à une date donnée, appelée maturité et souvent noté T . Le Payoff d'un Call est donc $(S_t - K)^+$.

Dans le modèle de Black Scholes, on obtient une formule explicite pour le prix de cette option :

$$\begin{aligned} C_t(S, T) &= B(t, T)E^Q [(S - K)^+ | F_t] \\ &= S e^{-q(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ &= BS_t(S_t, K, t, T, \sigma) \end{aligned}$$

Avec $B(t, T)$, prix du zéro coupon assurant 1 en T , N la fonction de répartition de la loi normale, r le taux sans risque continue, q le taux de dividendes continue,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

On remarque que la volatilité n'est pas directement observable, contrairement aux autres paramètres de la formule. On peut toutefois extraire la volatilité implicite $\sigma_{BS}(K, T)$ à partir des prix d'options cotées sur le marché en inversant la formule de Black Scholes. On constate alors que celle-ci n'est pas constante et diffère suivant le Strike et la maturité. En effet, d'une part à Strike fixé la volatilité implicite varie avec la maturité de l'option considérée. C'est ce qu'on appelle la **structure par terme** de la volatilité implicite. Et d'autre part, à maturité fixée, la volatilité implicite dépend du Strike. C'est le **smile** de volatilité. Tout l'enjeu est alors de trouver, pour un couple (K, T) quelconque, la volatilité adéquate.

Le modèle présenté plus haut est compatible avec le phénomène de structure par terme de volatilité mais n'est pas capable de reproduire le smile constaté en pratique. Pour conclure nous dirons que la dynamique risque-neutre de Black-Scholes et Merton n'est donc pas compatible avec le phénomène de smile qui existe sur tous les marchés d'options.

Cet inconvénient devient très problématique lorsqu'il s'agit de pricer des options "path-dependent"⁵ comme par exemple des options à barrière, asiatiques ou digitales.

3. Limites et extension du modèle de Black Scholes :

Dans le cadre du pricing de produits path-independants, la volatilité utiliser varie donc selon le prix d'exercice de l'option considérée. Les praticiens ont remarqué que la volatilité implicite du marché est en fait convexe décroissante en générale du strike, communément appelée « smile de volatilité ». L'ignorance de cette relation entre la volatilité et le couple (K, T) conduit non seulement des prix faux mais aussi des sensibilités fausses pouvant induire une mauvaise

⁵ Options dont la valeur à l'échéance est fonction de la valeur prise par le sous-jacent au cours de la vie de l'option, par opposition aux options vanilles, dont la valeur de l'option à échéance dépend uniquement de la valeur du sous-jacent à échéance.

gestion des positions. Une définition simple peut en être donnée : il s'agit de la dépendance de la volatilité implicite des options européennes d'une maturité donnée par rapport aux prix d'exercice. De plus, la volatilité implicite dépend également du temps calendaire t et de la moneyness de l'option. L'existence de ce smile remet en cause la théorie de Black and Scholes. Rubinstein (1985), Clewlow et Xu (1993) ont montré quelques propriétés intéressantes de ce smile :

- Le smile est une conséquence de la demande et de l'offre sur les maturités et les strikes des options.
- La volatilité est une fonction convexe par rapport au prix d'exercice, le minimum de cette fonction se situe un niveau de prix d'exercice correspondant des options très proches de la monnaie.
- L'amplitude du smile augmente fortement au fur et à mesure que la date d'échéance de l'option se rapproche. Il augmente fortement pour des maturités courtes et tend à disparaître pour des maturités longues.
- Le smile de volatilité est en général décroissant, mais peut présenter une partie croissante pour des moneyness supérieures à la monnaie.

Les origines des insuffisances du modèle de Black and Scholes proviennent des hypothèses très restrictives sous-jacentes. Le modèle suppose des réajustements continus, or ceux-ci ne peuvent être réalistes qu'à des intervalles discrets. Leland (1985) a montré que la stratégie de couverture indiquée par le modèle reste inchangée en temps discret par rapport au temps continu mais qu'une erreur résiduelle apparaît.

De plus, les coûts de transaction existent et contredisent l'hypothèse de marché parfait. Des modèles prenant en compte les coûts de transaction, donnent des formules identiques au modèle classique, mais utilisant une volatilité modifiée. Le choix du mouvement brownien est une hypothèse très forte. Une des caractéristiques du mouvement brownien est que ses accroissements sont gaussiens. Les rendements du sous-jacent sont alors gaussiens dans ce modèle, mais cette hypothèse ne correspond pas aux comportements empiriques des rendements dans le cas général.

Mais le mouvement brownien possède trois caractéristiques très intéressantes comme la stationnarité, l'indépendance des accroissements et la continuité des trajectoires. Or sortir de ce cadre implique le rejet d'une de ces propriétés :

- Si l'hypothèse d'indépendance est rejetée, alors il faut remettre en cause l'hypothèse d'efficience de marché.
- L'observation de trajectoires non continues mène à l'étude des sauts de lois de Poisson que ce soit dans le cadre de marchés complets ou incomplets.
- L'abandon de l'hypothèse de stationnarité amène à des modèles de marchés incomplets mais cohérents avec les smiles de marché.

Un problème plus général se pose lorsque le calcul du prix d'un produit ne se ramènent pas à des combinaisons d'euroennes dont les valeurs sont déjà connues dans le marché. De plus, la nappe de volatilité implicite ($K ; T$) varie aussi au cours du temps et présente donc un caractère stochastique. En particulier, les opérateurs, aux vues des dynamiques respectives observées sur le spot et la volatilité, pensent qu'il existe une relation étroite entre les deux. Dupire apporte alors un modèle capable de valoriser de tels produits en incorporant une dynamique déterministe de la volatilité en fonction du sous-jacent S_t

4. Modèle à Volatilité Locale :

Dans le modèle de volatilité locale, on ne prend plus simplement une volatilité constante ou déterministe fonction du temps t , mais une volatilité déterministe fonction du temps et du spot S_t . On passe alors de σ_t à $\sigma(t, S_t)$.

En fonction du choix de $\sigma(t, S_t)$, on peut alors obtenir différentes formules d'inversion nous permettant de calibrer cette fonction de volatilité.

La première idée de Dupire, est de restreindre son analyse à une diffusion risque-neutre de la forme :

$$dS_t = S_t \left((r(t) - q(t))dt + \sigma_L(t, S_t)dW_t \right), \quad S_0 > 0 \text{ donné}$$

Où σ_L est une fonction de volatilité locale que l'on cherche à déterminer à partir des prix des calls.

a. Première formule de Dupire :

Soit une collection de calls européens $C(K, T)$ définis par leurs strikes et maturités respectifs.

$$C(t, K, S_t, T) = B(t, T)E^Q[(S_T - K)^+ | F_t]$$

Par dérivation de la formule précédente,

$$\frac{\partial C}{\partial K} = B(t, T) E^Q(1_{\{S_T > K\}} | F_t) = B(t, T) \int_K^{+\infty} \varphi(t, S_t, x, T) dx$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = B(t, T) \varphi(t, S_t, x, T) = -e^{-\int_t^T r(\zeta) d\zeta} \varphi(t, S_t, x, T)$$

Soit

$$\varphi(t, S_t, x, T) = -e^{-\int_t^T r(\zeta) d\zeta} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

Avec φ la densité de la loi normale.

Pour démontrer la formule de volatilité locale, Dupire a besoin de l'équation de Fokker-Planck que nous allons redémontrer.

Soit la fonction $g(S_t) = \delta_K(S_t)$, $\delta_K(x)$ la masse de Dirac au point K, g est dérivable à gauche presque partout, on peut donc lui appliquer la formule de Tanaka (c.f Annexe), donc

$$d\delta_K(S_t) = \delta'_K(S_t) dS_t + \frac{1}{2} \delta''_K(S_t) \sigma^2(S_t, t) dt$$

$$= \delta'_K(S_t) \mu(S_t, t) dt + \delta'_K(S_t) \sigma(S_t, t) dW_t + \frac{1}{2} \delta''_K(S_t) \sigma^2(S_t, t) dt$$

Par passage à l'espérance et aux propriétés de la dérivée des Dirac,

$$E(d\delta_K(S_t)) = d(E(\delta_K(S_t))) = d\varphi(K)$$

$$E(\delta'_K(S_t) \mu(S_t, t) dt) = -\frac{\partial}{\partial K} (\varphi(K) \mu(K, T)) dt$$

$$E\left(\frac{1}{2} \delta''_K(S_t) \sigma^2(S_t, t) dt\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (\varphi(K) \sigma^2(K, T)) dt$$

$$E(dW_t) = 0$$

D'où

$$d\varphi(K) = -\frac{\partial}{\partial K} (\varphi(K) \mu(K, T)) dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (\varphi(K) \sigma^2(K, T)) dt$$

On peut alors écrire l'équation de Kolmogorov,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(K) = - \frac{\partial}{\partial K} (\varphi(K) \mu(K, T)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (\varphi(K) \sigma^2(K, T)) dt$$

En cas de présence de taux d'intérêt (stochastiques ou non), l'équation de Kolmogorov est modifiée.

Notons $\bar{\varphi}_t(x) = E \left(e^{-\int_0^t r(\zeta) d\zeta} \delta_x(X_t) \right)$, alors,

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\varphi}(K) = - \frac{\partial}{\partial K} (\bar{\varphi}(K) \mu(K, T)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (\bar{\varphi}(K) \sigma^2(K, T)) - r \bar{\varphi}(K)$$

Maintenant, le processus de diffusion défini plus haut est de la forme

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dWt$$

Un prix de call européen s'écrit de la manière suivante en fonction de la densité du sous-jacent :

$$C(t, K, S_0) = B(0, t) \int_K^{\infty} dS_t \cdot \varphi(t, S_t, S_0) (S_t - K)$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -B(0, t) \int_K^{+\infty} dS_t \cdot \varphi(t, S_t, S_0)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = -B(0, t) \varphi(t, S_t, S_0)$$

Maintenant,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = B(0, t) \int_K^{+\infty} dS_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, S_t, S_0) \right) (S_t - K)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \int_K^{+\infty} dS_t \left(- \frac{\partial}{\partial S} (\bar{\varphi}(S) \mu(S, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (\bar{\varphi}(S) \sigma^2(S, t)) - r \bar{\varphi}(S) \right) (S_t - K)$$

Par integration par parties,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[\left(-\bar{\varphi} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} (\bar{\varphi} \sigma^2 S_t^2) \right) (S_t - K) \right]_K^{+\infty} - \int_K^{\infty} \left(-\bar{\varphi} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} \bar{\varphi} \sigma^2 S_t^2 \right) dS_t - rC$$

$$\text{or } \lim_{S \rightarrow \infty} \varphi = 0, \text{ donc } \lim_{S \rightarrow \infty} \left[\left(-\bar{\varphi} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} (\bar{\varphi} \sigma^2 S_t^2) \right) (S_t - K) \right] = 0$$

De plus, φ et ses dérivées décroît plus vite que tous les autres éléments à condition qu'il existe un ensemble compact pour lequel la densité s'intègre à 1.

d'où

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \int_K^{+\infty} dS_t \mu S_t \varphi - \frac{1}{2} \int_K^{+\infty} \frac{\partial}{\partial S} (\bar{\varphi} \sigma^2 S_t^2) dS_t - rC$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \int_K^{+\infty} dS_t \mu S_t \varphi - \frac{1}{2} [\bar{\varphi} \sigma^2 S_t^2]_K^{+\infty} - rC$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\sigma^2 K^2 \varphi}{2} \int_K^{+\infty} dS_t \mu S_t \varphi - rC$$

Soit l'équation finale

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\sigma^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + \mu(t) (C - K \frac{\partial C}{\partial K}) - rC$$

Avec $\mu = r(t) - d(t)$, $d(t)$ le taux de dividendes continue.

On obtient alors :

$$\sigma_{loc}^2 (S_t = K, t) = \sigma_{loc}^2 (K, t) = \frac{\frac{\partial C}{\partial t} + (r_t - d_t) K \frac{\partial C}{\partial K} + d_t C}{\frac{1}{2} K^2 \left(\frac{\partial C}{\partial K} \right)}$$

Avec $C = C(t, K, S_t, T)$.

Par cette formule, Dupire a montré que l'on pouvait relier la volatilité à une collection de prix de calls sur un même actif sous-jacent, ayant chacun des maturités et des strikes différents.

Cette équation permet de déduire la fonction de volatilité locale des prix de calls observés sur le marché si l'on suppose que l'on observe les prix de calls sur un continuum de prix d'exercice et de maturité. Cette hypothèse n'est pas réaliste car nous observons un nombre discret de prix

d'options sur le marché. De plus, cette formule présente un inconvénient majeur car les valeurs du numérateur et du dénominateur peuvent être très petites si les options sont loin de la monnaie.

De ce fait, l'utilisation de cette formule provoque des instabilités numériques importantes. Enfin, le marché traite le plus souvent les options en termes de niveaux de volatilité. Comme nous l'avons vu précédemment, il existe une bijection entre la volatilité implicite et le prix d'un call européen dans le modèle de Black Scholes. Quel que soit le modèle de pricing de l'option, le marché donnera la volatilité implicite (Black Scholes) correspondante. Il est donc important de lier la volatilité locale et la volatilité implicite traitée par le marché, ce qui est fait avec la seconde formule de Dupire.

b. Seconde formule de Dupire :

i. Seconde formule de Dupire en Strike :

Dupire a fourni une formule reliant les deux paramètres dans le cas d'un marché complet :

$$\sigma_{loc}^2(K, t) = \frac{\sigma_{imp}^2 + 2(T-t)\sigma_{imp}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial t} + 2(T-t)(r(T)-d(T))K\sigma_{imp}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial K}}{\left(1 + K\sqrt{T-t}d_1\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial K}\right)^2 + K^2(T-t)\sigma_{imp}\left(\frac{\partial^2\sigma_{imp}}{\partial K^2} - d_1\sqrt{T-t}\left(\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial K}\right)^2\right)}$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - d + \frac{\sigma_{imp}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_{imp}\sqrt{T-t}}$$

Et σ_{imp} la volatilité implicite issue du marché pour retrouver le prix d'une option de strike K et de maturité T.

Preuve :

Quelques notations :

- $n(d_1) = e^{\frac{-d_1^2}{2}}$ et $\sigma_{imp} = \sigma$
- C^{loc} prix d'un call dépendant de la volatilité implicite $(BS_t(S_t, K, t, T, \sigma_{imp}))$
- $C_T = \frac{\partial C}{\partial T}$ $C_K = \frac{\partial C}{\partial K}$ $C_\sigma = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ $C_{KK} = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$ $C_{\sigma\sigma} = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$

- $C_T^{loc} = \frac{\partial C^{loc}}{\partial T} \quad C_K^{loc} = \frac{\partial C^{loc}}{\partial K} \quad C_\sigma^{loc} = \frac{\partial C^{loc}}{\partial \sigma} \quad C_{KK}^{loc} = \frac{\partial^2 C^{loc}}{\partial K^2}$
- $\sigma_T = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \quad \sigma_K = \frac{\partial \sigma}{\partial K} \quad \sigma_{KT} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K \partial T} \quad \sigma_{KK} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2}$

Par dérivation successives, on obtient :

$$\begin{aligned} C_T^{loc} &= C_T + \sigma_T C_\sigma \\ C_K^{loc} &= C_K + \sigma_K C_\sigma \\ C_{KK}^{loc} &= C_{KK} + 2\sigma_K C_{K\sigma} + C_{\sigma\sigma}(\sigma K)^2 + C_\sigma \sigma_{KK} \end{aligned}$$

En utilisant les grecques calculées sur la formule de Black Scholes :

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{\sigma S_T e^{-d(T-t)} N(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - d S_T N(d_1) e^{-d(T-t)} + r K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ C_K &= -e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ C_{KK} &= -e^{-r(T-t)} \frac{n(d_2)}{K \sigma \sqrt{T-t}} \\ C_\sigma &= S_T e^{-d(T-t)} N(d_1) \sqrt{T-t} \\ C_{K\sigma} &= \frac{S_T e^{-d(T-t)} n(d_1)}{K \sigma} \\ C_{\sigma\sigma} &= S_T e^{-d(T-t)} n(d_1) \sqrt{T-t} \frac{d_1 d_2}{\sigma} \\ \frac{C_{KK}}{C_\sigma} &= \frac{1}{K^2 \sigma \sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Par substitution dans le numérateur de la première formule de Dupire, on a

$$C_T + (r - d) K C_K + d C = C_\sigma \left(\frac{\sigma}{2(T-t)} + \sigma_T + (r - d) K \sigma_K \right)$$

Et pour le dénominateur, on a

$$C_{KK} = C_\sigma \left(\sigma_{KK} - d_1 \sqrt{T-t} (\sigma_K)^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{K \sqrt{T-t}} + d_1 \sigma_K \right)^2 \right)$$

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \frac{\left(\frac{\sigma}{2(T-t)} + \sigma_T + (r-d)K\sigma_K \right)}{\frac{1}{2}K^2 \left(\sigma_{KK} - d_1\sqrt{T-t}(\sigma_K)^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{K\sqrt{T-t}} + d_1\sigma_K \right)^2 \right)}$$

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \frac{(\sigma + 2(T-t)\sigma_T + 2(T-t)(r-d)K\sigma_K)}{K^2 \left(\sigma_{KK} - d_1\sqrt{T-t}(\sigma_K)^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{K\sqrt{T-t}} + d_1\sigma_K \right)^2 \right) (T-t)}$$

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \frac{\sigma(\sigma + 2(T-t)\sigma_T + 2(T-t)(r-d)K\sigma_K)}{\sigma K^2 \left(\sigma_{KK} - d_1\sqrt{T-t}(\sigma_K)^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{K\sqrt{T-t}} + d_1\sigma_K \right)^2 \right) (T-t)}$$

De plus,

$$\sigma K^2 (T-t) \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{K\sqrt{T-t}} + d_1\sigma_K \right)^2 = \left(1 + K\sqrt{T-t}d_1 \frac{\partial \sigma}{\partial K} \right)^2$$

En développant, on retrouve la seconde formule de Dupire présentée plus haut :

$$\sigma_{loc}^2(K, t) = \frac{\sigma_{imp}^2 + 2(T-t)\sigma_{imp} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial t} + 2(T-t)(r(T) - d(T))K\sigma_{imp} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K}}{\left(1 + K\sqrt{T-t}d_1 \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \right)^2 + K^2(T-t)\sigma_{imp} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{imp}}{\partial K^2} - d_1\sqrt{T-t} \left(\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial K} \right)^2 \right)}$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - d + \frac{\sigma_{imp}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_{imp}\sqrt{T-t}}$$

Cette formule montre que l'on peut relier directement la volatilité locale à la volatilité implicite traitée par le marché. Mais cette relation fait intervenir la volatilité implicite et ses dérivées d'ordre un et deux par rapport au strike et d'ordre un par rapport au temps. La valeur de ces dernières ne peut hélas qu'être approchée sur la base de la collection de calls et de puts européens pour lesquels une volatilité implicite est cotée dans le marché.

Une manière classique consiste à approximer les dérivés par des différences finies, mais cette technique provoque de nombreuses instabilités et conduisent à des valeurs de volatilité locales peu cohérentes.

D'autres techniques de paramétrisation doivent alors être utilisées pour contourner ces difficultés.

ii. Seconde formule de Dupire en moneyness :

Nous effectuons un changement de variables donné par :

$$y(K) = \frac{K}{S_0}$$

Et on définit une fonction σ par :

$$\sigma_{imp}(K, T) = \sigma(y(K), T)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial T} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial K} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial K} \frac{\partial y(K)}{\partial K} \\ \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial K} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial K} \frac{1}{S_0} \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\partial^2 \sigma_{imp}(K, T)}{\partial K^2}$ est calculé de manière analogue.

En posant $X = \frac{K}{S_0}$, on obtient :

$$\sigma_{loc}^2(X, T) = \frac{\sigma^2(X, T) + 2T\sigma(X, T) \left(\frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial T} + (r(T) - d(T))X \frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial K} \right)}{\left(1 + X\sqrt{T}d_1 \frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial K} \right)^2 + \sigma(X, T) X^2 T \left(\frac{\partial^2 \sigma(X, T)}{\partial K^2} - d_1 \sqrt{T} \left(\frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial K} \right)^2 \right)}$$

où

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{X}\right) + \left(r(T) - d(T) + \frac{\sigma(X, T)^2}{2}\right)T}{\sigma(X, T)\sqrt{T}}$$

iii. Seconde formule de Dupire en moneyness Forward :

Le prix du forward $F(0, t)$ évolue selon le processus déterministe :

$$dF(0, t) = F(0, t) (r(t) - d(t)) dt, \quad F(0, 0) = S_0$$

Ainsi, nous avons :

$$F(0, t) = S_0 e^{\int_0^t (r(s) - d(s)) ds}$$

De plus, le processus $X_t = \frac{S_t}{F(0, t)}$ est une martingale sous la probabilité risque-neutre Q :

Nous effectuons le changement de variables donné par :

$$y(K) = \frac{K}{F(0, T)}$$

Et on définit une fonction σ par :

$$\sigma_{imp}(K_0, T_0) = \sigma(y(K_0), T_0)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial T} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial T} + \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial K} \frac{\partial y(K)}{\partial T} \\ \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial T} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial T} + \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial K} \frac{K}{F(0, T)} - (r(T) - d(T)) \\ \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial K} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial K} \frac{\partial y(K)}{\partial K} \\ \frac{\partial \sigma_{imp}(K, T)}{\partial K} &= \frac{\partial \sigma(y(K), T)}{\partial K} \frac{1}{F(0, T)} \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\partial^2 \sigma_{imp}(K, T)}{\partial K^2}$ est calculé de manière analogue.

En posant $X = \frac{K}{F(0, T)}$, on obtient :

$$\sigma_{loc}^2(X, T) = \frac{\sigma^2(X, T) + 2T\sigma(X, T) \frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial T}}{\left(1 + X\sqrt{T}d_1 \frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial K}\right)^2 + \sigma(X, T) X^2 T \left(\frac{\partial^2 \sigma(X, T)}{\partial K^2} - d_1 \sqrt{T} \left(\frac{\partial \sigma(X, T)}{\partial K}\right)^2\right)}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{1}{X}\right) + \frac{\sigma(X,T)^2}{2}T}{\sigma(X,T)\sqrt{T}}$$

5. Tests de non-régression :

Ma principale mission au cours de ce stage, a été l'automatisation des tests de non-régression pour une liste de scénarios Sophis. Cette mission se décortique en quatre grandes phases : l'état de l'art et éventuelles corrections, l'introduction des scénarios dans l'outil TNR, la génération du rapport de différence et enfin l'automatisation. Je vais d'abord commencer par une brève définition des tests de non-régression avant de passer aux différentes étapes du projet.

a. Définition :

Les tests de non-régression, symbolisés parfois TNR, sont les tests qui permettent de valider que la mise en ligne d'une nouvelle fonctionnalité sur un logiciel n'impactera pas les fonctions déjà existantes. En effet, le but étant de vérifier qu'il n'y a pas d'effets de bord non prévus de nature à dégrader la qualité d'une version antérieurement validée.

Les TNR sont déployés sur un environnement de recette et doivent vérifier au minimum que les fonctionnalités principales ou « critiques » du programme sont toujours disponibles après la livraison de nouveaux développements/patches.

Remarques : Les tests de non-régression s'orientent sur une partie précédemment testée et validée conforme à certaines exigences. Ils ne portent donc jamais sur une partie non testée (les tests correspondants sont alors des tests de conformité), ni même sur une partie déjà testée et ayant donné lieu à des anomalies (les tests correspondants sont alors des tests de validation).

L'objectif est d'identifier le plus tôt possible d'éventuelles régressions et, dans ce cas, l'automatisation des cas de test prend tout son sens.

L'objectif dans notre cas est de pouvoir relever une alerte s'il y a une régression entre une première version du Toolkit ⁶Sophis et la version en prod⁷.

⁶ Toolkit Sophis : Pricer interne développé par le front Office (C++)

⁷ Version en Production : c'est cette version que l'on cherche à tester.

b. Périmètre de travail :

Ce travail concerne une liste de scénarios Sophis, environ une dizaine, qui m'a été attribué au début de ma mission. Ces scénarios sont différents les uns des autres, il peut s'agir de scénario de calcul (par exemple un scénario qui, exécuté une un folio donné, retourne la sensibilité Rho) ou de scénario plus fonctionnel comme par exemple un scénario qui, exécuté sur un instrument, retourne les différentes sources de risques présentes.

c. Les différentes phases :

- Première phase : Etat de l'art des scénarios et éventuelles corrections

La première étape de ce projet a été la réalisation de l'état de l'art des différents scénarios. Il a fallu vérifier que tous les scénarios étaient fonctionnels que ce soit en mode GUI⁸ ou en mode Batch⁹ et que ce soit sur un seul instrument ou sur un portefeuille d'instruments financiers, qu'il n'y avait pas de régression au niveau des fonctionnalités des scénarios ou des résultats (un scénario qui, dans une version antérieure, donnait un prix et qui maintenant renvoie des NAN ou des prix auxquels on ne s'attend pas).

J'ai durant cette étape, identifié deux scénarios qui ne répondaient plus correctement au besoin initial.

Le premier scénario « RISKAXIS » a pour but de vérifier toutes les sources de risque d'un instrument donné sans effectuer de Pricing, les sources de risques prisent en compte sont : le Delta, Gamma, Vega, Repo, Epsilon, Crédit et Cega. Il crée alors un fichier txt ou xlsx contenant la liste de toutes les sources de risques identifiées pour le sicovam donné.

Ce scénario s'exécutait parfaitement sur un Sicovam mais pas sur un portefeuille. J'ai dû alors revoir le code source et le modifier afin qu'il prenne en compte le cas d'un portefeuille aussi.

Le deuxième scénario « RHO ISO STRESS TEST » calcule la sensibilité rho par term structure d'un instrument ou d'un portefeuille via la méthode de Waterfall en déformant les plots en cumulatifs.

Ce scénario s'exécutait très bien en mode GUI donc sur l'interface Sophis et ce que ce soit sur un instrument ou sur un portefeuille mais ne s'exécutait pas du tout en ligne de commande. En

⁸ GUI : Graphical User Interface.

⁹ Batch : en ligne de commande

parcourant le code afin de comprendre la raison, je me suis rendu compte que le mode Batch n'avait pas été pris en compte dans le code du scénario. J'ai du alors coder l'intégralité du scénario pour le mode Batch.

➤ Deuxième phase : Introduction des scénarios dans l'outil TNR

Cette étape du projet à été réalisé en collaboration avec Filipe qui est le responsable de l'outil TNR à Porto. L'outil dispose de la liste des scénarios qu'on lui a intégré après avoir corrigé les différents bugs, il suffit alors d'indiquer la base de donnée, la version Sophis, et le code du portefeuille sur lequel on veut exécuté notre scénario.

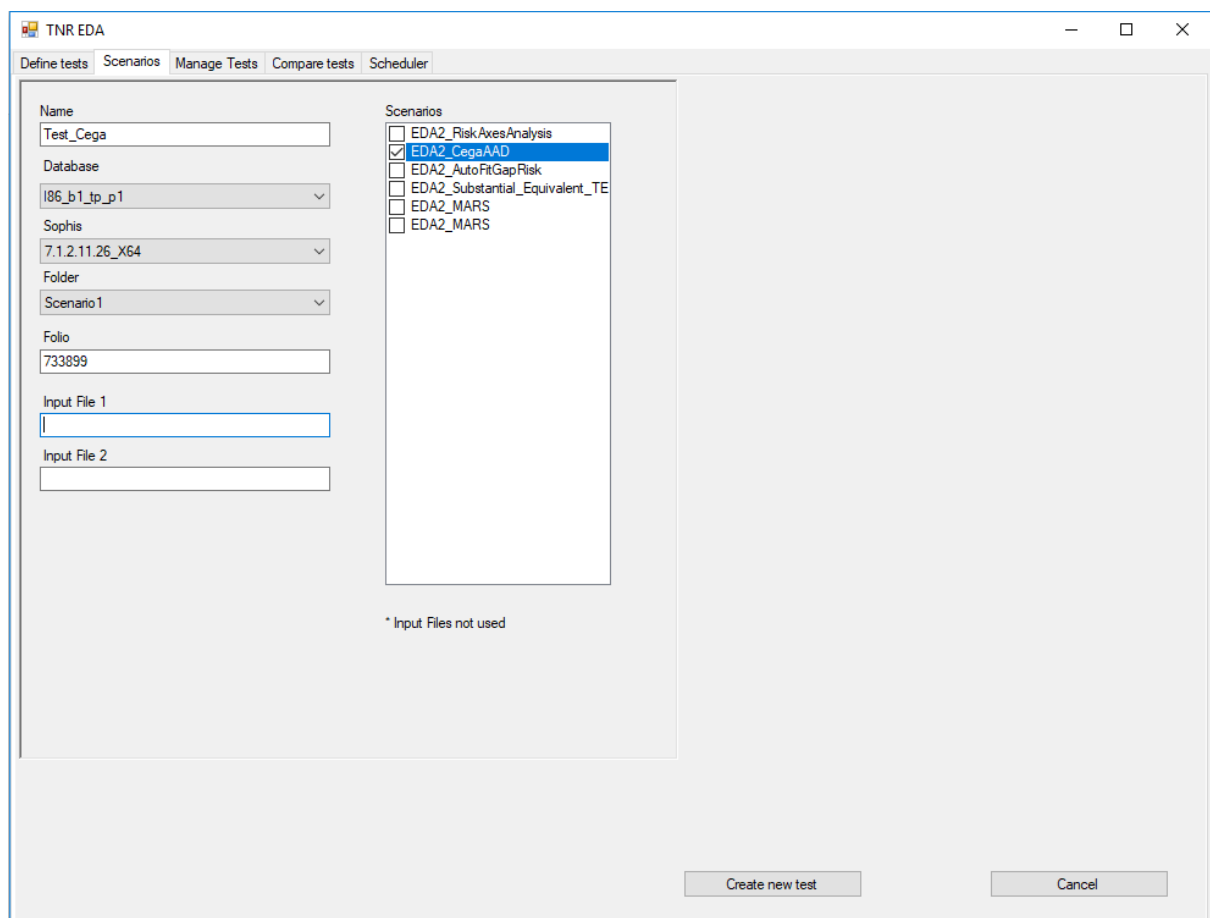
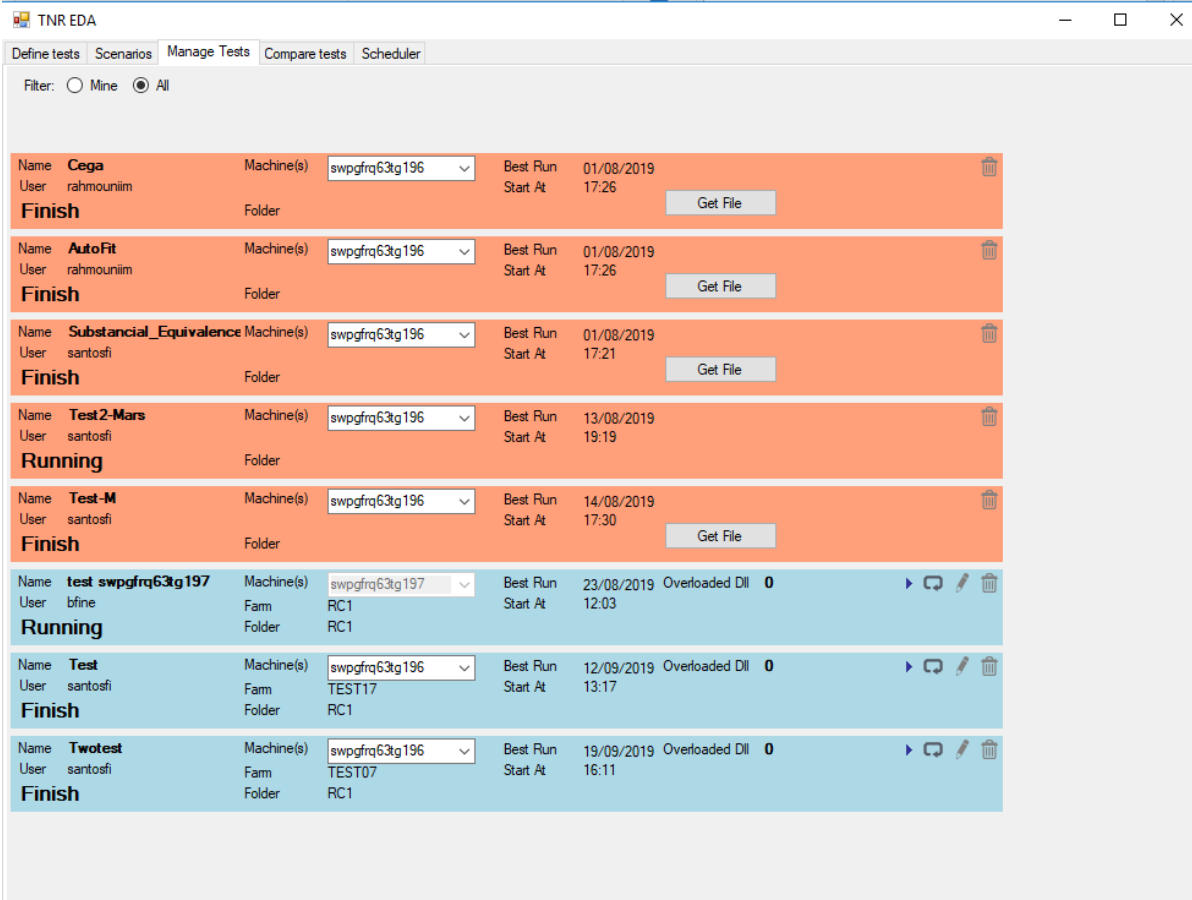


Figure 8 Interface du TNR - Choix des scénarios à tester

Le processus passe alors par trois états : Waiting, Running et Finish.

- **Waiting** : Lors de cette étape le programme choisi la machine de test en fonction de la mémoire disponible ou attend qu'une machine se libère.

- **Running** : Les tests sont exécutés lors de cette étape.
- **Finish** : Quand on est à l'état finish c'est que l'on peut récupérer les résultats.



| Name | User | Machine(s) | Farm | Folder | Best Run | Start At | Overloaded Dll |
|--------------------------------|-----------|----------------|--------|--------|------------|----------|----------------|
| Cega | rahmounim | swpgfrq63tg196 | | | 01/08/2019 | 17:26 | |
| Finish | | | | | | | |
| AutoFit | rahmounim | swpgfrq63tg196 | | | 01/08/2019 | 17:26 | |
| Finish | | | | | | | |
| Substancial_Equivalence | santosfi | swpgfrq63tg196 | | | 01/08/2019 | 17:21 | |
| Finish | | | | | | | |
| Test2-Mars | santosfi | swpgfrq63tg196 | | | 13/08/2019 | 19:19 | |
| Running | | | | | | | |
| Test-M | santosfi | swpgfrq63tg196 | | | 14/08/2019 | 17:30 | |
| Finish | | | | | | | |
| test swpgfrq63tg197 | bfine | swpgfrq63tg197 | RC1 | RC1 | 23/08/2019 | 12:03 | 0 |
| Running | | | | | | | |
| Test | santosfi | swpgfrq63tg196 | TEST17 | RC1 | 12/09/2019 | 13:17 | 0 |
| Finish | | | | | | | |
| Twotest | santosfi | swpgfrq63tg196 | TEST07 | RC1 | 19/09/2019 | 16:11 | 0 |
| Finish | | | | | | | |

Figure 9 Interface TNR - Suivi des tests

➤ Troisième phase : Génération du rapport des différences moyennant *FinBox*.

Cette étape est la plus importance puisque c'est celle qui nous permet de récupérer le rapport de différences des versions testées.

L'utilité de FinBox réside dans le fait qu'il nous permet de réconcilier des fichiers qui ne sont pas forcément du même type (txt, xlsx, csv ..). Il reste alors à préparer les Templates associés à chaque scénarios et à intégrer les différents scripts dans l'outil de TNR.

| AutofitGapRisk | | | | | | | | | | | | |
|---------------------|--|---------|-----------|-----------|------------|----------|----------|--------|----------|----------|-----------|------------|
| System date | 2019-sept-12 14:24:26 | | | | | | | | | | | |
| Source alias | MULTI_CSV | | | | | | | | | | | |
| Target alias | MULTI_CSV | | | | | | | | | | | |
| Main Template | /D:/Outils/FinBox/V2.5.7/EasyRec/TNR/AutoF | | | | | | | | | | | |
| Total Duration | 00:00:00.100 | | | | | | | | | | | |
| Product | Nb rows | Nb rows | Nb Missir | Nb Missir | Nb Unmatch | Nb Match | Nb Force | Filter | Match ru | Duration | Match (%) | Recon Stz |
| EasyRec/samples/CSV | 23 | 23 | 0 | 0 | 4 | 19 | 0 | MUST | ONE_TO_O | 0 | 82,61% | Difference |

Figure 10 Rapport des différences

On remarque que pour ce scénario, il y a 4 erreurs. L'onglet Diff (0) nous permet de voir quelles sont les clés concernées par ces erreurs. On peut facilement voir qu'il y a une différence au niveau du sous-jacent par exemple.

| Row | Title | Source Value | Target Value | Delta |
|-----|-------------------|--------------------|------------------|---------|
| 1 | LEG_ID | 125327423 | 54512 | 0,000 |
| 2 | UNDERLYING | TENCENT HOLDINGS L | AMAZON.COM INC @ | 0,000 |
| 2 | AUTOCALL_GAP | 0,0092 | 0 | 0,009 |
| 14 | AUTOCALL_LEVEL(K) | 149,821 | 2 | 147,821 |
| 19 | PROBA_RAPPEL | 0,0439 | 0,5 | -0,456 |

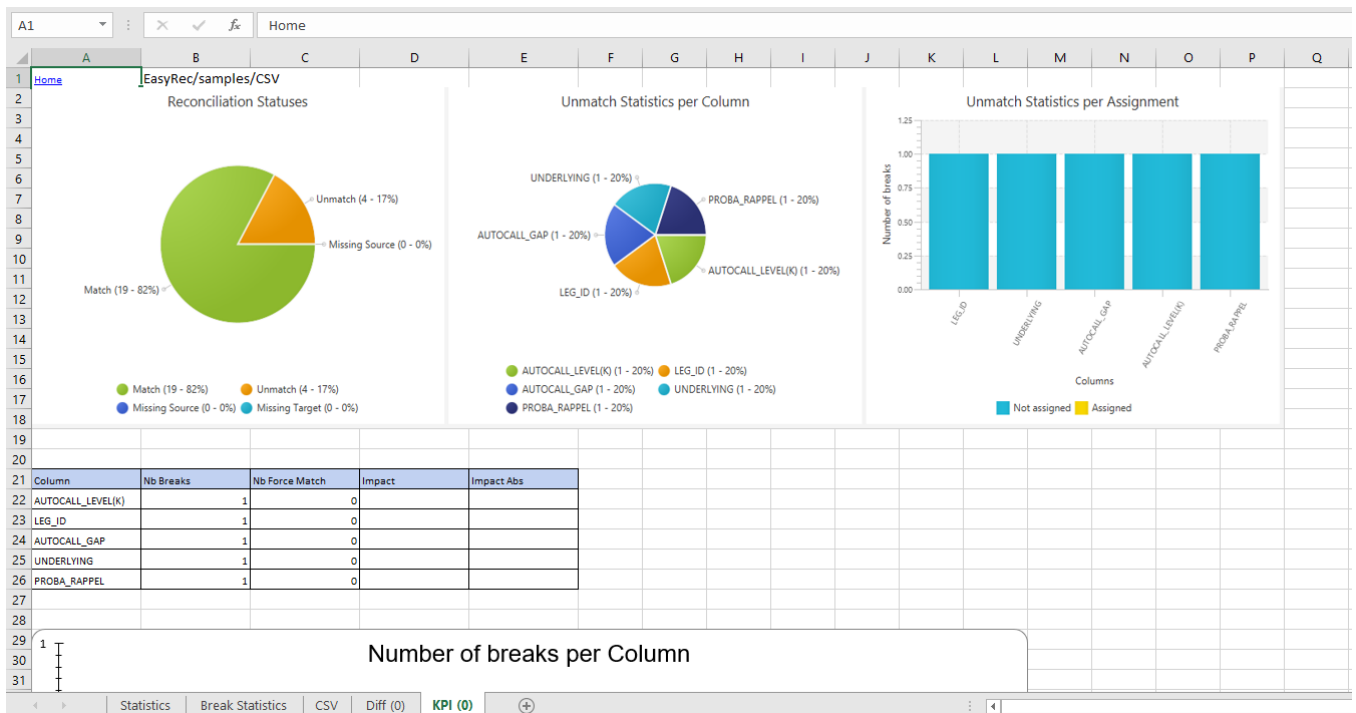


Figure 11 KPI

CONCLUSION :

J'ai effectué mon stage de fin d'études à Natixis, une des plus grandes institutions bancaires mondiales, au sein de l'équipe « *Pricing & Scientific Computing – Equity & Commodities* » en tant que IT-Quant. J'ai pendant ce stage manipulé le progiciel Sophis, découvert la salle de marché *Equity* et été en contact avec le front office. Ces six mois de stage m'ont permis d'améliorer mes compétences en programmation, notamment en C++ et d'approfondir ma connaissance des produits dérivés et instruments financiers.

Enfin, je ressors avec une expérience très enrichissante, tant sur le plan technique que sur le plan humain. Je pense avoir réellement acquis un savoir faire dans la compréhension et la modélisation d'instruments financiers ainsi que le développement d'outils informatiques. En effet, j'ai retrouvé ce mélange de finance et d'informatique mais aussi de mathématique auquel j'aspirais. C'est pourquoi lorsqu'une proposition d'embauche au sein de cette même équipe m'a été proposé j'ai sans hésitation accepté de continuer de faire partie de cette équipe qui m'a beaucoup donné professionnellement mais aussi personnellement.

BIBLIOGRAPHIE :

- Site Web de Natixis : https://www.natixis.com/natixis/jcms/j_6/fr/accueil
- <https://fr.wikipedia.org/wiki/Natixis>
- <https://www.cafedelabourse.com/>
- <https://www.atlassian.com/fr/software/jira>
- <https://www.planzone.fr/blog/quest-ce-que-la-methodologie-agile>
- Documents internes Natixis
- Finance de Marché - Franck Moraux –
- <https://docplayer.fr/83988571-Produits-structures-l-autocallable-reverse-convertible.html>
- <http://financedemarche.fr/finance/phoenix-autocall-definition-payoff-dun-produit-structure-a-coupons>